
国际机械工程先进技术译丛

光学车间检测

（原书第3版）

Optical Shop Testing

(Third Edition)

（墨）D.马拉卡拉　主编
杨力　伍凡　等译




机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

国际机械工程先进技术译丛

光学车间检测

(原书第3版)

Optical Shop Testing (Third Edition)

(墨) D. 马拉卡拉 (Daniel Malacara) 主编
翻译(按姓氏笔画排):万勇建 王海英 伍凡 龙懿
刘海涛 刘茜 李世杰 汪利华 吴高峰 吴时彬
杨力 杨伟 杨鹏 范斌 张蓉竹 徐燕 曾志革 雷柏平



机 械 工 业 出 版 社

本书原著是光学检测领域的权威著作之一，从第1版到第3版的再版历时三十年时间，第一版都深受光学检测领域读者的欢迎。本书（原书第3版）详细介绍了光学检测领域的各种仪器、方法和技术手段，以及三十年来光学检测领域的最新重要进展。

本书共分18章，主要内容包括：牛顿干涉仪，菲佐干涉仪，海丁格干涉仪，泰曼-格林干涉仪，共光路干涉仪，横向剪切干涉仪，径向、旋转和反转剪切干涉仪，多光束干涉仪和多通道干涉仪的技术原理和使用方法；介绍了傅科刀口法、细丝法和调相法，朗奇检验法，哈特曼光阑检验、哈特曼-夏克光阑检验及其他光阑检验，星点检验法，非球面波前和镜面的检验，泽尼克多项式与波前拟合，相移干涉测量，表面轮廓仪，多波长及白光干涉测量，散射表面光学检测，角度、棱镜、曲率半径和焦距的测量，光学面及其特性的数学描述等光学检测的主要技术手段和分析方法。

本书可供从事光学检验、检测、测试、计量与研究、设计与制造工作的广大科技人员参考，也可作为教材供相关专业学生及教师使用。

Optical Shop Testing/edited by Daniel Malacala. -3rd ed.

ISBN: 978-0-471-48404-2 (cloth/cd)

图书在版编目（CIP）数据

光学车间检测：第3版/（墨）马拉卡拉主编；杨力等译. —北京：机械工业出版社，2012.4

（国际机械工程先进技术译丛）

书名原文：Optical Shop Testing (Third Edition)

ISBN 978-7-111-37376-6

Ⅰ.①光… Ⅱ.①马…②杨… Ⅲ.①光学仪器－检测 Ⅳ.①TH740.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第018622号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：舒 雯 责任编辑：舒 雯

版式设计：霍永明 责任校对：张晓蓉

封面设计：鞠 杨 责任印制：杨 曦

高等教育出版社印刷厂印刷

2012年6月第1版第1次印刷

184mm×260mm ·40.25印张·1026千字

0001－3000册

标准书号：ISBN 978－7－111－37376－6

定价：158.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
编辑热线：(010) 88379733	门户网：http://www.cmpbook.com
社服务中心：(010) 88361066	
销售一部：(010) 68326294	教材网：http://www.cmpedu.com
销售二部：(010) 88379649	
读者购书热线：(010) 88379203	封面无防伪标均为盗版

第3版译者的话

没有检测就没有制造，在经典光学加工时代如此，进入纳米制造的今天，检测和制造两者更加形影相随。本书是一本流行全球的关于光学检测的权威著作，所涉及的内容和讨论深度远远超过光学车间应用的范畴，虽一版再版至第3版而不改初衷，坚持以“光学车间检验”命名，折射出了原书作者朴实无华的学风和对光学加工检测工作的敬重。

无可否认，当D. 马拉卡拉等人在《Applied Optics》杂志的1975年5月刊上发表关于光学检测的大型文献分类索引目录时，编写这本书的基本框架业已形成。马拉卡拉的凝聚力在于他能够召集众多世界级权威参与本书多年后的重新编写，使《光学车间检验》第3版得以全新面貌问世。

原著第1版共524页，第3版扩容到862页；第1版由15章构成，第3版扩大到18章；第3版从第12到第18章，各章标题重新设置，内容重新编写，这一板块占了新版全书容量的一半。作者对全书作了重要修订、更新、调整和扩容，系统地介绍了30年来光学检测领域的最新重要进展，因此可以说第3版完全是一本新书。

原书第1版1977年出版，第3版于2007年即第1版发行30年后出版。机械工业出版社慧眼识珠，购买了第3版版权引入国内翻译出版，以飨读者。

本书可供光学与光学工程领域从事光学检验、检测、测试、计量与研究、设计与制造工作的广大科技工作者参考，也可作为教材供相关专业学生及教师使用。

应邀承担一本世界科技名著的翻译，既是荣誉，亦为挑战；肩负重任，如履薄冰。虽然做了大量工作，但由于水平所限，时间紧迫，翻译不妥、甚至错误之处，恐在所难免，敬请批评指正。

全书翻译工作按下列分工完成：第1章汪利华，第2章杨力、张蓉竹，第3章汪利华，第4章、第5章王海英，第6章、第7章杨伟，第8章徐燕、李世杰、刘海涛，第9章雷柏平，第10章曾志革，第11章吴高峰，第12章范斌，第13章万勇建、刘茜，第14章曾志革，第15章张蓉竹，第16章伍凡、杨鹏，第17章吴时彬，第18章万勇建、龙懿。

译稿初校：由译者互相交叉完成。

译稿一校：徐燕、闫锋涛、刘海涛、宋伟红、李世杰、张伟。

译稿二校：付小芳，唐勇，孙秋燕，曾强，冯恒。

译稿三校：伍凡，范斌，万勇建，曾志革。

译稿统校：杨力，伍凡，万勇建，曾志革，范斌，徐燕。

万勇建博士和徐燕硕士为全书统稿。全书翻译统筹杨力、伍凡和万勇建等。

感谢中国科学院光电技术研究所和该所先进光学研制中心、科技信息中心和质检中心的大力支持，没有这些支持，本书的翻译工作不可能完成。

第3版译者

于成都

第3版序

自本书第2版问世以来，在光学检测领域取得了很多重要进展。一方面社会发展比以往任何时候都更希望和要求光学检测速度更快、精度更高；另一方面，新技术手段也容许光学检测比以往能更好地完成这些检测任务。在本书第3版中介绍这些新进展，可能导致这本新书更厚、更贵，这同我们试图保持本书价格尽可能低廉的愿望并不相容，因此采取了若干新举措。其中之一是缩短本书某些数学化章节的描述，以便留给那些重要的应用主题。另一项措施是尽可能多地减少附在每一章后面的参考文献数量，只保留那些最相关的文献。

对于当前某些没有重要进展的经典章节几乎保留原样，但是大多数章节都作了实质性改动、更新或者扩容，以介绍那些最重要的新进展。

在本书修订过程中，很多重要人士作出了积极的贡献，包括每一章的作者。像本书这样的重要著述没有他们的贡献几乎是不可能完成的，编者深深地对他们致以诚挚谢意。还有很多其他人员，同事、朋友作出了重要的贡献，包括提出批评和建议，承担很多具体工作，例如提供插图、收集参考文献等。我的秘书玛丽莎（Marisa）和我的学生A. 高梅兹（Armando Gomez）给了我很大帮助。最后，对我的妻子伊莎贝尔（Isabel）和家庭所有成员的这些支持和鼓励表示感谢，对于他们，我心存歉疚和感激之情。

D. 马拉卡拉（Daniel Malacara）

目　录

第1章　牛顿干涉仪、菲佐干涉仪和海丁格干涉仪

M. V. 墨蒂（M. V Mantravadi）　D. 马拉卡拉（D. Malacara）

1.1　引言

本章由作者D. 马拉卡拉进行了更新，它包含了之前版本的大部分内容，牛顿（Newton）干涉仪、菲佐（Fizeau）干涉仪和海丁格（Haidinger）干涉仪是三种适合光学加工工作者使用的、最简单、最有效的检验仪器。在光学车间里装备这三种干涉仪并不困难。用这三种仪器可以进行光学零件的常规检测，检验的精度可达到波长的几分之一。虽然这些仪器的应用和说明是简单的，但它们的物理原理包含对物理光学有一定程度的了解和应用。本章将介绍这三种干涉仪，详细介绍干涉仪和用激光作光源的近况，以及对平面的绝对测量。

1.2　牛顿干涉仪

可以把任何有两个表面相接触，并用单色光照明的装置都称为牛顿干涉仪，因此在大学的物理光学实验室中，用来产生牛顿环的类似装置也是一种牛顿干涉仪，不同的仅仅是由于其中一个表面离开接触点后存在大的空气隙，如图1.1所示。因此，有时需要用放大镜，甚至要用到低倍率显微镜观察牛顿环。在光学车间里，一般将一个加工的平面样坯与另一个基准样板的精密表面相比较，或是将一个球面与另一个弧度相同而弯曲面相反的标准球面相比较。在这种情况下，空气隙的厚度一般都小于光的几个波长。在各种形式的牛顿干涉仪中，我们所关心的主要是通过观察和识别牛顿环来判定这个空气隙厚度的不均匀性。图1.2所示为观察牛顿环的一个简单装置。任何光源，例如钠灯、低压汞灯或氦灯，都可以用做这种装置的光源，在某些情况下，还可以使用普通钨丝白炽灯作为光源。

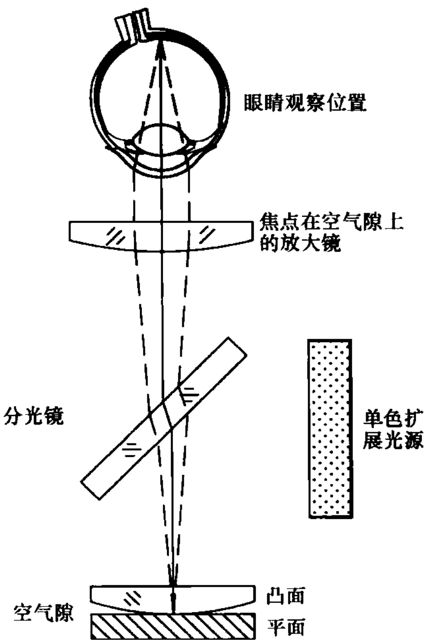


图1.1　牛顿环装置（焦距为1～2m的平凸镜，将其凸面与平面接触，用单色光照明）

首先观察一下两个完美的光学平面在互相接触而又有一个很小的空气楔时所发生的现象，如图1.3所示。两表面不是完全平行，因此空气楔左边薄右边厚。一般情况下，即使在薄的一边空气隙的厚度也不是为零，除非表面非常干净而且施加很大的压力使它们接触。因此可以设想两平面相交交线为一直线，如图1.3所示。用波长为λ的单色光垂直入射到两平面样板结合处，设α为两平面间的楔角，x为给定点楔的厚度，则两反射光线的光程差为$2x$，其中一束光从

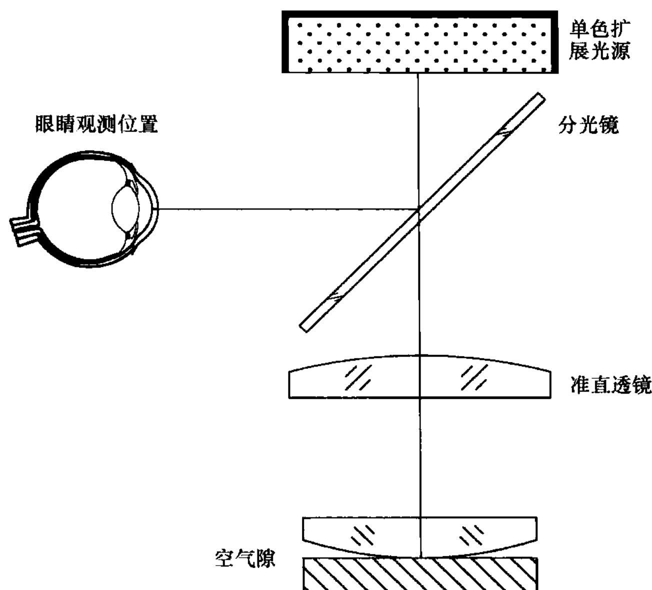


图 1.2 观察牛顿条纹的简单装置（利用该装置可测量长焦球面半径）

内表面反射回来，另一束光由外表面反射。由于下层表面的反射使入射光发生位相 π 的变化，因此当两表面光程差为波长整数倍时，由于相位变化将会产生暗条纹，可以很容易推出 x 为零时为暗条纹。

因此暗条纹可用式（1.1）表示

$$2\alpha x = n\lambda \tag{1.1}$$

其中，n 为整数，而亮条纹则可表示为

$$2\alpha x + \frac{\lambda}{2} = n\lambda \tag{1.2}$$

式（1.1）和式（1.2）表示等距直条纹系统，两个相邻亮条纹或暗条纹的间距 d 等于

$$d = \frac{\lambda}{2\alpha} \tag{1.3}$$

因此，当两个完美的平面样板接触在一起构成一个小的空气楔，并用单色光照明时，就会观测到如图 1.3 所示的干涉条纹。

现在假设一个表面为光学平面、另一个不是光学平面，则所产生的牛顿环是什么形状呢？在实际当中会发生很多情况。当我们开始制作一个平面时，最初并不清楚是否为平面，制作结果有可能变成大曲率半径的球面，这就需要用一个基准面不时地检验加工表面，了解其平面度偏差。现在研究一个大曲率半径 R 的球面与平面样板接触时出现的情况。

球面的弛垂度为 $x^2/2R$，其中 x 是从对称中心起测量的距离。光程差可由 $x^2/2R + \lambda/2$ 求得，因此暗条纹的位置可表示为

$$\frac{x^2}{R} = n\lambda \tag{1.4}$$

因此，从中心到第 n 个暗条纹与中心的距离为

$$x_n = \sqrt{nR\lambda} \tag{1.5}$$

从式（1.5）可以很容易看出第 $n+1$ 个条纹和第 n 个条纹之间的距离为

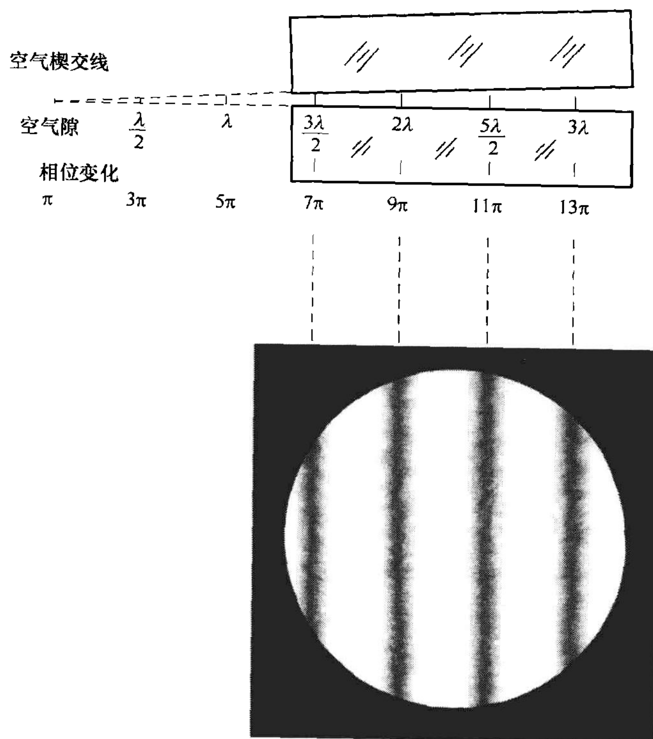


图 1.3 当两表面存在楔形空气隙时产生等距直条纹原理，条纹与两平面交线平行

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{R\lambda}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \tag{1.6}$$

同样第 $n+2$ 个条纹与第 $n+1$ 个条纹间距为

$$x_{n+2}-x_{n+1}=\sqrt{R\lambda}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}) \tag{1.7}$$

由式（1.6）和式（1.7）得到

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+2}-x_{n-1}}\approx 1+\frac{1}{2n} \tag{1.8}$$

由此可见，在观察 n 值大的条纹时，这些条纹间距几乎是相等的。所以在检验表面弯曲状况时，最好观察较低序数 n 的条纹的方法去调节平面样板。图 1.4 所示为在 $x^2/2R$ 的最大值是 2λ 时出现的牛顿环，这时将出现四个圆环形条纹。如果 $x^2/2R$ 的最大值为 $\lambda/2$，仅可获得一个圆条纹。因此，根据看到的一些所有的圆条纹，能够测定表面平面度最大误差为 $\lambda/2$，如果最大误差小于 $\lambda/2$，则需要采用其他方法。适当地控制两个光学零件，使圆环形条纹的对称中心向边缘移动，因而在两个相接触表面的孔径上得到较大 n 值的干涉条纹。这些条纹是圆弧形的，并且条纹间距几乎相等而又不完全相等。例如，在最大值 $x^2/2R=\lambda/4$ 和 $x^2/2R=\lambda/8$ 的情况就是如此。图 1.5 和图 1.6 分别表示这两种情况下产生的干涉条纹。由此可推断，随着 R 值增大，条纹越来越直。

在光学零件加工过程中，还需要了解被检表面相对于基准平面样板是凹面还是凸面。有几种简单的判别方法：一种方法是用木棍或铅笔轻轻地在位于上方平面样板的边缘位置上施加压力。如果被检表面是凸面，条纹中心就移向加压点；如果被检表面是凹面，则条纹中心移离加压点，如图 1.7a 所示。第二种很简单的方法是在上面一块平面样板的环形条纹中心

处施加压力，如图 1.7b 所示。如果是凸面，则条纹中心不移动，但圆环形条纹直径增大。

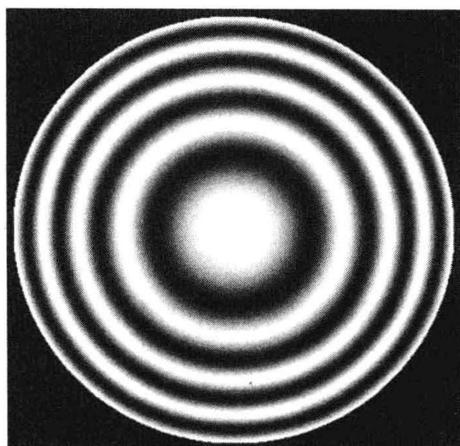


图 1.4 大曲率半径球面与完善的平面板接触时出现的牛顿环形状（这是与平面样板偏差最大值为 2λ 的情况）

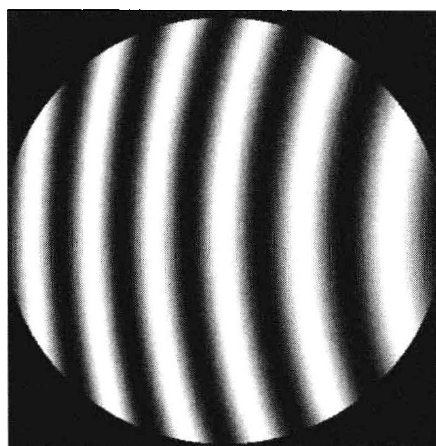


图 1.5 大曲率半径表面与完善的样板接触时产生牛顿环的形状（这是与平面样板最大值为 λ/4 的情况，条纹的对称中心在这两表面孔径的外面，因此只能看到圆弧形条纹）

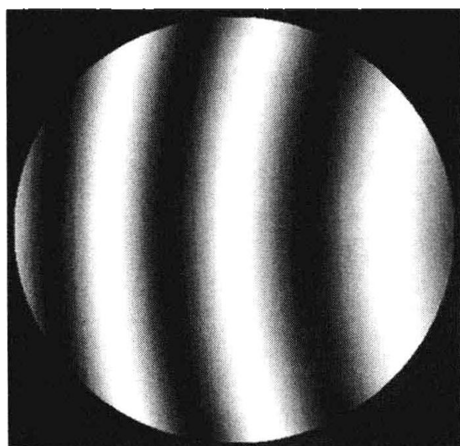


图 1.6 大曲率半径表面与完善的样板接触时产生牛顿环的形状（这是与平面样板最大值为 λ/8 而引入了部分倾斜的情况）

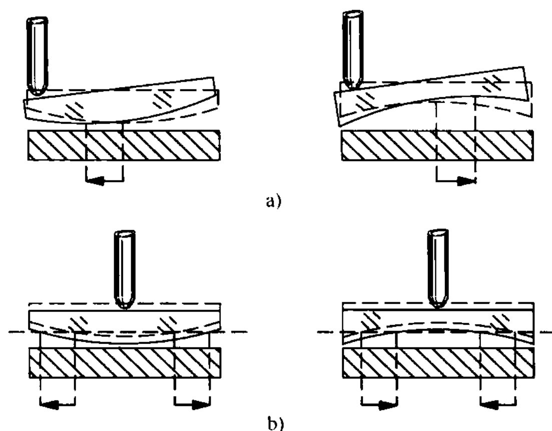


图 1.7 判定被检表面相对基准面是凸面还是凹面的两种方法

a）靠近边缘施加压力，圆环中心移动 b）靠近中心位置施加压力，圆环扩散或收缩

还有一种确定表面是凸面还是凹面的方法是使用白光光源。如果在表面中心稍加压力，那么当表面是凸面时，空气隙几乎变为零，所以在这点上的条纹是暗条纹，同时第一个亮条纹几乎是无色的或是白色的。其后亮条纹的内侧为蓝色，外侧为红色。反之，如果被检表面是凹面，那么两表面接触不是点接触，而是沿圆环接触，并且沿这个圆环的空气隙厚度接近零，沿着接触圆环出现的是暗条纹。和前述情况相同，自暗条纹开始，顺序出现彩色条纹。图 1.8 和图 1.9 所示就是这样的情况。除非两个表面很洁净，否则很难使用这种检测方法，一般情况下不提倡使用。

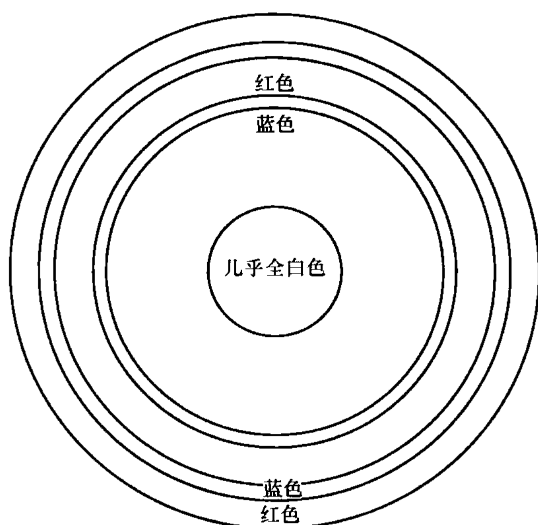


图 1.8　凸面接触（用白光照明时出现彩色条纹，中心施压）

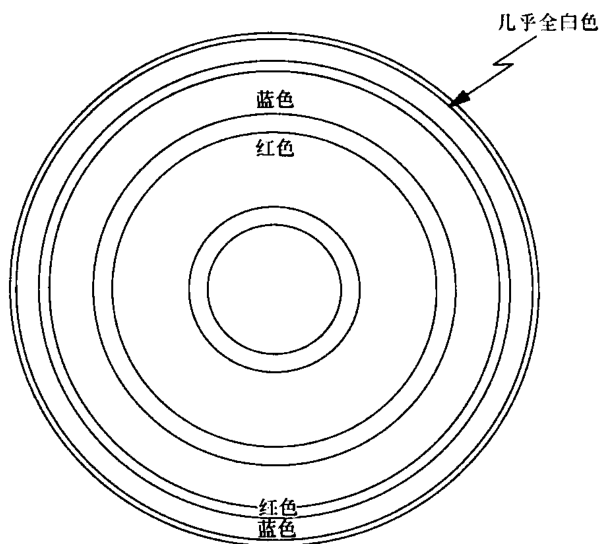


图 1.9　凹面接触（用白光照明时出现彩色条纹，中心施压）

第四种比较简单的方法是根据观察者眼睛从垂直位置移到斜视位置时条纹图样发生移动的情况进行判断的。在说明这种方法之前，有必要找出一个能够表示空气隙厚度为 t 和入射角为 θ 时两束反射光线之间光程差的简单表达式。这种情况如图 1.10 所示，从图中可以看出

$$OPD = \frac{2t}{\cos\theta} - 2t\ \tan\theta\sin\theta = 2t\cos\theta \tag{1.9}$$

因此，在垂直入射时光程差（OPD）为 $2t$，总会大于相同的空气隙厚度 t 而以角 θ 入射时的光程差。根据这个事实，在观察两个表面之间存在凸面接触时发生的现象，在离开接触点时，空气隙增大，斜向观察条纹时，在一个特定点上光程差是减小的，因此当眼睛从垂直位置移到斜视位置时，出现条纹移离中心的现象。凹面与平面接触时，则出现相反的现象。

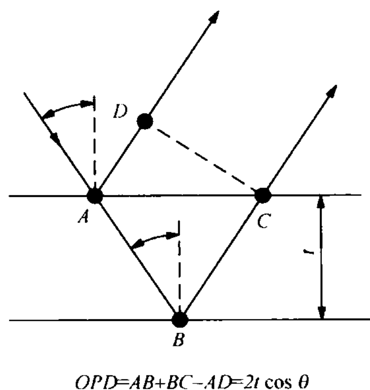


图 1.10　空气隙厚度为 t 和入射角为 θ 时，两反射光束之间光程差计算光路简图

还可以考虑其他表面既不是平面也不是球面的情况。表 1.1 所示为以标准平面为基准的各种表面的牛顿干涉条纹形状。表中的基准面是一个平面，与该平面接触的近似平面是正在加工的被检面。使用同样的方法能检测大曲率半径的球面或柱面。但是，当被检面曲率半径很小时，就必须采用特殊照明方式，关于这一点将在有关菲佐干涉仪的 1.3 节中讨论。

1.2.1　光源尺寸的考虑

由式（1.9）可看出，光程差依赖于反射光线观测的角度，当 θ 值很小时，光程差近似为

$$OPD = 2t\cos\theta \approx 2t - t\theta^2 \tag{1.10}$$

表 1.1 以标准平面为基准的各种表面的牛顿干涉条纹形状

编号	表面类型	牛顿干涉条纹形状	
		无倾斜	倾斜
1	平面		
2	近似平面		
3	球面		
4	锥形		
5	柱面		
6	象散的（相同符号的曲率）		
7	象散的（相反符号的曲率）		
8	极不规则		

在牛顿干涉仪中，我们对 t 的变化感兴趣，因此要尽量减小 θ 的影响，就应使

$$t\theta^2 \leqslant \frac{\lambda}{k} \tag{1.11}$$

其中，λ/k 为 θ 变化时的最大误差，通常为了获得相对小的误差，至少要求

$$t\theta^2 \leqslant \frac{\lambda}{4} \tag{1.12}$$

因此，为了保证误差足够小，t 和 θ 也应该足够小。至于 t 应保证缝隙之间距离不超过几个波长，表面清洁，t 不应超过 6λ。根据 t 的最大值，对 θ 要求为：$\theta^2 \leqslant 1/24$ 或 $\theta \leqslant 0.2$。例如，可以用 $\lambda/20$ 定位评价光学平面的最佳精确度。于是可以设

$$t\theta^2 \leqslant \frac{\lambda}{20} \text{或} \ 2\theta \leqslant 0.2 \qquad (1.13)$$

从以上分析可以看出，两个相接触的平面上的照明角不应超过0.2rad或大约12°。

如果观测角比该值小，则光源可以扩展到无穷大，仅需要观测和拍摄者最小距离是近似垂直于平面且大约为相接触的平面样板直径的五倍。为了获得更高精度，应增大观测距离。或者用自准直透镜，并且将眼睛或相机置于准直镜的焦点处观测。

如果观测距离不够大，将观测不到等厚条纹，而会出现局部条纹。这些条纹称为局部条纹，因为它们看起来像是在空气隙的上方或下方。条纹出现在由相应光线相交在一起的两虚像位置。该现象可以由范西特-泽尼克（van Cittert-Zernike）定理得到证明（Wyant，1978；Simon and Comatri，1987；Hariharan and Steel，1989）。

1.2.2 几种合适的光源

装备一台牛顿干涉仪需要一个合适的单色光源，有几种比较简单的光源可供使用。一种是钠灯，用钠灯作为光源不需要滤光片；另外一种光源是封装在不透射紫外光玻璃外壳里的低压汞灯；第三种光源是锯齿形电极放电管形式的氦灯，使用氦灯作光源时要用一块毛玻璃形成光漫反射。表1.2所示为适合作为牛顿干涉仪光源的各种灯的特征波长。甚至在普通荧光灯前放置塑料或绿色玻璃滤波器也可作为光源，只是条纹清晰度不高。

表1.2 适合作为牛顿干涉仪光源的各种灯的特征波长

序号	灯的类型	常用波长/nm	备注
1	钠灯	589.3	这个波长是589.0nm和589.6nm两个波长平均值，灯预热时间约10min
2	低压汞灯	546.3	由于还存在其他波长，必须用绿色滤光片滤掉546.1nm以外的波长，来观察干涉条纹。无预热时间，可以使用不涂荧光层的荧光灯
3	低压氦灯	587.6	由于还存在其他波长，必须用黄色滤光片来观察干涉条纹，无预热时间
4	铊灯	535.0	特点与钠灯相似，预热时间约10min
5	镉灯	643.8	需要用红色滤光片观察干涉条纹，预热时间约为10min

1.2.3 制作平面样板的材料

平面样板一般是用玻璃、融石英或是CerVit和ULE玻璃这两种最近研制成功的零膨胀系数材料制作的。直径小于5cm的小口径平面样板可以用玻璃制作，通过某些处理后，它们可以很快地达到均匀温度状态。制作大口径平面样板最好使用融石英或零膨胀系数材料。表1.3所示为制作平面样板的材料及其性能。

当制造参考平面时，不仅要考虑材料还需要考虑重量、大小、测试方法及其他重要参数（Primak，1984、1989a、1989b；Schulz and Schwider，1987）。

表 1.3 制作平面样板的材料及其性能

序 号	材 料	线膨胀系数	备 注
1	BK7，BSC	$(75\sim80)\times10^{-7}$	两种材料为硼硅酸盐，可以达到高均匀度
2	派勒克斯玻璃	$(25\sim30)\times10^{-7}$	这也是一种硼硅酸盐，但氧化硅含量较高，有些制造厂也生产同类型玻璃，但牌号不同，这是制造一般质量平面样板和检验板的好材料
3	融石英或晶体石英	6×10^{-7}	是通常制造平面样板的最好材料，根据均匀性程度，可使用不同等级材料
4	CerVit，Zerodur	$(0\sim1)\times10^{-7}$	不同制造厂不同牌号的这种材料及其他类似材料，在一般环境温度下，实际上是零膨胀系数
5	ULE 融氧化硅	$(0\sim1)\times10^{-7}$	这是一种掺杂大约 7% 钛的氧化硅

1.2.4 估计最大误差的简单方法

一般来说，光学表面的精度范围最大误差是从下限 2λ 到上限 $\lambda/100$。利用牛顿干涉仪，仅用肉眼就能估算出大约 $\lambda/10$ 的最大误差，超出这个限度，可拍摄干涉条纹照片，在条纹照片上进行测量。图 1.11 是在牛顿干涉仪上观测到的典型干涉图，这时最大误差比 $\lambda/4$ 小的多，因此稍微倾斜上层平面就能获得几乎是直的条纹。根据一条参考直线如图 1.2 所示的牛顿干涉仪的基准线栅格，来观察贯穿视场中心的径向条纹。使用这种直线栅格就可以估算出条纹的直线偏差，也可以估算出条纹间距。光程差为 $2t$，则相邻两条纹间距为 t，相位偏差为 $\lambda/2$。设 d 为条纹间距，最大直线偏差为 d/k，最大误差为

$$Peak\ error = \frac{k}{d}\ \frac{\lambda}{2} \tag{1.14}$$

在图 1.11 中，$k=2.5\text{mm}$，$d=25\text{mm}$，因此最大误差为 $\lambda/2$。即使在这种情况下，如果希望知道表面是凸面还是凹面，还可以用前面讲过的方法检验。唯一的差别是应该假设条纹组中心位于两个接触平面的孔径之外。

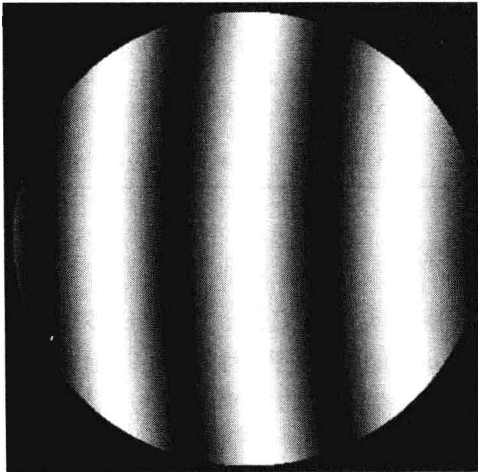


图 1.11 在牛顿干涉仪上观测到的典型干涉图

1.2.5　球面的测量

牛顿干涉仪最普遍的应用之一大概是检验正在抛光过程中的小口径透镜表面。首先，制作一块曲率半径相反并具有所要求精度的小口径检验样板，然后把这块样板放在被检面上。检验样板不仅可以检出表面的不规则性，而且还可以检验曲率半径与要求值之间的偏差（Karow 1979）。

在进行观察时，应使光几乎垂直入射到干涉表面上，用图1.12a中所示的检验样板检验凸面时，上表面的曲率半径 r 为

$$r=\frac{(N-1)(R+T)L}{NL+R+T} \tag{1.15}$$

其中，N 是检验样板玻璃的折射率。检验凹面可以用图1.12b所示的方法，上面的曲率半径 r 为

$$r=\frac{(N-1)(R-T)L}{NL-R+T} \tag{1.16}$$

重要的是应该记住条纹的定域位置非常靠近干涉表面，因此观察者的眼睛应该调焦到这个面上。

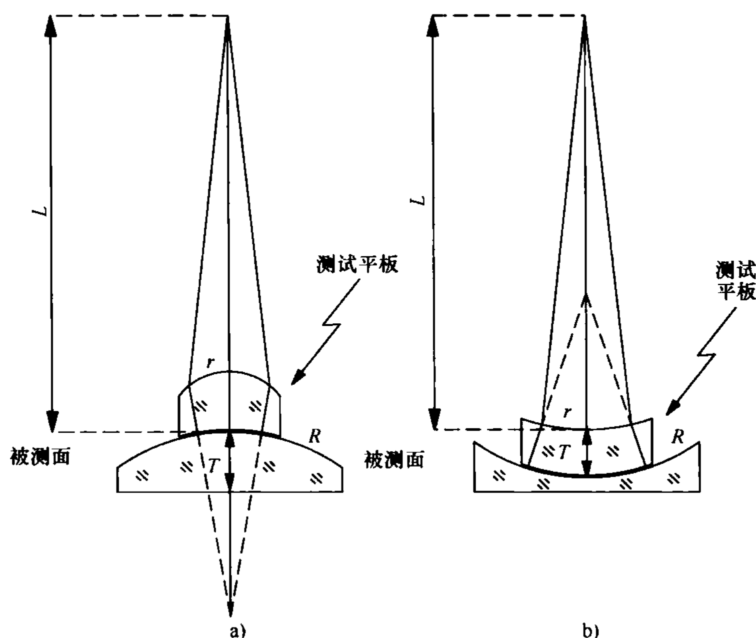


图1.12　测试平板与测试球面的牛顿环条纹

a）检验凸面　b）检验凹面

被检表面的曲率半径是用计数圆条纹数目的方法检验的，借助图1.13可以推导出曲率半径偏差与条纹数目的关系。从图1.13中可以看出，垂直于其中一个表面测量的两个表面之间的距离 ε 为

$$\varepsilon=(r+\Delta r)\left\{1-\left[\frac{2(1-\cos\theta)r\Delta r}{(r+\Delta r)^2}\right]^{1/2}\right\} \tag{1.17}$$

如果 Δr 或角 θ 较小，那么以上 ε 值可以用式（1.18）相当精确地表示

$$\varepsilon = (1-\cos\theta)\Delta r \qquad (1.18)$$

由于条纹数 n 是从 $n=2\varepsilon/\lambda$ 求得的，所以式(1.18)也可写为

$$\frac{n}{\Delta r}=\frac{2(1-\cos\theta)}{\lambda} \qquad (1.19)$$

设 D 为表面直径，则角 θ 定义为 $\sin\theta = D/2r$。因此，可以确定每个条纹的曲率半径增量与表面比率 r/D 关系，如表 1.4 所示。

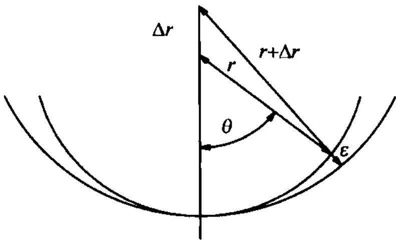


图 1.13 具有不同去半径的两个球面之间间隔的几何图形（该间隔是沿其中一个半径测量的）

表 1.4 用牛顿环检验球面时，比率 r/D 的一些倍数所对应的每个条纹曲率半径增量

r/D	$\Delta r/n$ /cm
1.0	0.00020
2.0	0.00086
3.0	0.00195
4.0	0.00348
5.0	0.00545
6.0	0.00785
7.0	0.01069
8.0	0.01397
9.0	0.01768
10.0	0.02183
20.0	0.08736
30.0	0.19661
40.0	0.34970
50.0	0.54666
60.0	0.78712
70.0	1.07033
80.0	1.39665
90.0	1.77559
100.0	2.18144

1.2.6 非球面的测量

马拉卡拉和科尼约（Malacara and Cornejo，1970）利用牛顿环方法判定了一个与球面有明显偏差的非球面轮廓。如果非球面与最接近的球面的偏差只有十几个波长（即 $10\lambda\sim20\lambda$），那么牛顿环的方法很有用。具体做法是用一个球面检验样板与非球面接触，并用测量显微镜找出条纹的位置。然后从这些条纹位置的值能够求出与距离有关的实际空气隙厚度，还能够绘出图形，并与所要求的非球面图形比较。图 1.14 是这种方法所用的典型装置简图。

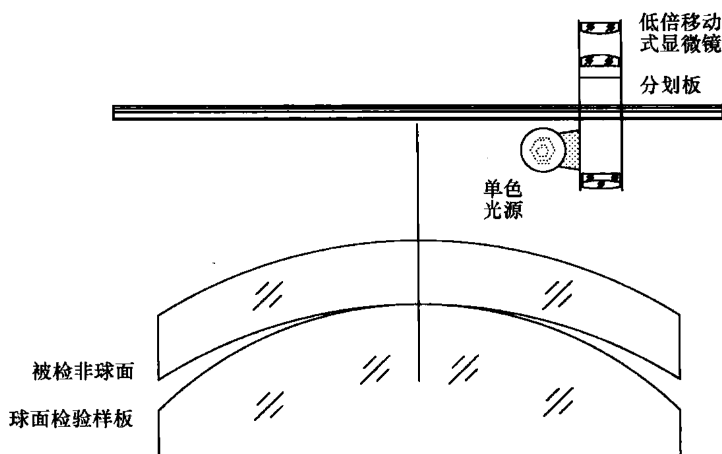


图 1.14　根据牛顿环用非球面检验样板测量非球面的典型装置简图

重要的是要考虑到被检表面可能没有旋转对称性，因此必须沿几个径向进行测量，以获得有关表面的完整信息。可用拍摄条纹照片的方法代替用显微镜直接测量条纹的位置，然后用普通的方法测量条纹的位置。

如果基准面是球面，被检面是非球面（双曲面或抛物面），那么从检验球差的泰曼-格林（Twyman-Green）干涉仪上得到的干涉图样就是理想的条纹图样（见第2章内容）。

基准面也可以是另外一个与被检面的理想形状完全匹配的非球面。这种方法对于制作凸非球面很有用，因为凸非球面的制作和检验要比凹非球面的制作和检验更复杂。这种方法的优点是零补偿检验。其缺点是两个表面共轴调整要求非常苛刻，因为两个面都有严格限定的轴，在检验过程中必须使这两轴重合。但这问题并不难解决，只要有一些实际操作经验和一些能够精细调节的设备就可以进行共轴调整。

当要求十分准确地识别干涉图时，应记住光程差是垂直于表面计量的，而表面矢高 z 是沿光轴求出的（见附录）。因此，光程差由 $2(z_1-z_2)\cos\theta$ 得出，其中 $\sin\theta=Sc$。

1.2.7　不透明表面平面度测量

有时候要把光学平面制作在金属基底上，例如制作在钢、黄铜或纯铜等材料上。在检验这些光学表面时，应把玻璃平面样板放在这些被检面上来观察牛顿环。但被检金属物体常常不是平行板，而且被检表面还可能处在其他不规则的零件上。因此，检验这个表面时，如果能把被检物体放在平面样板上，并通过平面样板的下部观察干涉条纹，就可以不必固定被检物体，图1.15是这种检验装置简图。由于与玻璃相比，大多数金属面的反射率相当高，所以干涉条纹对比度并不很好。为了改善检验效果，可以把平面样板镀一层薄薄的铬膜或铟康镍合金膜，使其反射率为30%～40%。用这种方法就会产生对比度较高而又容易观察的干涉条纹。

还应该指出，如果被检物体很重，就会压弯平面样板，而降低检验精度。所以这种检验装置只适合检验体积小、质量轻的不透明物体。检验较重的物体表面时，最好把平面样板放在被检物体的上面。

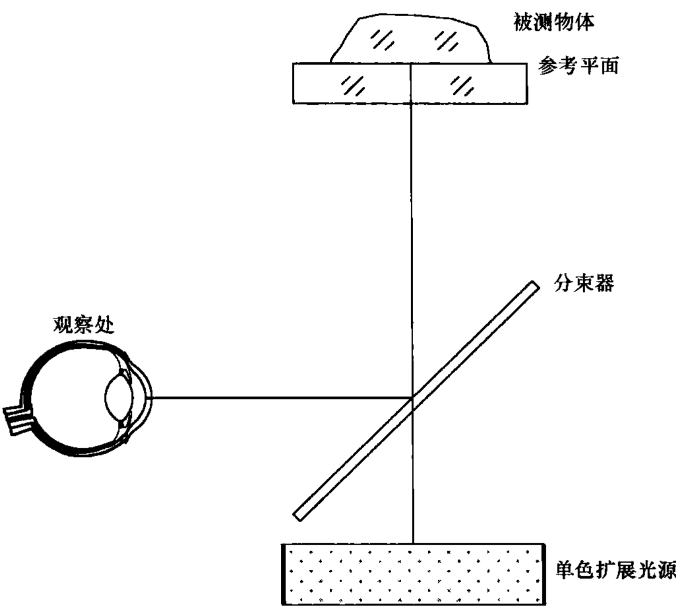


图1.15 把不规则物体上的不透明被检平面放置在平面样板上的检验装置简图

1.3 菲佐干涉仪

牛顿干涉仪中空气隙的厚度非常小，只有几分之一波长。有时候能够很方便地获得和牛顿干涉仪相似的条纹，但空气隙要大得多。当空隙比较大时，就不必像前面使用牛顿干涉仪那样把两个表面弄得非常清洁。由于空气隙较大，用于准直的光源光强要更强。这就是菲佐干涉仪。

菲佐干涉仪是目前测量光学元件最流行的仪器。它的一些主要应用将在本章讲述，但它用于检验光学元件的基本结构及与泰曼-格林干涉仪的不同将在第2章会提到，读者可以在第2章获得更多细节。

1.3.1 基本的菲佐干涉仪

从上面可以看出，菲佐干涉仪应该有一个自准直系统和较小的光源，图1.16所示为用透镜准直光束的菲佐干涉仪简图。作为基准的平面，样板通常与透镜一起放置，使基准面反射的针孔像回到针孔上，或者把平面样板的背面镀上增透膜，或者（更常用）把基准平面样板做成楔形（大约10~20弧分），这样就可以隔离平板背面产生的反射。为了观察干涉条纹，可以在靠近针孔的位置上放置一分光镜。把被检表面放在基准平面下方，并且尽量把空气隙的厚度调节到最小值。当其楔角很大时，在图1.16中平面P㊀的位置能看到由两个面形成的两个针孔像。用一个测微螺旋使被检平面倾斜，就可以观察到针孔像的移动。当这个针孔像与基准面的针孔像重合时，停止旋转测微螺旋，然后在平面P的位置上就可观察定域在空气隙上的干涉条纹，这些条纹由于空气隙厚度不同而产生的。观察条纹时，进一步调

㊀ 在原书图1.16中没有标明平面P的位置，实际应为从干涉图平面所在的位置。——译者注

节测微螺旋就可以改变条纹的数量和方向，识别这些条纹的方法和识别牛顿干涉仪和泰曼-格林干涉仪方法相同。

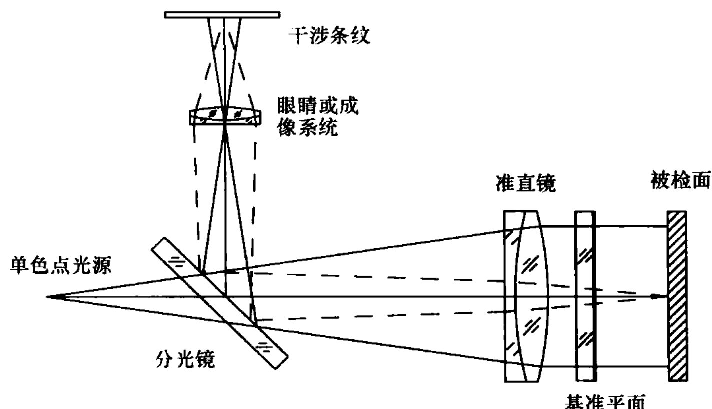


图 1.16　用透镜准直光束的菲佐干涉仪简图

图 1.17 是采用凹面镜自准直入射光束的菲佐干涉仪简图。如果选择长焦距镜代替凹面镜，则可以使用球面镜；在焦距较短的情况下，则可以使用离轴抛物面镜。图 1.16 和图 1.17 中两种结构都可以垂直（向上或向下）或水平放置。在垂直情况下，平面样板是水平放置的；而在水平情况下，平面样板靠本身的边缘支撑。

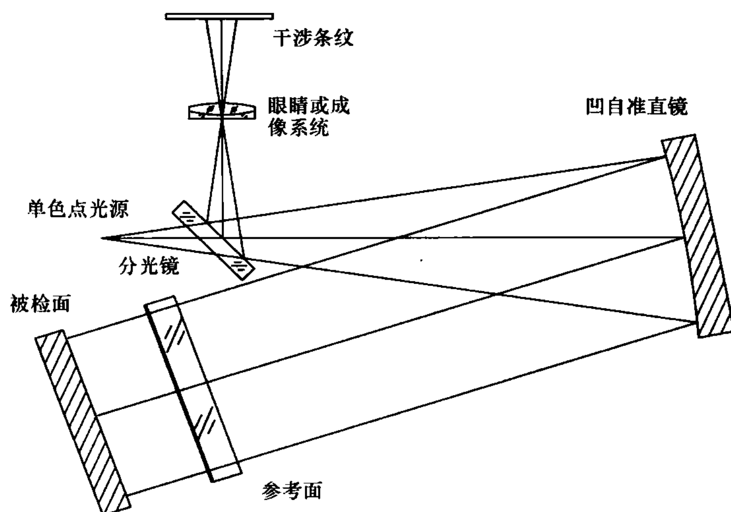


图 1.17　采用凹面镜自准直入射光束的菲佐干涉仪简图

如果被检光学系统或元件具有高反射率，且标准平面没有镀膜，那么两束干涉光线具有不同强度，干涉条纹的对比度会很差。相反如果标准平面镀有很高反射率的膜（略小于100%）让部分光传递过去，由于多光束反射，将会看到混乱的条纹系统。通常为了有效获得两光束的干涉条纹，参考面禁止镀膜。为了匹配强度，被检光学元件的反射率也要低或被检光束振幅要较小。实际上，在使用激光作为光源时，由于产生的两个干涉光束的表面反射率低，采取一些必要措施防止其他表面光线反射很重要。

1.3.2 光源相干性要求

与牛顿干涉仪一样，菲佐干涉仪对光源的最大孔径角也有要求，它取决于空气隙的厚度。例如，假设空气隙厚度为5mm，波长 $\lambda = 5 \times 10^{-4}$mm，由式（1.12）可得到所允许的角度 2θ 为0.01rad。如此小的角度可通过将观察入瞳放置在准直镜的焦点处，观察被测面上所有点均与空气隙垂直的角度来获得。观察孔径或光源必须非常小，通常眼睛孔径比的要求要大，因此光源采用针孔。空气隙厚度越大，针孔必须越小。

当用菲佐干涉仪检测平面时，空气隙厚度可根据要求做得足够小。整个光程差应不超过几毫米，因此加绿色滤光片的低压汞灯可作为光源。当测量较厚的玻璃零件楔角时，光程差较大。对气体或金属蒸汽灯来说，这个光程差是能够使用的最大值。对于厚度较大的零件，由于这种灯不能发射非常狭窄的光谱线，使条纹的对比度严重下降。在用一块检验板检验厚玻璃壳体或检验球面时也会出现同样的情况。

但是如果使用单色性非常好的光源时，这种限制就可以忽略。幸运的是激光光源有可供利用的。在我们所讲述的这些应用中，理想的光源是以 TEM00 模工作，发射波长为632.8nm 的低功率（2mW）氦氖激光器。用这种激光器作光源时，光程差至少达到2m，并且能够得到高对比度的菲佐干涉仪。如果选用适当稳频的激光器，并对仪器采取隔振措施，还能够获得更大的使用光程差。

菲佐干涉仪光源一致性要求大部分与泰曼-格林干涉仪相似，可参见2.3节的内容。气体激光器具有完美的空间相关性，并且具有几乎完美的时间相干性，因此我们会认为它是作为干涉仪的理想光源，但实际上并不总是这样。这是因为从光学系统的其他面反射回来很多不需要的反射光线会产生伪条纹，而且由于光学元件上的小灰尘或划痕会影响激光，还会产生杂散光。为了解决这个问题可以使用扩展光源，甚至可以在点光源前加一个旋转的薄型半毛玻璃。德克（Deck et al.，2000）提出了环形光源，采用衍射单元产生锥形光照亮旋转的毛玻璃。像艾和怀扬特（Ai and Wyant，1988、1993）及诺瓦克和怀扬特（Novak and Wyant，1997）等很多学者对伪反射的影响做了研究。

还有一种需要考虑的影响是一些被检光学元件或系统可能为后向反射器，例如一维三角棱镜或二维直角棱镜。后向反射系统会使光反转或者两个方向都有（相当于180°旋转）。其中一个观点是干涉发生在波前的两个不同点，当波前发生旋转时与光轴对称，或者与反转的光轴对称。只有波前空间相关性足够高，条纹才有好的对比度，这对点光源提出了更高的要求。

另一种解释后向反射的影响。如图1.18所示，假设光源上有很小的针孔且从针孔边缘出来的准直入射平面波前的小倾斜角度为 θ。可以很容易看到两干涉波前彼此不平行，它们之间夹角为 2θ。从针孔里不同点有无数个波前，它们都有不同方位和角度，其角度小于 θ。这些具有不同角度的波前会降低条纹对比度。所有波前都在中心相交的条纹对比度最大，向孔径边缘方向对比度逐渐下降。泰曼-格林干涉仪的这一现象也是由同一原因引起的，在第2章有更多内容介绍这一原因。

对空间相干性的高要求，使得气体或金属蒸汽灯很难满足作为检测后向反射系统的光源，而气体激光器却能很好地胜任。

1.3.3 准直透镜质量要求

现在简单介绍菲佐干涉仪对准直透镜的质量要求，通常关心的是判定空气隙厚度的变

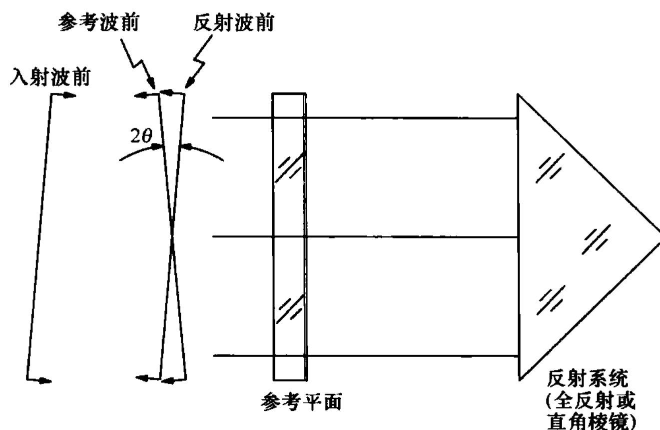


图1.18　参考波前和被检全反射棱镜反射光波前之间的干涉（两波前均来自于小光源边缘同一点，它们之间的夹角会降低条纹的对比度）

化。但是光程差不仅是空气隙厚度的函数，也是光照射角的函数，在特定点上的光程差为 $2t\cos\theta$，被检平面缺陷使空气隙厚度 t 发生变化，而 θ 则随光源尺寸和准直透镜的像差发生变化。

对使用一般光源的菲佐干涉仪来说，最大有效空气隙厚度为50mm，而且还必须考虑光源尺寸和透镜的像差。光源尺寸主要影响菲佐条纹的可见度。要得到对比度很好的菲佐条纹，剩余光程差 $t\theta^2$ 应小于 $\lambda/4$，并且选择针孔也要满足这个条件。针孔对整个菲佐条纹区域内的影响是均匀相同的，而准直透镜的像差对条纹区域的影响却不一致，所以，必须要考虑透镜的角像差及其影响。如果透镜的最大角像差为 ϕ，那么 $t\phi^2$ 应小于 $k\lambda$，其中 k 是小数，其值取决于仪器要求的精度。因此设 $k=0.001$，那么 $t\phi^2$ 为 0.001λ。对一般光源，取 $t=50\text{mm}$ 的最大值，则

$$\phi^2 \leqslant \frac{0.001\lambda}{t} \approx 10^{-8} \text{或} \ \phi = 10^{-4}\text{rad} \tag{1.20}$$

这个角像差相当大，在20″量级范围，因此可以设计合适的透镜或反射系统来满足。(Taylor，1957；Yoder，1957；Murty and Shukla，1970)。

1.3.4　液体基准面

众所周知，液体表面可以作为基准样板，液体表面具有与地球相等的曲率半径。如果地球半径取6400km，则液体表面的垂直度为（Grigor'ev et al.，1986；Ketelsen and Anderson，1988)

$$\frac{y^2}{2R} = \frac{y^2}{2\times 6.4\times 10^{-9}}(\text{mm}) \tag{1.21}$$

其中，$2R$ 是所考虑的液体表面直径，如果规定式（1.21）不得超过 $\lambda/100$（$\lambda = 5\times 10^{-4}\text{mm}$)，那么

$$y^2 \leqslant 6.4\times 10^4 \ \text{或} \ 2y \leqslant 512\text{mm} \tag{1.22}$$

因此，与理想样板相比，一个直径约为0.5m的液体表面的最大误差仅有 $\lambda/100$。所以把液体表面作为基准样板是个非常吸引人的想法。但在实际上存在许多问题，其中主要的是消除振动的干扰。另外，还必须把靠近器皿四壁的液体部分划在可用范围之外，并且还要保

证液体表面不落上尘埃。作为这种用途的液体应该是清洁的、有粘性的。可以使用的液体有甘油、某些矿物油和漂白蓖麻油。因为水的粘度低，所以不适用；水银的反射率太高也不合适，使用水银会使两束干涉光的强度相差悬殊，除非被检光学面也镀高反射膜。但是在某些测量和天文仪器上，已经用水银作为校准的水平基准反射平面。

1.3.5 激光作为光源的菲佐干涉仪

现在介绍输出功率为2mW、波长为632.8nm的单模氦氖气体激光器作为光源的菲佐干涉仪。图1.19是这种仪器的简图，这种干涉仪用一个经过良好的校正的物镜准直从针孔发出的光，这个针孔是用激光器和显微物镜组成的系统照明。在准直物镜与针孔（空间滤波器）之间放置一个分光镜，以便从侧面观察干涉条纹。此外，还希望有一块投影屏把菲佐条纹投影在屏上，这样就可以避免像使用普通光源那样直接观察条纹。与其他光源相比，激光具有辐射强度大的特征，因此在某些情况下直接观察激光会损伤眼睛。基准平面调整好后固定，因此针孔的反射像可自动准直，调节被检面，直到它反射的像与针孔重合为止。为了便于初步调节，把两个反射平面产生的两个针孔像投影到一个屏上，这可以通过移去分光镜与毛玻璃屏之间的负透镜来实现。基准面的针孔像位于屏中心，而被检面的针孔像在屏上的某个地方，调节被检面就能使屏上的两个光斑重合。再把负透镜插回到光路中，这时菲佐条纹就投射到屏上。还可以按照要求的方向和数量进一步调节这些条纹。用另一个分光镜分出部分光到照相机上，拍摄条纹图样的照片。整个仪器需要安装在一个合适的防振台上。

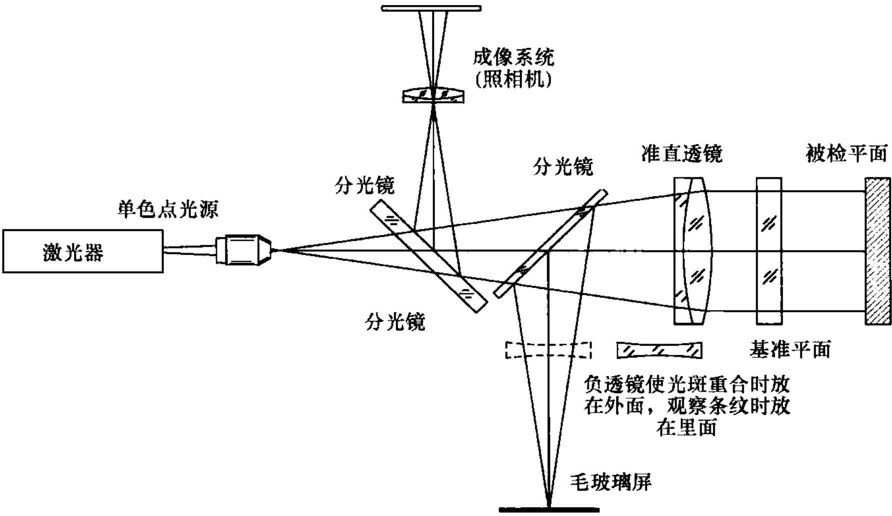


图1.19 用激光作为光源的菲佐干涉仪简图（该装置用于检测平面，系统通过移动的负透镜可以很好地调节）

商用干涉仪投入使用已经有很多年了，其中最著名的两家为Zygo干涉仪（Forman，1979），和Wyko干涉仪，分别如图1.20和图1.21所示。

1.3.6 多光束菲佐干涉仪

如果要得到锐度非常好的多光束而不是双光束条纹，可以把基准平面样板和被检平面样板镀以反射率约为80%～90%的反射膜，例如镀铝膜或银膜（详见第6章）。如果需要有较

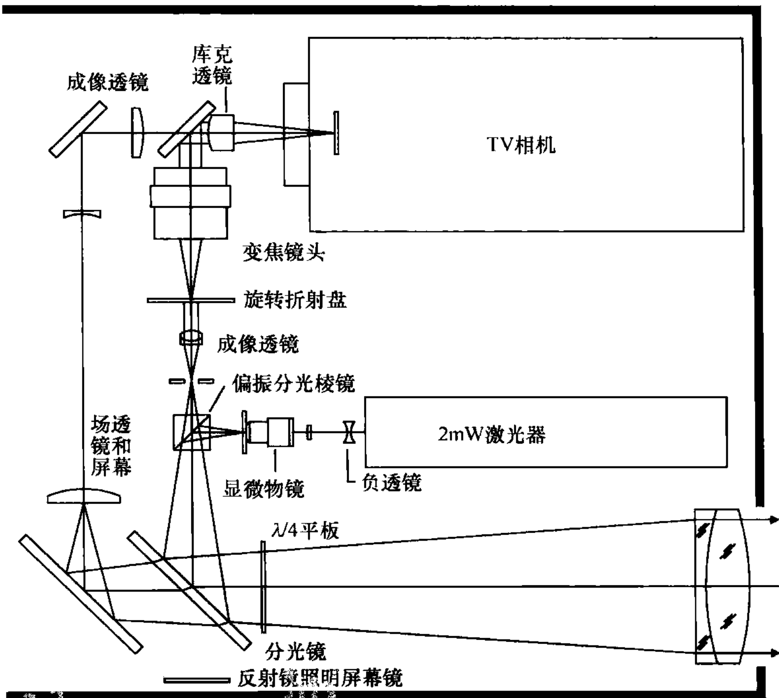


图 1.20 Zygo公司制造的菲佐干涉仪（图片由Zygo公司授权）

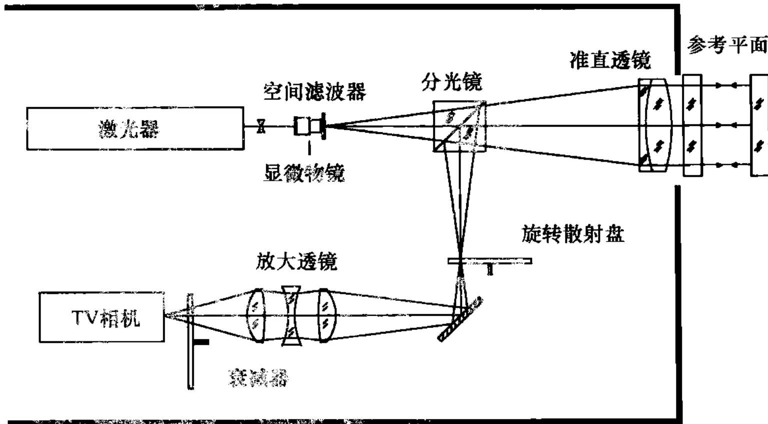


图 1.21 Wyko公司制造的菲佐干涉仪（图片由Wyko公司授权）

高的反射率，可以采用镀多层介质膜的方法。实际上，给仪器配备几块镀有不同反射率膜层的基准平面样板即可。

1.3.7 近似平行板的测量

在一些应用中，玻璃板的平面度和平行度都有要求，在这种情况，平板的小楔角可以由菲佐干涉仪来确定，并且此时干涉仪不需要基准平面，因为条纹会在两个被测表面之间形成。如果 α 为楔角大小，N 为玻璃的折射率，那么由前表面和后表面反射的波前角度为 $2N\alpha$，条纹可由式（1.23）表示

$$2N\alpha = \frac{\lambda}{d} \tag{1.23}$$

其中，d 为两相邻暗条纹或亮条纹间距，则角度可由式（1.24）给出

$$\alpha = \frac{\lambda}{2nd} \tag{1.24}$$

为了确定楔角薄的一边，简单办法是用热棒甚至手指接触平板表面。由于微小的局部膨胀，平板厚度也增加，因此该区域的直条纹向薄的一方增加，如图1.22所示。例如，如果 $N=1.5$，$\lambda=5\times10^{-4}$mm 和 $\alpha=5\times10^{-6}$（″），可得到 d 为33mm。因此厚度为33mm的平板上出现一个条纹时，平板楔角为1″。如果平板有些面形误差，会得到弯曲的条纹，表明面形误差和楔角误差。即使该表面被单独测量且验证为平面，在这种情况下也可能会得到弯曲条纹，这是由于平板内部折射率不均匀引起的。实际上，结合牛顿干涉仪和菲佐干涉仪测量平行板，可以评估出折射率的变化（不均匀性）（Murty，1963；Murty，1964a；Forman，1964）。

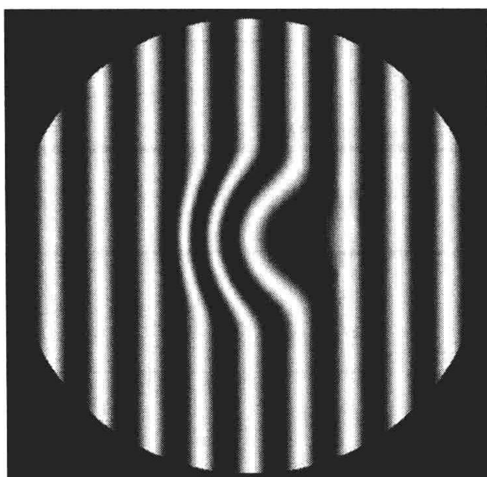


图1.22 通过局部加热获得的小楔角板直菲佐条纹中弯曲信息
（弯曲方向为楔角薄的方向）

1.3.8 检测大口玻璃和熔融石英试样的不均匀性

首先把被检试样做成平行平板，使其两表面尽可能平直，最大误差不应大于 λ，然后在样品的表面涂敷折射率与样品的折射率差不多的折射液，再把样品夹在两块精制的玻璃平板中间。用这种方法时，可以忽略试样的微小表面误差，能够看到仅仅由于样品的不均匀性而引起的直条纹变形。如果把夹层保持在两块镀膜反射镜构成的腔的中间，就可以在亮背景上获得非常清晰的暗条纹。例如，设条纹与直线的最大偏差为 k，两条纹间距为 d，则光程差为（k/d）λ。由于样品的不均匀性为 ΔN，厚度为 t，则光程差为 $2\Delta Nt$，因此

$$\Delta N = \frac{k}{d}\,\frac{\lambda}{2t} \tag{1.25}$$

例如，设 $k/d=0.25$，$\lambda=632.8$ nm，$t=50$mm，则 $\Delta N=1.6\times10^{-6}$。由此，在样品的检验方向上得到样品的最大偏差是 1.6×10^{-6}。图1.23所示为检验玻璃、熔融石英等固体试样不均匀性的菲佐干涉仪简图。

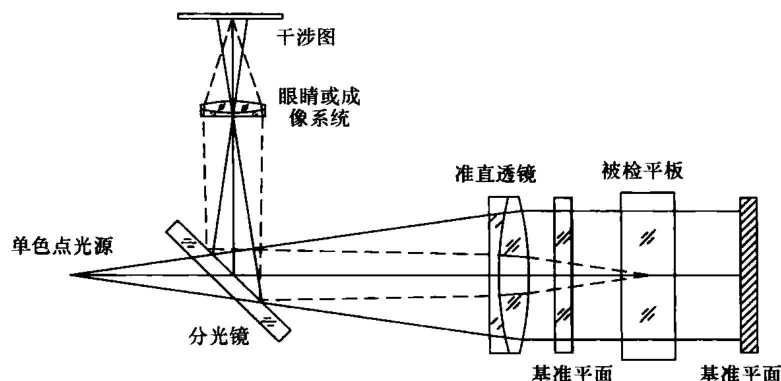


图 1.23　检验玻璃、熔融石英等固体试样不均匀性的菲佐干涉仪简图

1.3.9　测量杆、块和平板面的平行度和平面度

测量杆、块和平板面两端面平行度和平面度的要求越来越多。如果被检平板为透明的且折射率很一致，则问题不是很复杂。如果材料折射率不一致或者不透明，则需要采用特殊的方法。凡俄尼和默勒西尼（Vannoni and Molezini 2004）提出了解决该问题的方法，如图1.24所示。首先在没有被检平板或杆的情况下，调整干涉仪使条纹最少。视场显示这些条纹是由于直角棱镜误差引起的，再将被检杆放置在图1.24中所示的位置。

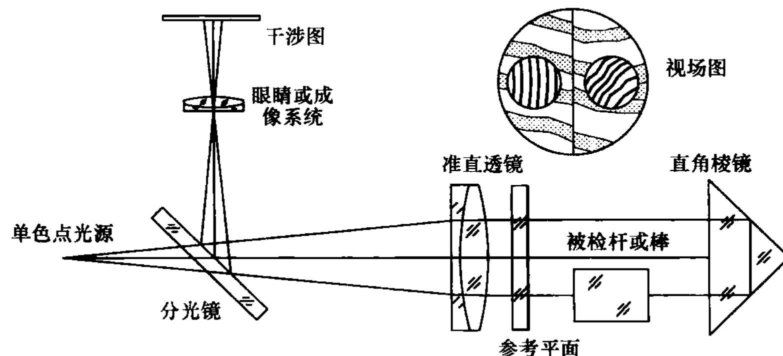


图 1.24　不透明杆、块和平板面两端面平面度和平行度检测示意图

1.3.10　三面直角棱镜和直角棱镜的测量

在后向反射结构中，如果三面直角棱镜和直角棱镜的直角是准确没有任何误差的，那么一个入射的平面波经棱镜反射后出射一个如同单一波面一样。否则反射的波前由不同倾斜的几个波前组成，这就使测量棱镜的误差成为可能。由于是内部全反射，所以反射率很高，接近100%。由于基准面没有镀反射膜，所以条纹对比度较差。为了提高条纹对比度，需要降低被检光学元件的反射率或减弱被检光束的振幅。

为了减小三面直角棱镜或直角棱镜的有效反射率，可以引入一块镀有反射率为20%～30%金属膜的玻璃平板。在这种情况下，两束光的强度匹配相当好，并且可以获得对比度很好的双光束条纹。为了防止直接反射光束，应充分倾斜棱镜和未镀膜基准样板之间的镀膜平板。图1.25所示为菲佐干涉仪检测三面直角棱镜和直角棱镜示意图。

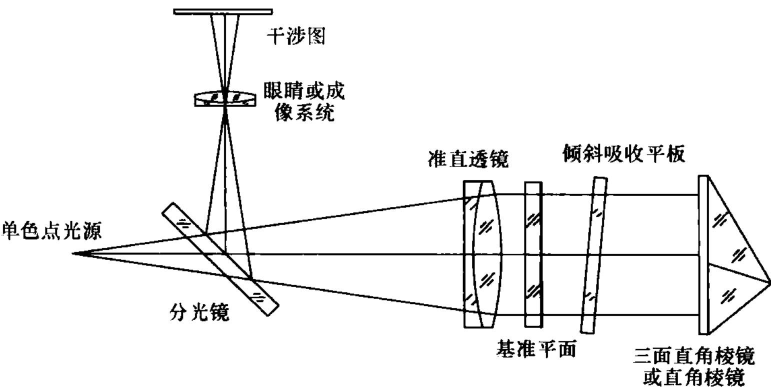


图 1.25 菲佐干涉仪检测三面直角棱镜和直角棱镜示意图（这里在棱镜和基准面之间插入吸收板，使两相干光光强相等）

另一种方法是减小棱镜的一个反射面反射率，为此可以制作一个特殊的单元，把棱镜贴在其上，在一个反射面的背面，充入一薄层水或其他合适的液体，使液体与这个面接触。因而实际上减小了一个全内反射面上的折射率，这样从棱镜反射的波面强度与一个不镀膜平面相差无几。图 1.26 所示为减小从三面直角棱镜和直角棱镜反射回光强的示意图。

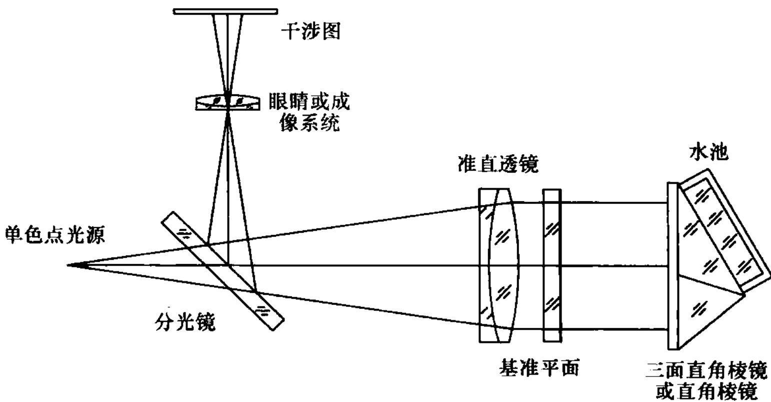


图 1.26 减小从三面直角棱镜和直角棱镜反射回光强的示意图

菲佐干涉仪测量棱镜时获得的干涉图与泰曼-格林的干涉图有差别，详细请参见第 2 章内容。

1.3.11 菲佐干涉仪检测曲面

与菲佐干涉仪采用准直光检测光学平面一样，既能采用发散光也可用会聚光来检测曲面。图 1.27 所示为用凸基准面检测凹面的示意图。点光源位于凸基准面中心，调整被检凹面直到其曲率中心也与点光源重合。除了要获得均匀空气隙还必须进行平移外，这种检测过程与前述步骤都一样（Moore and Slaymaker，1980）。

该装置可以用来检验球面壳厚度的均匀性（同心度），只要从两共心前后球面获得相干光，如果球壳曲率半径没有误差而球壳有楔角（曲率中心有横向平移），就得到有楔角特征的直条纹。采用与 1.2.3 节中所描述的用热杆或手指可确定球壳哪个方向薄。如果两个半径不合适（$\sqrt{r_1 - r_2} \neq t$，其中 r_1 和 r_2 为两半径，t 为中心厚度），t 的值在整个壳中不为常

数，因此会得到类似于牛顿条纹的干涉条纹。如果此时还有楔角误差，圆条纹将相对于圆壳中心不共心。在这种情况下，也可以采用热杆和手指接触，来确定球壳中心还是边缘薄。

图 1.28 所示为用菲佐干涉仪测量球壳的均匀性。

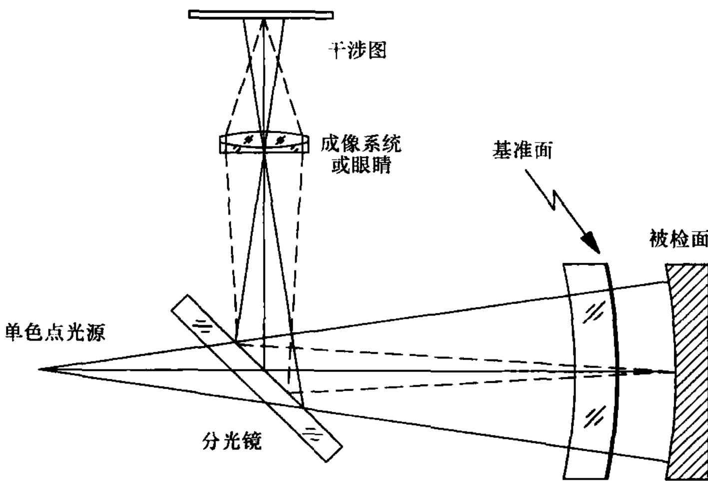


图 1.27　用凸基准面检测凹面的示意图

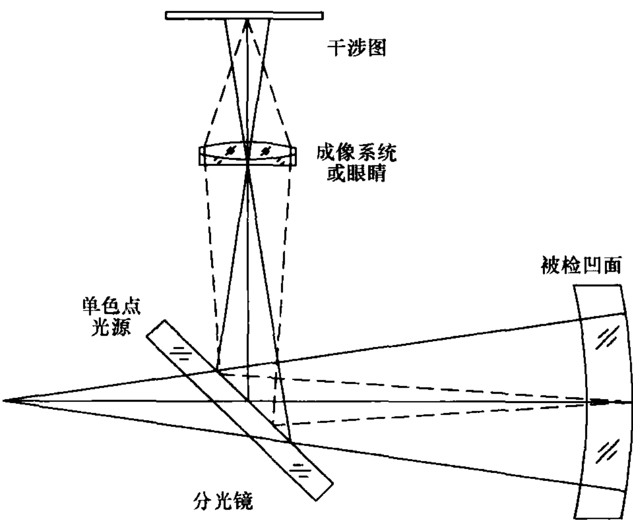


图 1.28　用菲佐干涉仪测量球壳的均匀性

同样也可以采用凹面作为参考面来测量凸面，如图 1.29 所示。在一定的共轭距离上使用一面透镜或一组透镜，使点光源在一个共轭点上，而被检面和参考面的共同曲率中心在另一共轭点上。凹面固定在仪器上，而被检凸面用常规方法控制，以获得相同的空气隙。

1.3.12　检测凹面和凸面

使用的基准面仍然是不镀膜的平面样板，该样板是菲佐干涉仪的一部分。干涉仪发射的平行光通过平面样板后用另一个经良好的校正的透镜再聚焦。如果被检面为凹面，则按图

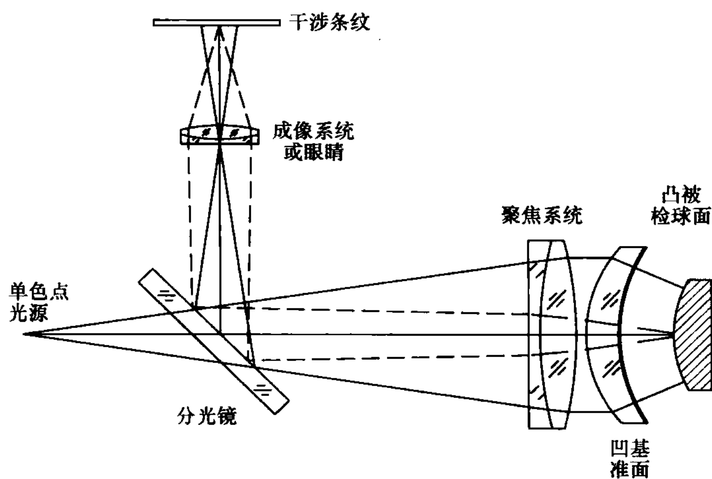


图 1.29 采用凹面作为参考面来测量凸面

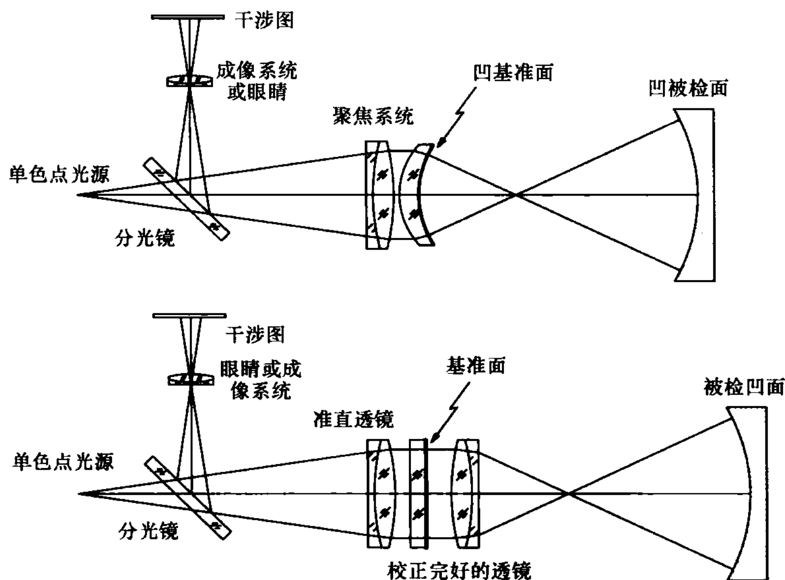


图 1.30 采用凹基准面或平面基准面检测凹面的菲佐干涉仪简图

1.30 放置。如果被检面为凸面，则按图 1.31 所放置。如果被检面是球面，并且曲率中心与透镜焦点重合，则反射回来的仍是波阵面平面。由于两束光的干涉，可以获得直的干涉条纹。如果光学基准样板和球面都镀有高反射膜层，就可以获得非常清晰的多光束菲佐条纹。如果被检面不是球面而是非球面，那么干涉仪必须使用合适的补偿透镜。这种仪器配备长度测量装置后，还可以测量曲率半径。

用菲佐干涉仪检测凸面存在很多问题，特别是被检面口径大且/或为非球面时，很多人对此进行了分析，如伯基（Burge，1995）在 1995 年的研究。

另一种也称为菲佐干涉仪的干涉仪由夏克（Shack）发明的（Shack and Hopkins，1979；Smith，1979）。不同之处是该方案采用氦氖激光器作为光源，提供很长的相干长度，因此凸参考面与凹测试面之间的干涉腔可以很长（通常有几米）。而且凸参考面成为仪器的一部分，且曲率半径可以非常短。该方案实际上是采用了分光棱镜，且将其一表面制作成凸球

面。夏克菲佐干涉仪示意图如图 1.32 所示。如果在干涉仪和被检面之间插入一合适的零补偿器，它可以检测大口径非球面。

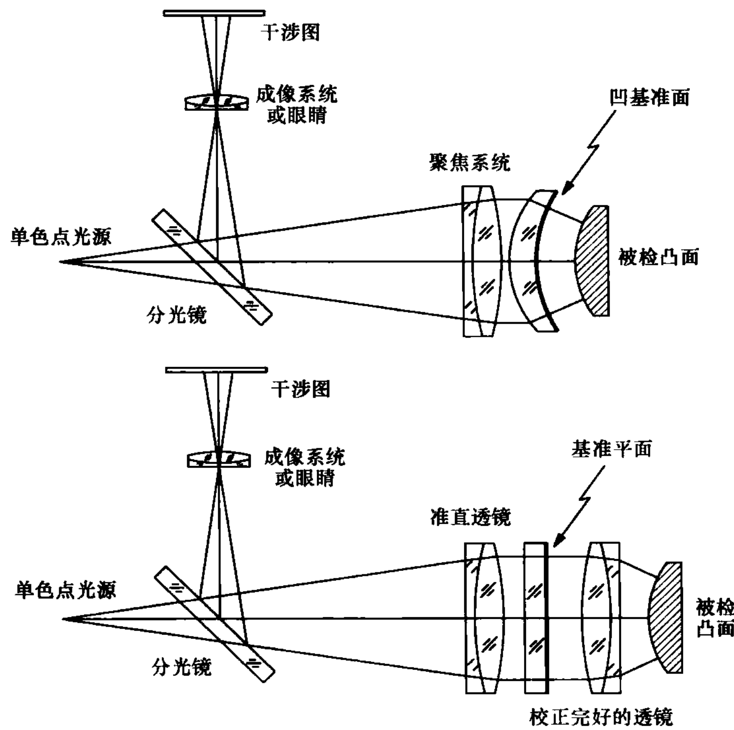


图 1.31　采用凹面或平面作为基准面检测凸面的菲佐干涉仪简图

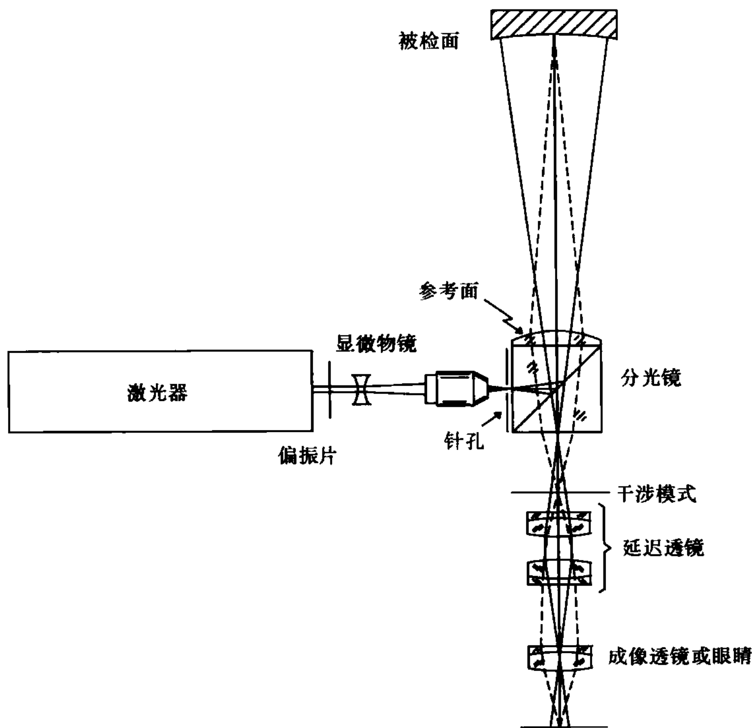


图 1.32　夏克菲佐干涉仪示意图

1.4 海丁格干涉仪

使用牛顿干涉仪和菲佐干涉仪主要涉及空气隙厚度的变化，在实验过程中，把干涉仪看做等厚条纹。但是，如果空气隙厚度均匀一致，并且是用大角度光源照明，则形成的干涉条纹称为等倾条纹，这些条纹在无限远的位置形成，用一合适的透镜就可以把这些条纹聚焦透镜焦面上。如果平行的间隙中是空气，则可以得出简单的关系式：$2t\cos\theta = n\lambda$，和式（1.9）相同。从该式可以看出对于不变量 t，所得到的等倾条纹是圆形的，并且形成在无限远处。

如果用一块实体平板，例如用平行度很好的玻璃平板代替空气隙，那么式（1.9）稍加修改后就可把玻璃平板折射率的作用包括进去，即变为

$$2Nt\cos\theta' = n\lambda \tag{1.26}$$

其中，θ'是玻璃平板内的折射角，当 θ'值小时，可将式（1.26）近似改写成

$$2Nt = \left(\frac{t}{N}\right)\theta^2 = n\lambda \tag{1.27}$$

为了能用简单的装置观察海丁格干涉仪条纹，可采用图 1.33 所示的装置。这种装置是把一块玻璃平行平板放在一张黑纸上，用从 45°角放置的白卡片上反射的漫射光照亮平行平板。白卡片的中心有一小孔，透过小孔就可以看到玻璃平板。使眼睛放松，基本上调焦到无限远处，就可以观察到一组同心圆形条纹。光源可以是钠灯，甚至可以是荧光灯。

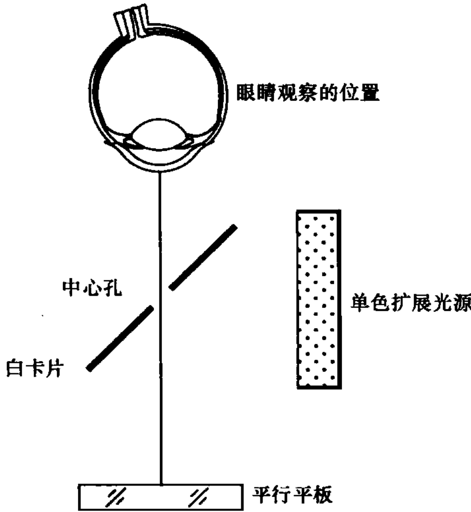


图 1.33 观察玻璃平行平板的海丁格干涉仪条纹的简单装置

在这种情况下，激光作为光源，对 t 的值有很高的限制，尽管那样 t 的长度仍可以达到几米，因此选 $t = 1000\text{mm}$，$\lambda = 632.8\text{mm}$，得到 ϕ 的上限为 5 弧秒。因此设计一个准直系统来满足该条件并不困难。

另一个重要方面是 t 值很大时，在仪器上可能出现横向剪切干涉现象。为了防止这种现象出现，必须使自准直针孔像与针孔本身重合。同样，如果准直透镜准直不好，可能会出现会聚光束或者出现发散光束。任何适用于此目的的检测装置都能精确地使光束准直，例如使用平行平板剪切干涉仪（Murty，1964b）。

另外一个比较好的方法是，用一个透镜使海丁格条纹系统聚焦到透镜焦面上。这就需要

一个与菲佐干涉仪所用的几乎完全相同的装置。唯一区别是为了使光源角尺寸加大，不用针孔，而用直径较大的孔。海丁格干涉条纹在透镜的焦面上形成。

1.4.1　海丁格干涉仪的应用

海丁格干涉仪可以作为菲佐干涉仪检测方法的一种补充。如果要检测近似平行平板的楔角，既可以用菲佐法，也可以用海丁格法。在海丁格方法中，当视线通过小孔径移过平板，观察同心干涉条纹的稳定性时，如果缓慢改变 t，那么环形条纹系统的中心也发生变化。如果 t 减小，而观察者向楔的较薄一侧移动，那么这时海丁格圆形干涉条纹从中心向外扩展。相反；如果观察者是向楔的较厚一侧移动，则干涉条纹向中心收缩。如果记下条纹系统的中心经历几次从亮到暗的周期，那么也能用与菲佐相同的方式估算出楔角的大小。

1.4.2　用激光作为海丁格干涉仪光源

与菲佐干涉仪一样，海丁格干涉仪也能用低功率氦-氖激光器作光源，同样可以把干涉条纹投影到屏幕上。在这种情况激光器可以制作成一种有效的点光源，因此可以把产生的海丁格干涉条纹看做两个彼此相干的点光源干涉的结果。所以在距两个相干点光源有限远的位置上就能得到圆条纹，而且也不必用透镜把条纹呈现在焦面上。图 1.34 所示为单个点光源经楔形平板形成的两个虚相干光源及与此有关的各个参量。为了进行分析，完全可以认为两个点光源是彼此相干的。然后，如果把一个屏放在足够远处，并且使它垂直于两个点光源的连线上，就能得到与牛顿环相同的同心圆心条纹系统，并且条纹中心与两个点光源共线。对于折射率为 N 的玻璃平板，两个虚点光源之间的距离是 $2t/N$，其中 t 是平板厚度。这时如果玻璃平板有一个小楔角，那么两个虚点光源彼此之间将出现微小的横向位移，移动距离为 $2N\alpha r$，其中 α 为楔角，r 为从楔形板到点光源的距离。

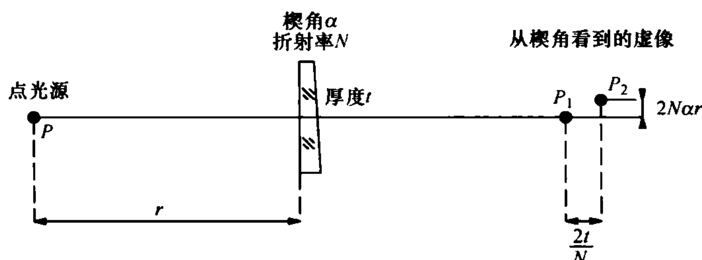


图 1.34　单个点光源经楔形平板形成的两个虚相干光源及与此有关的各个参量

为了在实践中应用以上理论，可以采用几种方法。一种方法是由沃西里克等人（Wasilik et al.，1971）首先提出的，如图 1.35 所示。激光束通过一张白卡片上的小孔，然后投射到被检玻璃平板上。为了使光束发散，在白卡片后面的正中央放置一块焦距约为 50～100mm 的负透镜或正透镜。调节透镜的位置，使光轻微扩散而不偏离中心位置，特殊制作的卡片与棱镜一起固定在激光器上。为了测量，需要在卡片上画一些同心圆，这些同心圆间距是已知的。被检平片放在能倾斜的平台上，调整该元件直到它将激光反射回到穿过卡片上的孔。这时在小孔周围可看见同心圆海丁格干涉条纹。如果元件为楔形，海丁格条纹相对于中心孔发生偏移。偏移量与元件楔形角度关系为

$$d = \frac{2N^2r^2\alpha}{t} \tag{1.28}$$

式中，d 为海丁格条纹偏移量，α 为玻璃平板楔角，t 为玻璃平板的厚度，N 为玻璃平板折射率，r 为点光源到玻璃平板的距离。

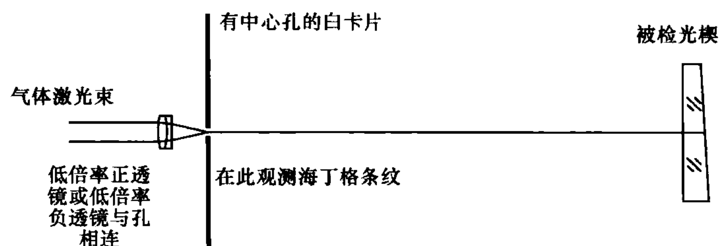


图 1.35 观察海丁格干涉条纹并测定条纹中心偏离量的装置简图（图中激光束通过卡片上的小孔，在小孔周围观察到海丁格干涉条纹）

例如，如果 $\alpha=1''$（5×10^{-6}rad），$N=1.5$，$r=1000$mm 和 $t=10$mm，则很容易可以得到 $d=2.25$mm。该方法精度高且很有效。

另一种方法如图 1.36 所示，此时激光束穿过楔形玻璃平板落在特殊制作的毛玻璃上，该毛玻璃中心粘上曲率半径为 50～100mm 的凹面或凸面反射器，反射器的大小应该略大于激光光斑的大小，因此激光束被反射到玻璃板上。调整楔板直到从其上面反射回来的光束与毛玻璃板上小反射镜重合。现在海丁格条纹可以从毛玻璃板上看到，且条纹系统中心偏离了毛玻璃板上的反射镜。式（1.28）在这种情况下仍然有效。

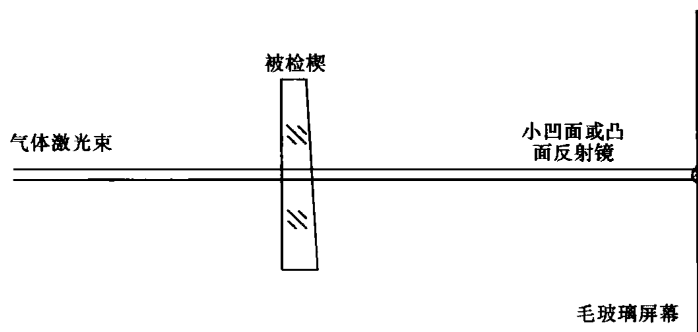


图 1.36 观测海丁格条纹并检测中心偏移示意图（图中激光束被毛玻璃上的凹面或凸面反射镜直接反射回玻璃楔上，在毛玻璃上形成海丁格条纹）

第三种方法是使用分光镜，如图 1.37 所示。激光束透过分光镜后射向楔形平板，从楔形平板反射回来后又被分光镜反射，最后投射到毛玻璃板上。调节被检玻璃平板，使它经反射后回玻璃平板上。在毛玻璃上标记屏上的光斑位置，然后在靠近激光器的一侧插入一块负透镜或正透镜。这样就充分扩展了光束，因而可以在毛玻璃屏上看到圆形海丁格干涉条纹。测量条纹中心海丁格系统中心偏离量，式（1.28）同样适用来计算楔角 α。

1.4.3 海丁格干涉仪的其他应用

前文已经对海丁格干涉仪检测近似玻璃板的小楔角测量进行了介绍。有很多能够取代平行板且作用相当的棱镜，也能够检测其角度的偏差。典型的直角棱镜的角度通常为 90°、45°和 45°，在这种棱镜中，要求与理想值非常接近的 90°角，而另外两个角为彼此相等的 45°角。且棱镜所有面要与基准面垂直。否则，则棱镜存在塔差（这在很多应用中是客观存

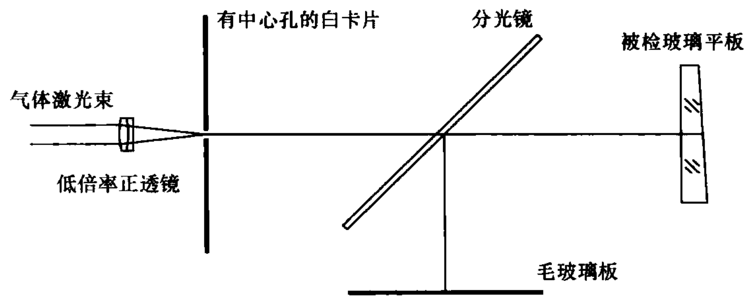


图 1.37 观察海丁格干涉条纹并测定条纹中心偏离量的装置简图
（在毛玻璃屏上观察条纹，并用分光镜可避免中心模糊不清）

在的）。图 1.38 所示为对有小楔角的直角棱镜如何像平行平板一样进行检测。如果光束从面 *AC* 入射，经面 *BC* 反射后与经面 *AC* 反射的光线近似平行，因此可以观察到这两束光的干涉产生的海丁格干涉条纹。该装置可用来检测 *A*、*B* 角是否相等。如果没有塔差且两个角度相等，海丁格干涉条纹中心也在光束正中心。如果角度相等但存在塔差，海丁格条纹中心在竖直方向发生偏移。如果两个误差均存在，海丁格条纹中心在竖直和水平方向均发生偏移。如果光从 *AB* 面入射，则从 *AB* 内部面反射回来的光束，与其外部面反射回来的光束近似平行，这样两束光干涉也能够得到海丁格干涉条纹。这种情况下，可检测角 *C* 是否为 90°。如果海丁格条纹中心不是在水平方向，则角 *C* 为 90°，而且如果也没有垂直方向偏移，也没有塔差。更多细节可以查阅萨克泽纳和耶斯万斯（Saxene and Yeswanth，1990）的论文。

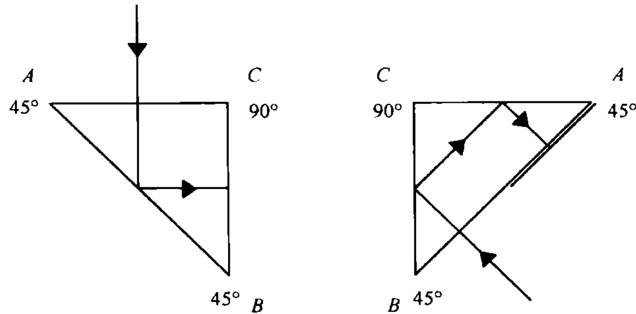


图 1.38 与平行玻璃板相当的 45°-90°-45°棱镜简图

与平行玻璃板相当的其余两种棱镜如图 1.39 所示，读者在某些特殊情形也会遇到其他

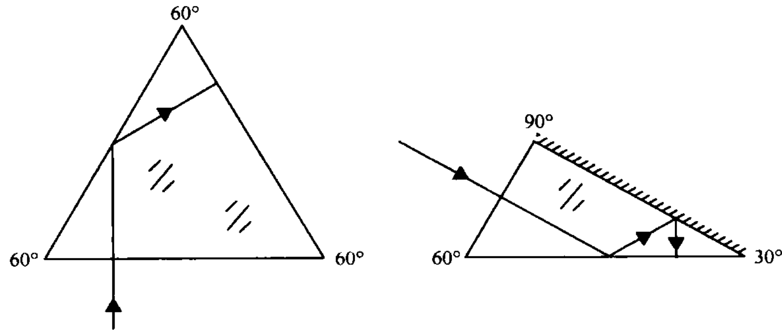


图 1.39 与平行玻璃板相当的其余两种棱镜简图

棱镜的例子。式（1.27）在这种情况下用来计算偏移量。偏移量包含两部分，垂直方向和水平方向偏移量。

1.5 平面的绝对测量

上面介绍了以“理想”平面作为基准的样板来检测平板，但是当“理想”的基准平面样板不能继续使用时，常常需要再制作一块新的基准平面样板。这时候可以采用1.2.2小节中介绍的液体样板方法。另一种方法是同时制作三块平面样板，通过几次组合进行检测，就可以得到三个表面相对于一个完善样板的绝对偏差。

假设用不同的组合方式组合两个面来测量三个待测面，其中两玻璃平片中的 A 放在另一个上面，绕 y 轴在 x 方向旋转。如果图1.40a 中的面形变形用 F_A（x，y）表示，则可写为

$$[F_A(x,y)]_x = -F_A(-x,y) \tag{1.29}$$

玻璃板的底面 B 相对其初始位置旋转角度为 θ，如图1.40c 所示。其表面变形 $[F_B(x,\ y)]_\theta$ 可表示为：

$$[F_B(x,y)]_\theta = F_A(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \tag{1.30}$$

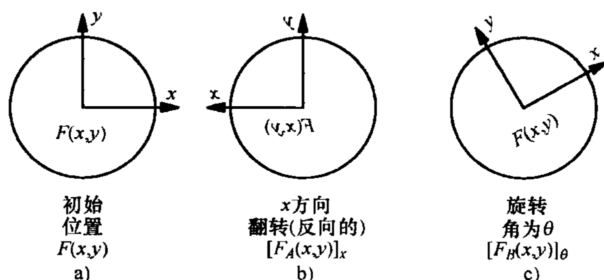


图1.40 需要与理想平面比较以确定面形的面的可能位置

然后通过测量条纹可以获得不同的值

$$G_{BA} = [F_B(x,y)]_\theta - [F_A(x,y)]_x \tag{1.31}$$

如果按照舒尔兹（Schulz）和施温德（Schwider，1976）的处理方法，取 $\theta=0$，如图1.41所示，三个方向可得到

$$\begin{aligned} G_{BA} &= F_B(x,y) + F_A(-x,y) \\ G_{CA} &= F_C(x,y) + F_A(-x,y) \\ G_{CB} &= F_C(x,y) + F_B(-x,y) \end{aligned} \tag{1.32}$$

该方程中未知数个数大于方程个数，因此在 y 轴上，如果设 $x=0$，则方程有一简单的解。如果要对整个面求解，则至少要假设有一个面关于 y 轴对称，例如面 B，则 $F_B(x,y)=F_B(-x,y)$。则可以得到

$$F_A(x,y) = \frac{G_{BA}(-x,y) + G_{CA}(-x,y) + G_{CB}(-x,y)}{2}$$

$$F_B(x,y) = \frac{G_{BA}(x,y) - G_{CA}(x,y) + G_{CB}(x,y)}{2}$$

$$F_C(x,y)=\frac{G_{CA}(x,y)+G_{BA}(x,y)-G_{CB}(x,y)}{2} \tag{1.33}$$

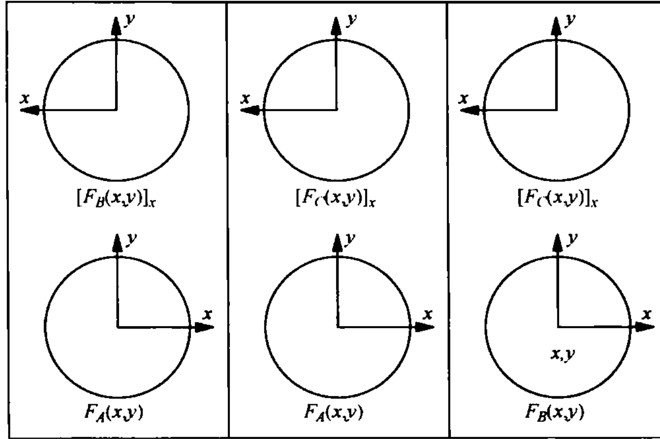


图1.41 测量三个面的不同组合

也有一些其他方法被提出来，例如特鲁阿克斯（Truax，1988）的方法。下面介绍艾和怀扬特（Ai and Wyant，1992）提出来的方法。假设其中一个面由函数 F（x，y）表示，所有非对称一维函数都可以由一偶函数和奇函数相加之和来表示。则对所有非对称函数具有以下性质

$$\begin{aligned} F_e(x,y)&=f(x)+f(-x) \quad \text{偶函数}\\ F_e(x,y)&=f(x)-f(-x) \quad \text{奇函数}\end{aligned} \tag{1.34}$$

将该理论推广到二维

1）$F_{ee}(x,y)=f(x,y)+f(-x,y)+f(x,-y)+f(-x,-y)$ 偶-偶函数

2）$F_{eo}(x,y)=f(x,y)+f(-x,y)-f(x,-y)-f(-x,-y)$ 偶-奇函数

3）$F_{oe}(x,y)=f(x,y)-f(-x,-y)+f(x,y)-f(-x,y)$ 奇-偶函数

4）$F_{oo}(x,y)=f(x,y)-f(-x,y)+f(x,-y)-f(-x,y)$ 奇-奇函数 (1.35)

可以推断出二维非对称函数 F（x，y）总可以表示成偶-偶、偶-奇、奇-偶和奇-奇四个函数相加的形式如下

$$F(x,y)=F_{ee}+F_{oo}+F_{oe}+F_{eo} \tag{1.36}$$

式中，

$$\begin{aligned} F_{ee}(x,y)&=(F(x,y)+F(-x,y)+F(x,-y)+F(-x,-y))/4\\ F_{oo}(x,y)&=(F(x,y)-F(-x,y)-F(x,-y)+F(-x,-y))/4\\ F_{eo}(x,y)&=(F(x,y)+F(-x,y)-F(x,-y)-F(-x,-y))/4\\ F_{oe}(x,y)&=(F(x,y)-F(-x,y)+F(x,-y)-F(-x,-y))/4\end{aligned} \tag{1.37}$$

假设检测的两平面面形为 $F_A(x,y)$ 和 $F_B(x,y)$。采用艾和怀扬特的方法时选取了8种组合，如图1.42所示，其中不同光路产生牛顿或菲佐条纹将由式（1.38）表示

$$
\begin{aligned}
G_1 &= [F_B(x,y)]_x - F_A(x,y) \\
G_2 &= [F_B(x,y)]_x - [F_A(x,y)]_{180^\circ} \\
G_3 &= [F_B(x,y)]_x - [F_A(x,y)]_{90^\circ} \\
G_4 &= [F_B(x,y)]_x - [F_A(x,y)]_{45^\circ} \\
G_5 &= [F_C(x,y)]_x - [F_B(x,y)]_{180^\circ} \\
G_6 &= [F_C(x,y)]_x - F_B(x,y) \\
G_7 &= [F_C(x,y)]_x - [F_B(x,y)]_{90^\circ} \\
G_8 &= [F_C(x,y)]_x - [F_B(x,y)]_{45^\circ}
\end{aligned}
\tag{1.38}
$$

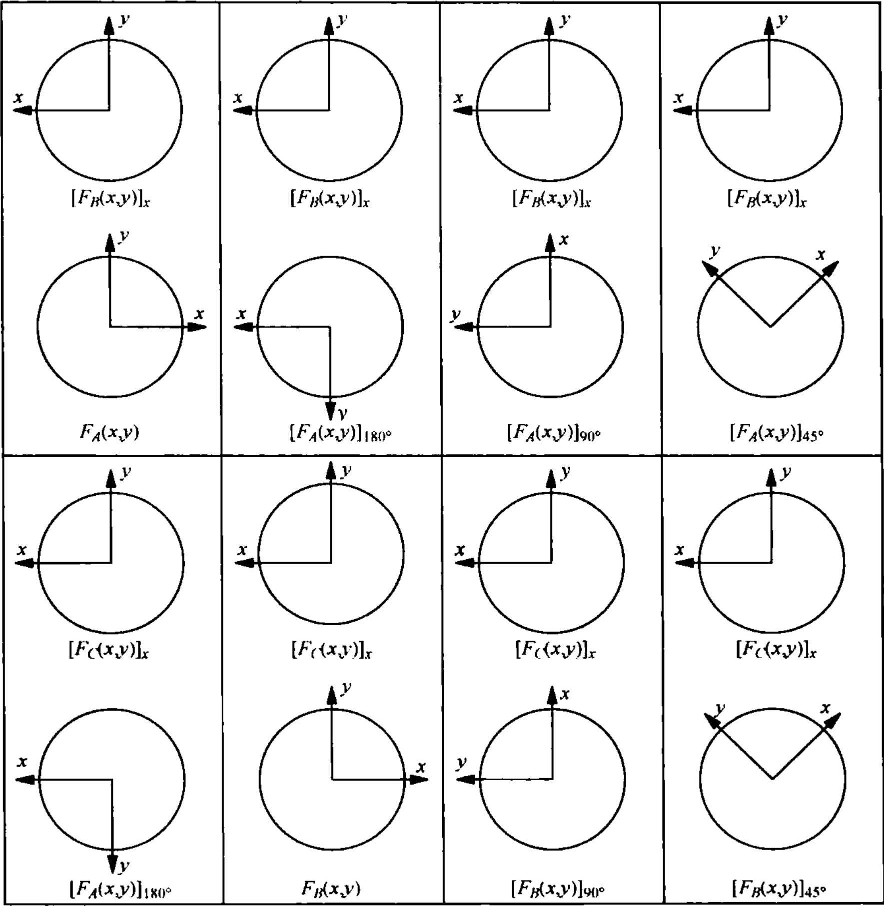


图 1.42 三个面测量的 8 种不同组合

通过这些表达式，三个面的面形可以计算出来，首先计算函数 $F_A(x, y)$、$F_B(x, y)$ 和 $F_C(x, y)$ 的奇偶、偶奇、偶偶和奇奇部分，其中奇奇部分是最难求出的，可以通过傅里叶变换正弦函数序列表示。该方法不能获得平移和倾斜量，但这并不是问题，因为它们并没有多少实际的用处。

弗里茨（Fritz，1983、1984）提出了采用泽尼克（Zernike）多项式将函数分解成正交函数。后来，绍等人（Shao et al. ，1992）发现通过忽略高空间频率，只需要四种组合就可获得面形的解。

参考文献

Ai C. and J. Wyant, "Effect of Spurious Reflection on a Phase Shift Interferometry," *Appl. Opt.*, **27**, 3039–3045 (1988).

Ai C. and J.C. Wyant, "Absolute Testing of Flats Decomposed to Even and Odd Functions," *Proc. SPIE*, **1776**, 73–83 (1992).

Ai C. and J. Wyant, "Effect of Retroreflection on a Phase-Shifting Interferometer," *Appl. Opt.*, **32**, 3470–3478 (1993).

Burge J. H., "Fizeau Interferometry for Large Convex Surfaces," *Proc. SPIE*, **2536**, 127–138 (1995).

Deck L., D. Stephenson, M. Küchel, and C. Evans, "Advances in Laser Fizeau Inteferometry for Optical Testing," *TOPS*, **76**, 108–111 (2000).

Forman P. F., "A Note on Possible Errors Due to Thickness Variations in Testing Nominally Parallel Plates," *Appl. Opt.*, **3**, 646 (1964).

Forman P. F., "The Zygo Interferometer System," *Proc. SPIE*, **192**, 41 (1979).

Fritz B. S., "Absolute Calibration of an Optical Flat," *Proc. SPIE*, **433**, 123 (1983).

Fritz B. S., "Absolute Calibration of an Optical Flat," *Opt. Eng.*, **23**, 379 (1984).

Grigor'ev V. A., Va. O. Zaborov, and P. P. Ivanov, "Use of a Liquid Mirror for the Calibration of an Interferometer," *Sov. J. Opt. Technol.*, **53**, 613 (1986).

Hariharan P. and W. H. Steel, "Fringe Localization Depth: A Comment," *Appl. Opt.*, **28**, 29 (1989).

Karow H. H., "Interferometric Testing in a Precision Optics Shop: A Review of Testplate Testing," *Proc. SPIE*, **192**, 56 (1979).

Ketelsen D. A. and D. S. Anderson, "Optical Testing With Large Liquid Flats," *Proc. SPIE*, **966**, 365 (1988).

Malacara D. and A. Cornejo, "Testing of Aspherical Surfaces with Newton Fringes," *Appl. Opt.*, **9**, 837 (1970).

Moore R. C. and F. H. Slaymaker, "Direct Measurement of Phase in a SphericalWave Fizeau Interferometer," *Appl. Opt.*, **19**, 2196 (1980).

Murty M. V. R. K., "A Note on the Testing of Large Aperture Plane Parallel Plates of Glass, "*Appl. Opt.*, **2**, 1337 (1963).

Murty M. V. R. K., "Addendum to: A Note on the Testing of Large Aperture Plane Parallel Plates of Glass," *Appl. Opt.*, **3**, 784 (1964a).

Murty M. V. R. K., "The Use of a Single Plane Parallel Plate as a Lateral Shearing Interferometer with a Visible Gas Laser Source," *Appl. Opt.*, **3**, 531 (1964b).

Murty M. V. R. K. and R. P. Shukla, "Some Considerations of the Fizeau Interferometer," *Bull. Opt. Soc. India*, **4**, 13 (1970).

Novak E., C, Ai and C. Wyant, "Errors Caused by Nearly Parallel Optical Elements in a Laser Fizeau Interferometer Utilizing Strictly Coherent Imaging," *Proc. SPIE*, **3134**, 456–460 (1997).

Primak W., "Optical Flatness Standard," *Opt. Eng.*, **23**, 806 (1984).

Primak W., "Optical Flatness Standard II: Reduction of Interferograms," *Proc. SPIE*, **954**, 375 (1989a).

Primak W., "Optical Flatness Standard: Comment," *Opt. Eng.*, **28**, 934 (1989b).

Saxena A. K. and L. Yeswanth, "Low Cost Method for Subarcsecond Testing of a Right Angle Prism," *Opt. Eng.*, **29**, 1516–1520 (1990).

Schulz G. and J. Schwider, in *Progress in Optics*, vol. **13**, E. Wolf, Ed., North Holland, Amsterdam, 1976, Chap. IV.

Schulz G. and J. Schwider, "Comments on the Paper "Optical Flatness Standard," *Opt. Eng.*, **26**, 559 (1987).

Shack R. V. and G. W. Hopkins, "The Shack Interferometer," *Opt. Eng.*, **18**, 226 (1979).

Simon J. M. and S. A. Comatri, "Fringe Localization Depth," *Appl. Opt.*, **26**, 5125 (1987).

Smith W. S., "Versatile Interferometer for Shop Use," *Proc. SPIE*, **192**, 13 (1979).

Taylor W. G. A., "Spherical Aberration in the Fizeau Interferometer," *J. Sci. Instrum.*, **34**, 399 (1957).

Truax B. E., "Absolute Interferometric Testing of Spherical Surfaces," *Proc. SPIE*, **966**, 130 (1988).

Vannoni M. and G. Molezini, "Joint Interferometric Measurement of Planarity and Parallelism," *Opt. Eng.*, **43**, 1215–1220 (2004).

Wasilik H., T. V. Biomquist, and C. S. Willet, "Measurement of Parallelism of the Surfaces of a Transparent Sample Using Two Beam Nonlocalized Fringes Produced by Laser," *Appl. Opt.*, **10**, 2107 (1971).

Wyant J. C., "Fringe Localization," *Appl. Opt.*, **17**, 1853 (1978).

Yoder P. R., Jr. and W. W. Hollis, "Design of a Compact Wide Aperture Fizeau Interferometer," *J. Opt. Soc. Am.*, **47**, 858 (1957).

第2章　泰曼-格林干涉仪

D. 马拉卡拉

2.1　引言

泰曼-格林干涉仪是一种从迈克耳逊（Michelson）干涉仪演变而来的用于检测光学元件的仪器。泰曼和格林发明了这种干涉仪并申请了专利（Twyman and Green，1916），它最初用于检测棱镜和显微物镜，后来经过改进并用于检测相机镜头（Twyman，1919）。最早介绍这种干涉仪的文章由泰曼撰写（Twyman，1918a、1918b、1920、1920-1921、1923）。由于这种仪器具有很高的使用价值，而且得到了广泛的应用，所以很多文章（Briers，1972）和书籍（Candler，1951；Twyman，1957；U. S. Department of Defense，1963；Cook，1971；Horne，1972）都有详细的描述。图2.1所示为泰曼-格林干涉仪的基本结构。使用一个准单色的点光源作为照明光，用透镜L_1对其准直后形成一个平面波面，再利用一个分束板将波面依振幅分割。光线经过M_1和M_2两个反射镜反射后在分束器上再次相遇，从而形成两组干涉图像，其中一个投射到透镜L_2上，另一个则返回至光源处。透镜L_2能够使所有通过孔径的光线聚焦进入观察者的眼睛，这样就能够看到整个干涉场。观察到的条纹属于等厚干涉条纹。

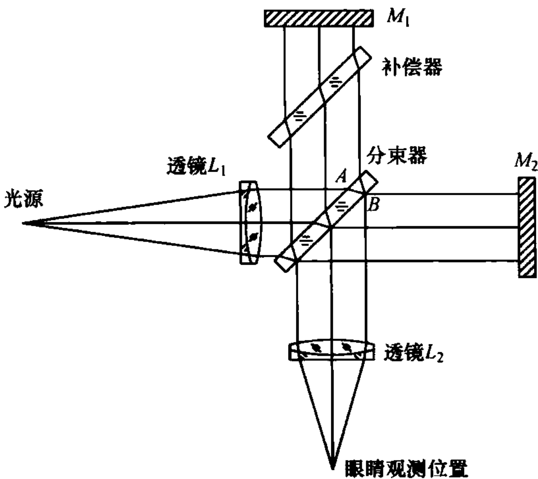


图2.1　泰曼-格林干涉仪的基本结构

如果分束器的反射是双向的，能很容易观察到主干涉图与返回光源处的干涉图是互补的，换而言之，一个干涉图上的亮条纹与另一个干涉图上的暗条纹相对应。即使两个干涉图的光程差相同，根据能量守恒原理也可知这一互补关系是成立的。反射产生的相移就说明了这种互补性。帕玛吉尔（Parmigiani，1981）则针对有关吸收型分光镜的情况进行了分析。

值得指出的是，当年迈克耳逊（Michelson，1918）认为这种仪器不能用来检测大口径光学元件，同时还指出由于缺乏相干性足够好的光源，所以现在所说的不等光程干涉仪是没

有实用价值的。为了反驳迈克耳逊的观点，泰曼（Twyman，1918）指出，如图2.2所示的检测光路已经在他的专利中提出（Twyman and Green，1916）用于检测大口径反射镜或透镜。这种检测方法不需要大口径的准直物镜和分光镜，不过遗憾的是（由于光源相干性的限制）在检测时需要一个与被测光学元件口径一样大小的凹球面反射镜。这种类型的检测光路常常称为威廉姆斯干涉仪（De Vany，1965；Grigull and Rottenkolber，1967），这是因为伯奇（Burch，1940）将其归功于威廉姆斯。实验室使用的泰曼-格林干涉仪的结构如图2.3所示。

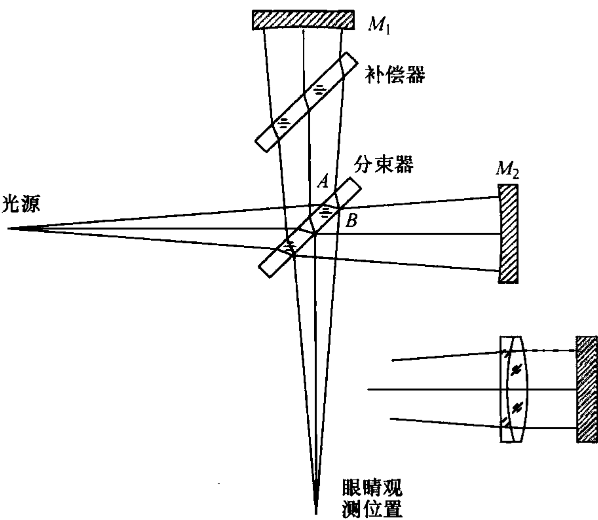


图2.2 泰曼-格林干涉仪（威廉姆斯型）

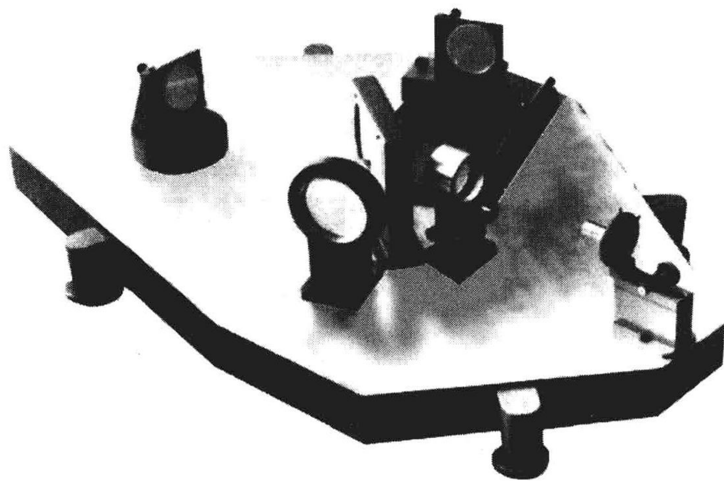


图2.3 实验室使用的泰曼-格林干涉仪

2.2 分光镜

分光镜的形状可以是如图2.4所示的玻璃平板，也可以是一个立方体。它的制作过程

是，通过在分光面上镀制一个部分反射膜，从而使得适量的光能够被反射。如果它是一个平板，其他表面不能反射任何光。为了避免在第二个面上产生反射，需要使用一个多层的增透膜。一种简单的解决方法如图2.4b所示，将平板沿布儒斯特角放置，然后使用偏振光作为光源，这样光通过界面时不会发生任何反射。还有一种解决方法是在平板上做出一个楔角，使不必要的反射光排除在系统之外。条纹对比度并不取决于分束器的反射率 R，而只是条纹的照度 I 与 R 有关。由于

$$I = 4I_0RT \tag{2.1}$$

式中，I_0 是入射波前的照度；T 是透过率，如果没有吸收（非金属膜）$T \approx 1 - R$，当 I 取最大值时

$$R = T = \frac{1}{2}$$

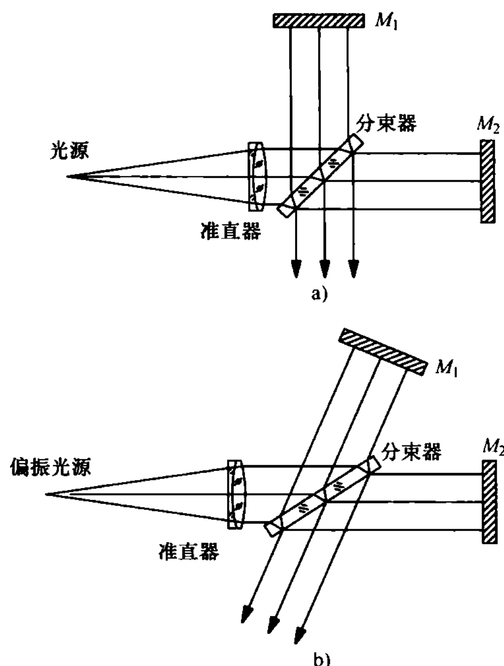


图2.4　泰曼-格林干涉仪分束器
a）沿45°放置　b）沿布儒斯特角放置

如果两个反射镜中一个的反射率高于另一个，例如，其中一个是高反射率的反射镜，另一个却还没有镀膜，发生干涉的两光束光的强度相差了大约25倍。在这种条件下，干涉条纹的对比度会下降很多。这种情况的一种解决方法是，使用一个反射率不同的分束器，另一种可能的解决方法是使用两个都没有镀膜的反射镜。

2.2.1　分光镜平板导致的光程差

可以通过代数运算和折射定律，推导出分光镜或者补偿板基于光轴轴向位移且平行于它自身的计算公式

$$d = t\sin\theta\left[1 - \frac{\cos\theta}{(n^2 - \sin^2\theta)^{1/2}}\right] \tag{2.2}$$

式中，θ 为入射角；t 是平板厚度；n 是折射率。

经过 M_1 反射到观察点的光束只通过分束器一次，然而经 M_2 反射的光束要通过分束器三次。像这种情况，也就是干涉仪一个臂中的光学材料比另一个臂多，这称为未被补偿。如图2.1和图2.2所示，如果在反射镜 M_1 前面插入另外一块玻璃板，干涉仪就可以被补偿了。

对干涉仪进行补偿的重要性在后续的章节中还会介绍。已有文献针对威廉姆斯型（Steel，1963）和泰曼-格林型（Connes，1956；Mertz，1959；Steel，1962）干涉仪的可调补偿器进行了描述。

正如前文所指出的，一个干涉仪当其中一个光臂中的光学材料多于另一个臂时，称为未被补偿。如图2.5a所示，为了检测一个光学元件（透镜或者棱镜）而将其放置与一个光臂中，或如图2.5b所示，在一条光路上光束传输通过分束器一次，而在另一条光路上光束传输通过分束器三次，同时并没有使用补偿板。这两种情况都可以归结为一种常见的情况，即在干涉仪的一个臂中插入了一个倾斜玻璃平板。将干涉仪两个光臂的光路展开，如图2.5所

示。从中可以看出整个效果等效于通过了一个有两个玻璃平板的系统。通过玻璃平板一次所引入的光程差 OPD 是光束入射角的函数，平行平板导致的光程差如图 2.6 所示，计算公式为

$$OPD = n(\overline{AB}) + \overline{BC} - \overline{AD} \tag{2.3}$$

推导可得

$$OPD(\varphi) = t_n(n\cos\varphi' - \cos\varphi) \tag{2.4}$$

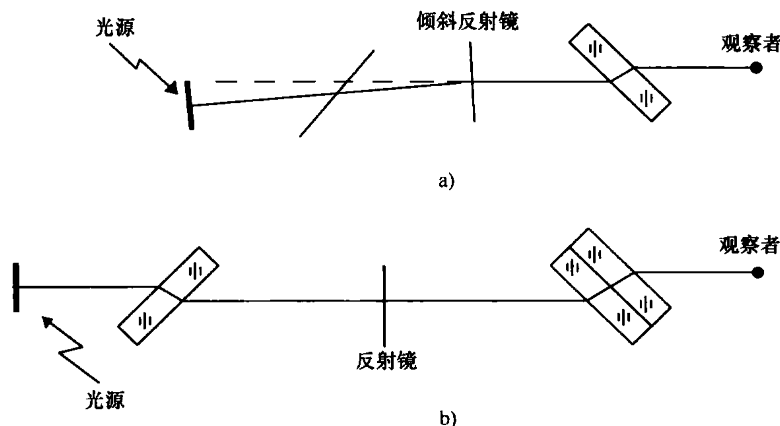


图 2.5 未补偿干涉仪两干涉光束对应的光路
a）倾斜反射镜光路 b）固定反射镜光路

如果平板相对于光轴倾斜了一个角度 φ_0，光线的方向可以通过角度 θ 和 ψ 来确定，如图 2.7 所示，两次经过平板导致的光程差为

$$\cos(\varphi) = t_n(n\cos\varphi_1' + \cos\varphi_2' - \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) + 2t_0\cos\theta \tag{2.5}$$

式中，下标 1 和 2 分别表示第一次和第二次通过平板；公式最后一项相当于一个反射镜沿光轴移动 t_0 所导致的附加光程差。角度 φ_1 和 φ_2 可以通过 θ、ψ 和 φ_0 利用以下公式计算得到

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_0\cos\theta + \sin\varphi_0\sin\theta\cos\psi$$
$$\cos\varphi_2 = \cos\varphi_0\cos\theta = \sin\varphi_0\sin\theta\cos\psi \tag{2.6}$$

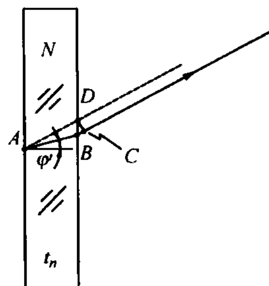


图 2.6 平行平板导致的光程差

如果玻璃平板垂直于光轴，则 $\varphi_0 = 0$ 且 $\varphi_1 = \varphi_2 = \theta$，从而 $\varphi_1' = \varphi_2' = \theta'$。在这种情况下，式（2.5）可以简化为

$$OPD(\theta) = 2t_n(n\cos\theta' - \cos\theta) + 2t_n\cos\theta \tag{2.7}$$

2.2.2 平板分光镜的精度要求

当使用平板分光镜构建一个泰曼-格林干涉仪时，为了满足干涉仪的精度要求，分光镜的每一个表面质量达到相应的要求就显得很重要。这些可以通过考虑如图 2.8 所示的模型来判定，该模型是一个具有三个厚度分别为 δt_1、δt_2 和 δt_3 的局部缺陷的分束器。

在这个模型中，利用了一个事实，即在缺陷 1 上产生向外的反射，如果反射发生的位置离平板有一个很小的距离 t，光程将减小，计算公式为

$$OPD = 2t\cos\theta \tag{2.8}$$

如果光束在平行平板玻璃的两个面上发生反射，产生的光程差计算公式为

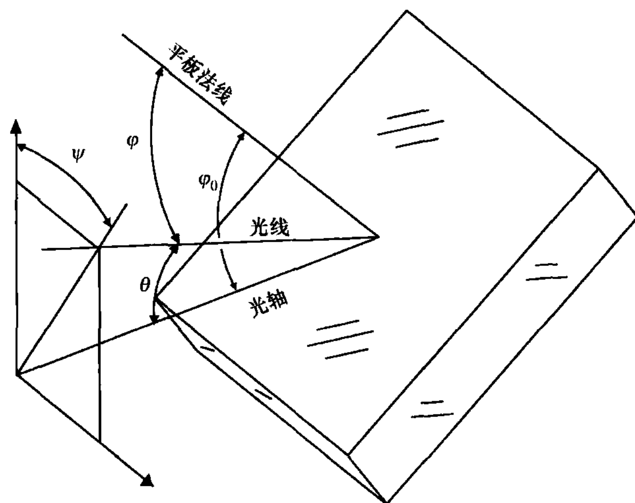


图 2.7 光线通过一个倾斜的平行平板

$$OPD = 2nt\cos\theta' \tag{2.9}$$

然而在局部缺陷 1 处产生向内的反射时，光程会增加。向上传输通过玻璃平板的厚度 t 后，由平板导致的附加光程差为

$$OPD = t_n(n\cos\theta' - \cos\theta) \tag{2.10}$$

然而，针对从反射镜 A 反射的光束，由平板缺陷引入的光程是

$$\delta OP_A = -2\delta t_1\cos\theta + (\delta t_1 + \delta t_3)[n\cos\theta' - \cos\theta] \tag{2.11}$$

而针对从反射镜 B 反射的光束，平板缺陷引入的光程是

$$\delta OP_A = -2n\delta t_1\cos\theta' + (\delta t_1 + 2\delta t_2 + \delta t_3)[n\cos\theta' - \cos\theta] \tag{2.12}$$

因此这两个量之间的差就是由平板误差导致的光程差

$$\delta OPD = -2\delta t_1(\cos\theta + n\cos\theta') + 2\delta t_2(n\cos\theta' - \cos\theta) \tag{2.13}$$

正如所预期的那样，该光程差与误差 δt_3 无关，因为该误差对两个光束都是共光路。当然对于一些光线而言，误差 δt_2 也就是误差 δt_3。

如果光程差 OPD 满足干涉仪的精度要求，平板第一个表面要求的精度 δt_1 为

$$\delta t_1 = \frac{\delta OPD}{2(\cos\theta + n\cos\theta')} \tag{2.14}$$

同理，平板第二个表面所要求的精度 δt_2 为

$$\delta t_1 = \frac{\delta OPD}{2(\cos\theta' + n\cos\theta)} \tag{2.15}$$

这一结果意味着，大致上反射面的抛光精度约为干涉仪要求精度的两倍，而另一个面的质量要求是干涉仪精度的一半。

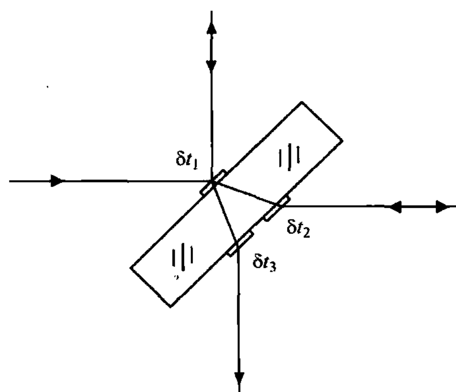


图 2.8 泰曼-格林干涉仪分束器表面误差的影响

2.2.3 偏振分光棱镜

分光镜还可以采用玻璃棱镜。可以使用非偏振分光镜，也可以用偏振分光镜。正如布鲁宁和赫里奥特（Bruning and Herriott，1970），还有布鲁宁等人（Bruning et al.，1974）指出

的那样，使用这种分光镜具有很多优势，这一点将在2.8.1小节中介绍。

分光棱镜主要的两个优点是可以自动地对干涉仪进行补偿，以及大多数分光镜的表面都是全介质型的，这样就没有吸收。如果使用的是偏振光，这样还会有一些其他重要特性。图2.9所示为使用偏振分光棱镜的泰曼-格林干涉仪，在其中，光的P偏振分量能够透射，而S偏振分量则将发生反射。如果入射光束是线偏振光，且偏振方向与直角棱镜的直边夹45°角，这样反射光强度等于透射光强度。但是，正如前文中提到的，如果反射镜 M_1 和 M_2 的反射率不同，可以将一个半波片放在分光棱镜前，这样可以使条纹对比度达到最大。如果入射光的偏振方向正好在波片的快慢轴之间，且夹角为 $\theta/2$，光的偏振面将旋转一个角度 θ。如果将波片旋转90°，其快轴和慢轴正好相互替换，此时位相或输出光束的偏振面将旋转180°。在这个角度下，S分量和P分量会如所希望的那样具有不同的强度。

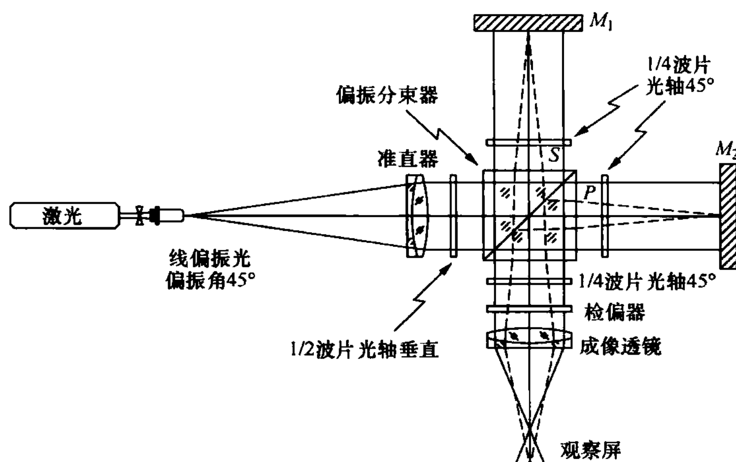


图2.9 使用偏振分光棱镜的泰曼-格林干涉仪

当透射光和反射光到达反射镜 M_1 和 M_2 后，两束光在返回分光镜前都沿45°角两次通过1/4波相位片。这样，两束光的偏振面都将旋转90°。这就使得返回的光束传输到观察屏而不会返回光源。这样使用一个非偏振分光镜时，就不会有反向的补偿干涉条纹。两组干涉条纹都将传输至观察屏，正如接下来将要描述的那样，不过可以将其分开。图2.10所示为沿着光传输轨迹中不同的几个点上光的偏振状态。可以看到，当两束光重合并传输离开分光镜后，两束光是正交偏振的，因此不会发生干涉。假设两束S偏振和P偏振的光，振幅分别是

$$E_x = A\mathrm{e}^{ikz} \text{和} E_y = A\mathrm{e}^{ik(z+OPD)} \tag{2.16}$$

式中，OPD 两束光之间的光程差。将一个光轴为45°的 $\lambda/4$ 波片放在分光镜后面，来将两束光转变为两个方向相反的圆偏振光。沿慢轴方向将两个光场叠加后的总电场表达式可以写为

$$E_{Slow} = \frac{1}{\sqrt{2}}A(1 + \mathrm{e}^{-ikOPD})\mathrm{e}^{ikz} \tag{2.17}$$

同理，沿快轴方向的总电场表达式为

$$E_{Fast} = \frac{1}{\sqrt{2}}A(1 - \mathrm{e}^{-ikOPD})\mathrm{e}^{ik(z+\pi/2)} \tag{2.18}$$

如果在这些圆偏振光的光路上放置一个线偏振片（检偏器），只有沿着与波片慢轴夹角为 α 的偏振片光轴方向的分量能够通过。这样，沿偏振片轴向的光振幅为

1/2波片轴向 θ	1/2波片轴向				1/4波片轴向	检偏器轴向
					1/4波片轴向	检偏器轴向
照明光束	通过1/2波片后	第一次通过光分束器后	通过反射镜后，经过分束器前	通过分束器后	通过1/4波片后	通过检偏器后

图2.10　2.9图所示的干涉仪中不同位置对应的偏振状态

$$E_\alpha = E_{Slow}\cos\alpha + E_{Fast}\sin\alpha \tag{2.19}$$

式（2.19）可以改写为

$$E_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} A(\mathrm{e}^{i\alpha} + \mathrm{e}^{-i\alpha}\mathrm{e}^{-ikOPD})\mathrm{e}^{ik\alpha} \tag{2.20}$$

或者等效为

$$E_\alpha = \sqrt{2}A\cos\left(\alpha + \frac{kOPD}{2}\right)\mathrm{e}^{ik(x-(OPD/2))} \tag{2.21}$$

因此，干涉条纹的辐照度可以表示为

$$I_\alpha = E_\alpha E_\alpha^* = A^2[1 + \cos(kOPD + 2\alpha)] \tag{2.22}$$

结论就是：检偏器轴向的方向 α 将改变干涉光束之间的位相差而不会影响到对比度。两干涉光束之间的位相差将随该角度线性地变化，将检偏器旋转 α 角，位相差将变化 2α。这一效应常常在相移干涉仪中使用。

2.2.4　非偏振分光棱镜

图2.11给出了前文所提到的那种非偏振分光棱镜且只使用了一个波片的泰曼-格林干涉

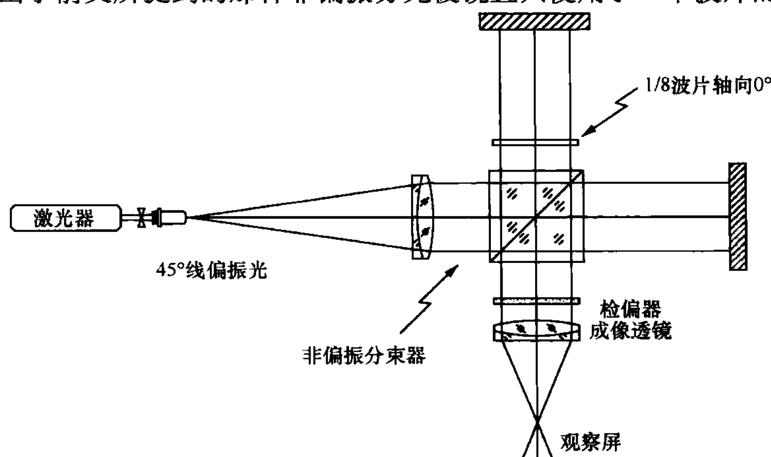


图2.11　使用非偏振分光棱镜的泰曼-格林干涉仪

仪。光源是45°线偏光，这也意味着其电矢量的 x 分量和 y 分量是相等的。通过1/8波片两次后，传输到分光镜的是圆偏振光，这也等于是说 x 分量和 y 分量之间的位相差为90°。

和先前的干涉仪一样，输出的光束不能产生干涉，因为其中一束是45°线偏振光，而另一束是圆偏振光。如果将一个检偏器放置在从分束器输出的干涉光光路上，就能看到干涉条纹，因为只有沿检偏器轴向，即与 x 轴夹角为 θ 的光分量能够通过。这一点是可以证明的，当检偏器的轴向角度为 θ 和 $\theta+90°$ 时，干涉条纹是互补的。干涉条纹的位相情况取决于检偏器轴向的角度，但就这种非偏振分光镜的排布方式而言，只有在检偏器轴向角度为 ±45°时，条纹的对比度最大。

2.3 相干性要求

光源的大小（空间相干性）和单色性（时间相干性）必须满足某一个与系统几何结构相关的最低要求，正如汉森（Hansen，1955、1984）和伯奇（Birch，1979）所描述过的那样。明确了解被检测的光学元件是否具有很高的反射率是必要的，光的偏振态会在反射时发生变化，从而引起条纹对比度的变化（Ferguson，1982）。然而，在大多数情况下，影响条纹对比度的重要因素是光源的相干性。

2.3.1 空间相干性

干涉仪光源的空间相干性和时间相干性都必须满足一些最低要求，这些要求取决于干涉仪的结构及特定的应用和需求。如1.1.2小节中介绍的，在一个针孔后放置气体和蒸汽灯可以用来作为干涉仪的照明光源。这些带有小孔的灯并不具备良好的空间和时间相干性。而气体激光器则具有完美的空间相干性和几乎完美的时间相干性。首先可能认为这是一种理想的干涉仪光源，但是实际情况并非如此。一般说来，相干长度太长，以至于从光学系统其他表面产生的很多并不希望有的反射，会在散斑噪声之外形成很多伪条纹，这会给干涉图的分析带来困难。而与之相反，太好的空间相干性会在光学元件上很多无法避免的小灰尘和划痕处形成散射球面波，这又会导致很多环状的干扰条纹。施温德（Schwider，1999）对这一问题进行过研究。

由此可以得出一个结论，通常情况下，气体或蒸汽光源相比激光而言是更好的选择。但是，如果光程差很大，那就不可避免要选择气体激光器。在本节中，将要介绍光源相干性的要求。

有两种情况会使得准直波前扩散为立体角为 2θ 的发散光束，因此可以推导出干涉仪的最终精度和条纹对比度。

1）准直仪具有球差，这样

$$\theta=\frac{TA}{f} \tag{2.23}$$

式中，TA 为准直仪在最佳聚焦条件下横向球差的最大值。这一像差会限制干涉仪的精度，除非 OPD 在角度 θ 改变时，能够保持不变。或者，当 θ 取最大值时，OPD 的最大变化量应小于所期望的精度。

2）光源并不是一个几何点，而是一个直径为 $2a$ 的小圆斑，这样

$$\theta=\frac{a}{f} \tag{2.24}$$

式中，f为准直仪的焦距。

根据瑞利判据，当使用一个扩展热光源时，只有当光源上 θ 不同的任意一点发出的两束光的光程差 OPD 小于 $\lambda/4$ 才能得到高对比度的条纹。而正好相反的是，从辐射测量上来考虑，往往要求光源尽可能大，这样才不会降低条纹的对比度。

当分束器是一个玻璃平板，而干涉仪并没有使用另外一块相同的玻璃平板进行补偿，可以证明此时最大的光源形状是椭圆形的。这就是在未补偿的迈克耳逊干涉仪中产生的条纹是椭圆形的原因。椭圆的形状和尺寸不但是 φ_0、θ 和 ψ 的函数，而且还取决于 t_0。

接下来将更加详细地分析玻璃板的法线与光轴方向一致这种较简单的情况。OPD 由式（2.7）给出，如图2.12所示，OPD 的值随 θ 的变化而变化，而且变化规律取决于 t_0 的值。基于准直仪展开的光源的角半径 θ 的最大允许值就是1/4光程差所对应的值。相反，由准直仪的球差导致的 θ 角的最大允许值，则是干涉仪期望精度对应的 OPD 的相应值。

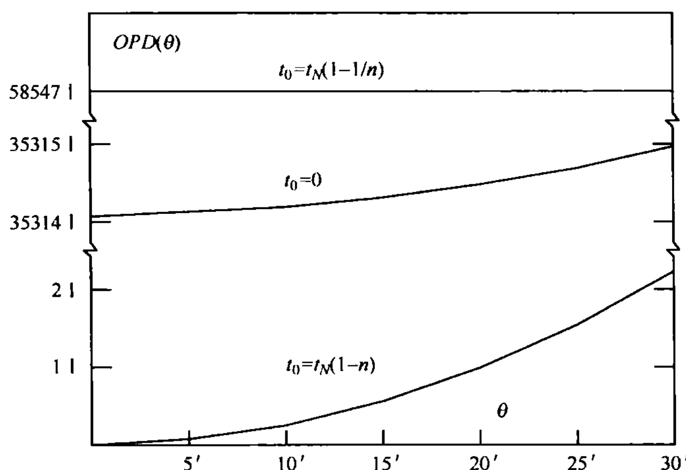


图2.12　法线方向与光轴相同的平行平板引入的光程差（$t=2\text{cm}$，$n=1.52$，$\lambda=589\text{nm}$）

当使用非单色光源来检测小口径光学元件时，可以将光程差调整到零。这样，就可以选择

$$t_0 = t_N(1-n) \tag{2.25}$$

这样 OPD（0°）$=0$，但是这种情况下需要一个更小的光源。应当指出的是，当检测一个大口径光学元件时，t_0 的值是不能够任意变化的，因为通常说来，这个值是非常大的。

如果使用了一个扩展的准单色光源，为了使得光程差对角度 θ 不敏感，也就是满足最佳条件

$$\frac{\mathrm{d}OPD(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0 \tag{2.26}$$

由此可得

$$t_0 = t_N\left(1-\frac{1}{n}\right) \tag{2.27}$$

有意思的是，可以看出这个公式等效于这样一种情形，即在干涉仪的两个臂上准直仪（或者是迈克耳逊干涉仪的光源）所成的像到观测者间的视距是相等的。正如斯蒂尔（Steel，1962）和斯蒂弗特（Slevogt，1954）指出的那样，如果认为光源两个像的角大小相同的话，这种情况看上去是合理的。

当使用的是扩展光源，而且干涉仪使用这种方法进行补偿，干涉条纹将定域在空间的某个确定平面上。要找到这个平面，必须将这个系统展开，正如汉森（Hansen，1942、1955）所研究的那样。对于一个使用平面反射镜的干涉仪，由于为了得到如图2.5所示的条纹，当其中一个反射镜发生倾斜时，光源所成像的移动方式决定了条纹的位置在平面反射镜附近。因此要看到条纹，观察系统必须聚焦在反射镜附近。

正如本章后面将要描述的那样，要对一个光学系统进行检测，其中的一个反射镜要换成这个被测系统，加上一些辅助的光学元件来将准直光束送回干涉仪，就像一个单一的反射镜那样。返回的准直光束必须具有相同的直径。因此不难得出结论，整个系统包括被检测的元件在内，具有以下主要特征：

1）它是远焦的。

2）其放大率要么是1，要么是-1。如果是-1，返回的波前将会相对于入射的波前旋转。

3）该系统是对称的，因此不存在彗差。

4）对于系统而言，入瞳和出瞳是对称放置的，而且具有相同的直径。

通过这些特性可以了解到，因为这个系统是反射式的（只有当放大率是-1时，它是一个反射镜），入瞳和出瞳在同一个平面上。一个重要的结论就是可以在这个入瞳和出瞳所在的平面观察到条纹。就这一问题，施温德和菲科斯多芬（Schwider and Falkenstörfer，1995）做过详细的研究。

应该注意到的是，整个系统的入瞳并不是必须与被检测透镜的光瞳一样。然而，当检测一个透镜时，要在光瞳处观察条纹，理论上两者应该是相同的。只使用一个单独的反射镜时不存在这个问题，因此反射镜可以尽可能地靠近透镜。这也就是在检测一个望远物镜时希望使用一个曲率半径尽可能大的凸面反射镜的原因（Steel，1966）。相反，显微物镜的入瞳在无穷远处，因此出瞳正好在后焦面上。戴森（Dyson，1959）介绍了一种光学系统，这种光学系统将在本书第12章中介绍，该系统的反射镜表面成像在显微物镜的后焦面上，这也正是希望得到干涉条纹的位置。

吉尔德（Guild，1920-1921）使用了稍有不同的方法研究了针孔光源尺寸的限制问题。设想将一个小光源扩大成为一个扩展光源，然后在透镜 L_2 前面放置一个目镜，如图2.1所示，构成一个望远系统。在这种条件下，就可以观察到同心圆形式的等倾条纹（就像通常在迈克耳逊干涉仪中观察到的那样）。如果反射镜的确与它们的光轴相垂直，这些条纹将是严格的同心圆。光源的理想尺寸是仅能观察到条纹中心斑时所对应的尺寸。虽然中心斑的有效尺寸还受到观察者眼睛瞳孔或相机光圈的限制，当使用前面提到的方法降低 θ 对 $OPD(\theta)$ 的影响后，中心光斑的尺寸将变大，这样就使得大尺寸光源的使用变得可能了。

在以上的所有讨论中，都假设了两个干涉波前具有相同的方向，也就是说两个波前之间没有任何的相对旋转或反转。换而言之，如果其中一束光发生了旋转或反转，那么另一束光也要旋转或反转。使用一个三角棱镜或者一个由聚光透镜和置于其焦点上的平面反射镜组成的猫眼后向反射镜，可以将波前旋转180°。使用由两个互相垂直的平面组成的反射系统，如普罗（Porro）棱镜，可以使波前反转。默蒂（Murty，1964）指出如果一个波前相对于另一个波前发生了旋转或反转，要得到没有相移的高对比度条纹，针孔的直径 2α 应该满足条件

$$2\alpha \leqslant \frac{1.22\lambda f}{D} \tag{2.28}$$

这样的话，波前的直径相对位置的点彼此相干。式（2.28）中f和D分别是准直仪的焦距和直径。这样2α非常小，以至于对于一些光源而言已经没有实际意义了。但是，如果使用的是气体激光器，由于它的辐射能量和空间相干性都非常高，也就不存在这个问题了。在第5章将对这个问题进行详细的研究。

正如以下章节将要介绍的那样，在检测一个光学元件时，波前有时会倒置（上下），反转（左右），或者旋转（两个方向都有），这与其中一个波前旋转180°是等价的。这就提高了空间相干性的要求。如果使用激光就不会有什么问题，如果使用的是气体或蒸汽光源，参考光源就也会像检测波前那样倒置、反转或者旋转。

如果没有选择，必须使用气体激光器作为光源，由于光程差很大，可以通过人为地降低光的空间相干性来减少散斑噪声和伪条纹。这可以通过在针孔平面上放置一小块旋转的毛玻璃板来实现，正如默蒂和马拉卡拉（Murty and Malacara，1965）、施温德和菲科斯多芬（Schwider and Falkenstörfer，1995），还有施温德（Schwider，1999）所介绍的那样。

2.3.2　时间相干性

式（2.5）给出的$OPD(\theta)$还附带了对光源单色性的一些基本的要求。首先考虑这样一种情况，由于没有补偿板，或者在一个臂上使用了带有透镜或者棱镜的光学系统，干涉仪未被补偿，可以将式（2.5）写为

$$\Delta OPD(0°)=2t_n\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)\Delta\lambda \tag{2.29}$$

再次使用瑞利判据　（$\Delta OPD\leqslant\lambda/4$）

$$\Delta\lambda\leqslant\frac{\lambda}{8t_n\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)} \tag{2.30}$$

由此可见，因为玻璃的色散（$\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda$）是绝不等于零的，而且$t_n$也不为零，所以如果干涉仪并未补偿时，带宽$\Delta\lambda$肯定不会是一个很大的值。如果对干涉仪进行了完全补偿，当OPD接近零时，可以观察到白光条纹。否则的话就必须使用如低压蒸汽灯或者（甚至更好的）气体激光器作为高单色性光源。

如果干涉仪的两个臂中有许多不同类型的光学元件，考虑到当干涉仪两个光路上光束的相位差与波长无关时，干涉仪对带宽$\Delta\lambda$而言是补偿了的，这样就可以采取更为一般的处理方法。根据斯蒂尔（Steel，1962）的结论，可以说，如果干涉仪的每一个臂都有一系列厚度为t，折射率为n的光学元件，这样两个臂上的位相差是

$$\phi=\frac{2\pi}{\lambda}\left(\sum_1 nt-\sum_2 nt\right) \tag{2.31}$$

当$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\lambda=0$时，相对相位与波长无关，由此得到

$$\sum_1\tilde{n}t=\sum_2\tilde{n}t \tag{2.32}$$

式中，$\tilde{n}$为群折射率，定义为

$$\tilde{n}=n-\lambda\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \tag{2.33}$$

因此，当两个光臂上的“群光程”相等时，干涉仪相对带宽$\Delta\lambda$而言是补偿了。斯蒂尔（Steel，1962）指出，光源带宽的补偿可以通过一个方向垂直于条纹方向的狭缝观察白光光

源分光仪后的干涉条纹形状来检验。光谱与干涉条纹相交叉，它们的倾角表明了条纹位置随波长的变化。如果带宽补偿是完美的，干涉条纹是与色散方向平行的直条纹。否则的话可以调节光学元件的光程，直到条纹在所使用的波长出现最大值（无倾斜）为止。如果光源的带宽非常大，那么就需要在两个臂上都使用相同类型和厚度的光学元件，来仔细地平衡光程。

如果 OPD（0°）非常大，就像在不等程干涉仪那样（详见2.5节内容），式（2.5）中的最后一项则将占优，因此式（2.5）可以写为

$$OPD(0°)=2t_0=m\lambda \tag{2.34}$$

但是根据瑞利判据，级次 m 从带宽的一端到另一端的变化不应该大于1/4，这样的话

$$m\lambda=\left(m+\frac{1}{4}\right)(\lambda-\Delta\lambda) \tag{2.35}$$

式中，$\Delta\lambda$ 为最大允许带宽。这样可以近似地得出

$$\Delta\lambda\leqslant\frac{\lambda}{8t_0} \tag{2.36}$$

因为一个带宽为 $\Delta\lambda$ 的光波对应的波列长度为 $\lambda^2/\Delta\lambda$，所以这个条件就等于是说光程差 OPD（0°）应该小于波列长度（或调制波长）的1/4。在未补偿干涉仪中，这一条件是与扩展光源的条件是相矛盾的。

当使用气体激光器时，会出现一个有意思且很实用的情况，这将在第2.5节不等程干涉仪中进行讨论。

2.4 泰曼-格林干涉仪的应用

使用泰曼-格林干涉仪可以检测很多不同类型的光学元件。其中最简单的就是如图2.13所示的那样检测平行玻璃平板。加入平行玻璃平板后引入的 OPD 为

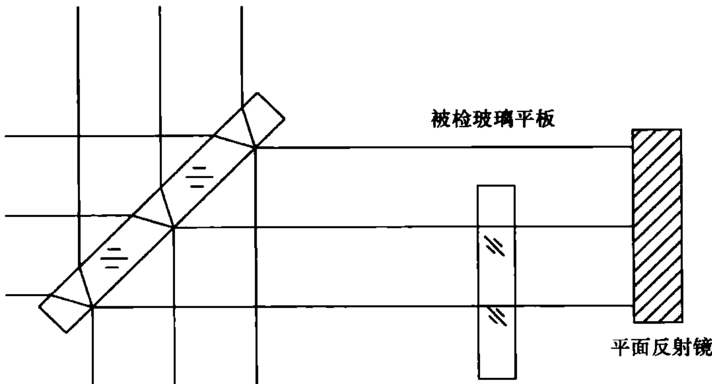


图2.13 检测平行玻璃平板

$$OPD=2(n-1)t \tag{2.37}$$

式中，t 为玻璃板的厚度；n 为其折射率。

如果在玻璃平板放入光路之前，调整干涉仪至观察不到条纹，放入玻璃板后出现的所有干涉条纹都是由于玻璃平板而产生的。如果视场里一直不存在条纹，可以认为 $(n-1)t$ 的值在

整个平板上是恒定的。如果看到了直条纹，可以认为玻璃的均匀性是非常好的（n 是常数），干涉条纹的出现是由平板的两个表面之间的夹角 ε 导致的，该角度的计算公式为

$$\varepsilon=\frac{\alpha}{2(n-1)} \tag{2.38}$$

式中，α 为两个干涉波前间夹的小楔角，可以由式（2.39）计算

$$\alpha=n\lambda \tag{2.39}$$

其中，n 为单位长度上观察到的干涉条纹数。

然而，条纹可能不是直的，而是如图 2.14 所示的那样，因为表面质量或者折射率的均匀性很差导致的严重扭曲，因为能够确定的只是 $(n-1)t$ 的值。要测量两个相互独立的变量 n 和 t，必须用非佐干涉仪来测定 nt 的值（Kowalik，1978）来对这个检测进行补充。使用这种基本的装置可以对很多不同类型的材料进行检测（Adachi et al.，1961、1962；Masuda et al.，1962；Twyman and Dalladay，1921-1922）。

在很多仪器中，当使用一个玻璃窗口时，一个重要的要求就是使用该元件所引入的光程差在整个口径内，如式（2.30）那样是一个恒定值。不过有时候使用的平板对可见光不透明，而只对红外光透明，而手边又没有红外干涉仪。如果假设折射率是恒定的，重要的参数就是恒定的厚度了。但是单独测量表面的平面度不能这样来测定，因为平板往往都很薄，会发生弯曲，而这一点对其应用并不重要。针对这种情况，威廉森（Williamson，2004）设计了一个如图 2.15 所示的光路结构，这种结构的主要特性是，如果平板有任何形式的弯曲，两个面中的一个所产生的变形会由于另一个面的相应变形而被抵消。

2.4.1　棱镜和衍射光栅的检测

泰曼-格林干涉仪对于棱镜检测是一种很有用的设备，尤其是在检测直角棱镜（普罗棱镜）、屋脊棱镜（阿米西棱镜）或者三面直角棱镜的 90°角的精确性时尤其管用的。正如前面解释过的，如果使用气体激光器，波前的相对旋转或反转是可以修正的，如图 2.16 所示。当使用气体激光器作为光源时，可以采用图 2.17 所示的光路结构。

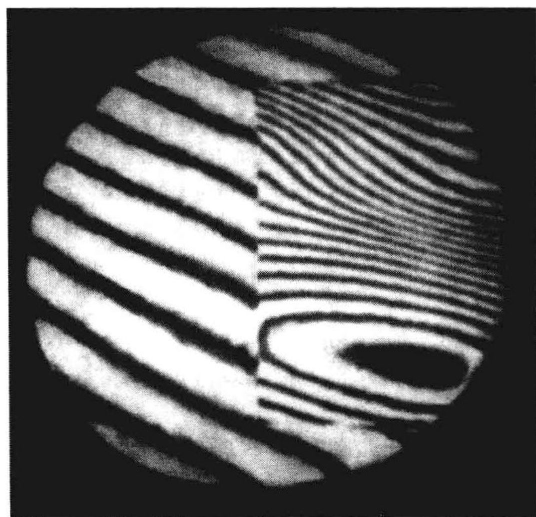


图 2.14　玻璃平板的干涉图

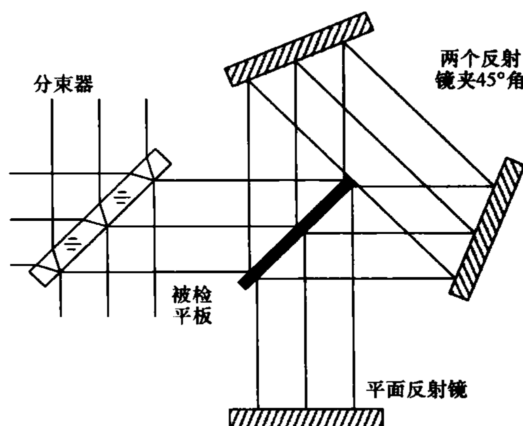


图 2.15　一个薄且易弯曲不透明玻璃薄板的检测

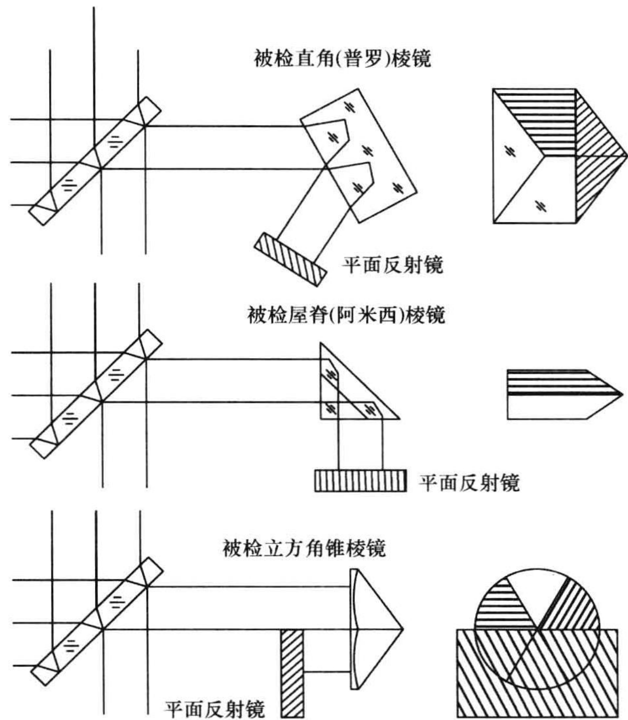


图 2.16 用泰曼-格林干涉仪对棱镜进行检测

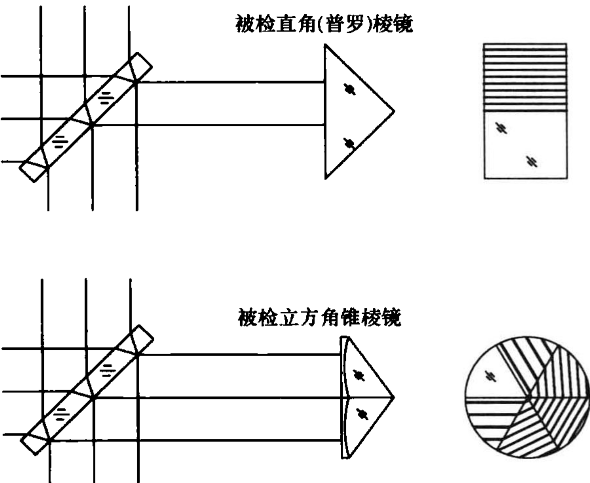


图 2.17 使用气体激光器作为光源时的光路

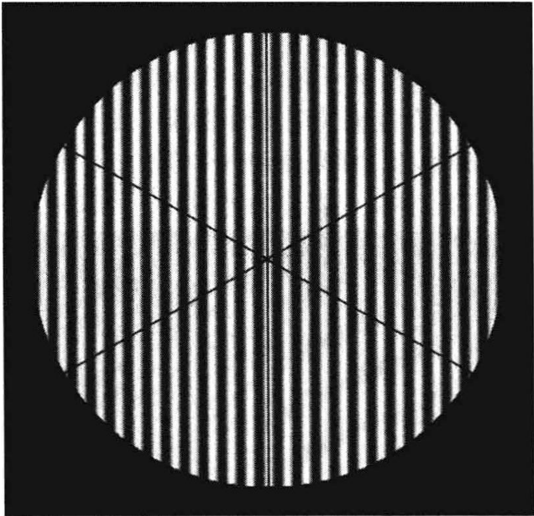


图 2.18 在反射光路结构中检测一个有一点倾斜的很好的三角棱镜得到的干涉图

一个非常好的三角棱镜能够得出如图 2.18 所示那样的干涉图，这些条纹在整个口径内都是直的。如果三角棱镜存在角度误差，所生成的干涉图如图 2.19 所示，直条纹的方向发生了很大的变化。托马斯和怀扬特（Thomas and Wyant，1977）对三角棱镜的检测进行了全面的研究。

图 2.20 和图 2.21 分别显示了没有误差和有一点角度误差的直角棱镜检测得到的相似的

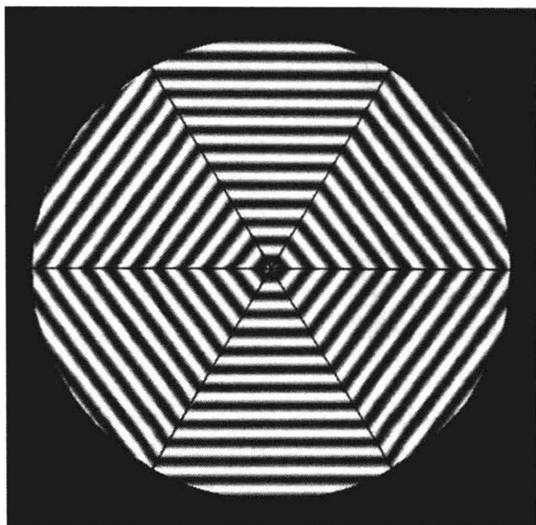


图2.19　在反射光路结构中检测一个平均倾斜量为零、表面之间夹角存在误差的三角棱镜所得到的干涉图

结果。除了角度误差外，如果表面不平整，或者玻璃材料不均匀，那会得到一个弯曲的干涉图。当使用反射光路结构来检测直角或者普罗棱镜时，并且表面平整度正好为90°，条纹为图2.20所示的平行的直条纹。如果直角存在误差，条纹就如图2.21所示，而且人为进行调整后，条纹如图2.22所示。这里简单地介绍一种方法来获取直角棱镜的角度误差。如果$2L$是棱镜入射面的宽度，$\pi/2\pm\varepsilon$是棱镜的角度，d是两条相邻条纹之间的距离，k是条纹弯曲后相对直条纹而言的弯曲量，n是棱镜的折射率，λ是使用的波长。如图2.23所示，该误差的计算公式为

$$\varepsilon=\frac{\alpha}{2n}=\frac{k}{d}\frac{\lambda}{4nL}$$

式中，α为两个出射光束之间的夹角。例如一个入射面宽度为100mm的棱镜，而且$k/d=0.25$，90°角的误差大概是1rad。关于误差的标记，用前文介绍的机械或手动法都可以。

图2.20　在反射光路结构中检测一个有一点倾斜的正直角棱镜得到的干涉图

图2.21　在反射光路结构中检测一个有一点角度误差的普罗镜得到的干涉图（该棱镜绕x轴存在一定倾斜，绕y轴平均倾斜量为零）

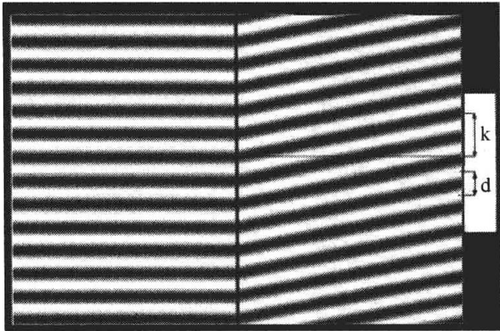


图 2.22 在反射光路结构中检测一个有一点角度误差的普罗镜得到的干涉图（该棱镜绕 x 轴存在一定倾斜，左侧部分绕 y 轴倾斜量为零）

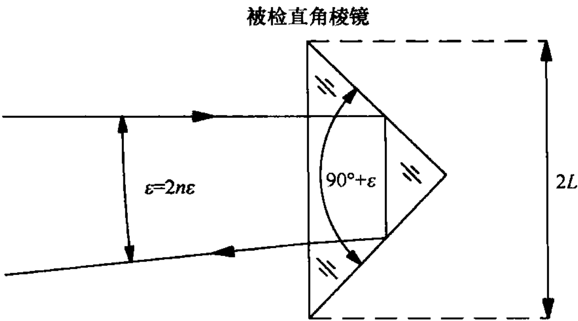


图 2.23 在反射光路中检测一个有很小角度误差的直角棱镜

伦伯格（Luneburg，1964）给出了一个计算棱镜屋脊面上的角度误差 ε 的方法

$$\varepsilon=\frac{\alpha}{4mn\sin\theta} \tag{2.40}$$

式中，n 为材料的折射率；α 为单程通过棱镜的两个出射波前间的夹角；θ 为屋脊棱镜边和入射光线之间的夹角；m 为光在屋脊面上反射的次数。就图 2.16 和图 2.17 所示的光路结构，能够得到如表 2.1 所列出的值。角 α 由式（2.39）计算，不过用这种方法调整干涉仪，一个面上的所有条纹会全部消失。

色散棱镜可以按照如图 2.24a 所示的方法检测。这种光路结构中，玻璃材料内部缓慢变化的不均匀性可以通过适当修整表面来进行补偿。使用泰曼-格林干涉仪还可以检测轴锥体，检测方法由梵托（Fantone，1981）提出，也称为反射法（Hayes et al.，1981）。

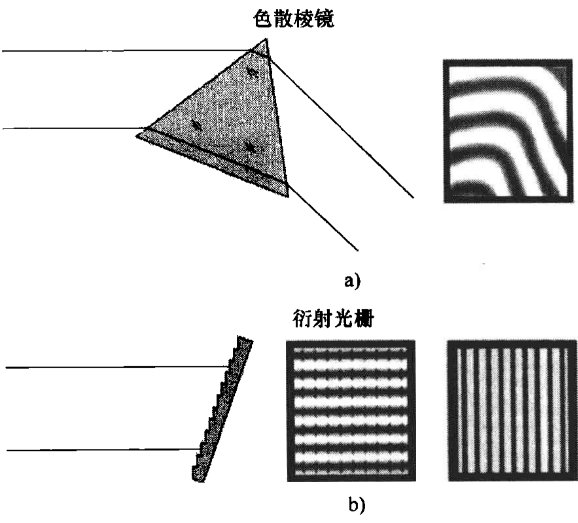


图 2.24 色散棱镜和衍射光栅的检测
a）检测色散棱镜 b）检测衍射光栅

表2.1 图2.16和图2.17中棱镜θ角和K的值

棱 镜	图 号	θ	$\sin\theta$	K
普罗	图2.10	60°	0.8662	2
阿米西	图2.10	45°	$1/\sqrt{2}$	2
立方棱锥	图2.10	54.7°	$\sqrt{2/3}$	2
普罗	图2.11	90°	1	1
立方棱锥	图2.11	54.7°	$\sqrt{2/3}$	1

1935年比萨克里和西米恩（Bisacre and Simeon，1935）提出了一种使用泰曼-格林干涉仪来检测衍射光栅的方法。遗憾的是，他们从未将研究结果整理发表（Candler，1951）。他们使用的光路结构如图2.24b所示。首先对干涉仪进行初始化调整，得到一级水平条纹。然后旋转光栅使条纹移动至第三级，在三级条纹中，如果存在鬼线，这些鬼线是很强的。如果存在鬼线，而且绕光栅色散的轴向有一个倾斜量，这时干涉条纹呈现锯齿形。当水平干涉条纹的间距随着光栅倾斜量的取消而增大时，锯齿会变得越来越大，直至形成一套由于零级衍射光和鬼线波前干涉形成的垂直方向的干涉条纹。使用这种干涉仪，贾若斯泽维克（Jaroszewics，1986）还对一个平面光栅的空间误差进行了检测。

2.4.2 透镜的检测

泰曼-格林干涉仪早期的一个应用就是检测透镜和相机物镜（Twyman，1920），包括测定色差（Martin and Kingslake，1923-1924）。检测会聚透镜可以采用图2.25中的任何一种光路结构。使用一个曲率中心正好在透镜焦点上的凸球面反射镜来检测长焦距透镜，而凹球面反射镜则用来检测短焦距透镜。还可以在透镜焦点处放置一个小的平面反射镜，这样做是很有用的，因为平面反射镜中实际使用到的那部分面积是很小的，所以它的表面不需要非常精确。然而，根据2.3.1小节中介绍到的空间相干性要求，如果不使用激光作为光源，就必须在干涉仪的另一个臂上采用相同的光路结构，或者是使用三面直角棱镜。这种方法的另一个特点是消除了彗差这样的非对称像差，只剩下了像球差和像散这样的对称像差。

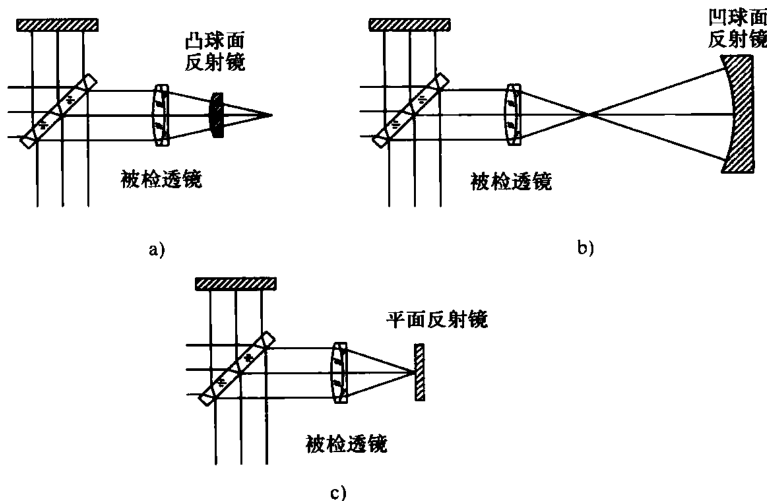


图2.25 三种用于透镜检测的光路结构

当对透镜进行离轴检测时，使用如图2.26所示的那种组合棱镜光具座是比较方便的。被检透镜 L 安装在一个旋转底座上，这样透镜能够绕节点 N 旋转。因为焦面往往被设计为一个平面而不是球面，所以要推动一个支撑在金属条 PF' 上的反射镜 M，使其向后移动一小段距离 FP，而金属条与对应的透镜 L 是刚性连接的。所得到的含有三级像差的透镜干涉条纹将在2.7节中介绍。

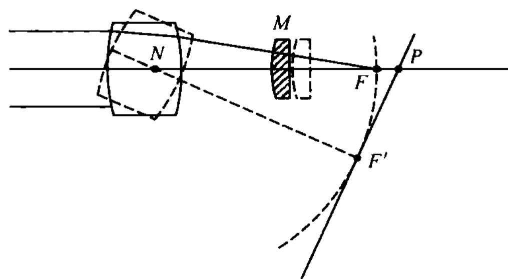


图2.26 使用组合光具座检测棱镜

使用泰曼-格林干涉仪检测一个大口径透镜，需要使用一个比透镜口径还要大的平板分光镜。为了回避这个难点，根据伯奇（Burch，1940）的研究结果，威廉斯（Williams）和后来的霍普金斯（Hopkins，1962）提出使用一个基于气体激光器的非等程光路结构。

奥斯托夫斯卡娅和费里莫诺娃（Ostrovwkaya and Filimonova，1969）的研究表明，泰曼-格林干涉仪在检测很小口径的望远镜时，也能够得到很好的结果。

2.4.3 显微物镜的检测

泰曼（Twyman，1920、1923）还使用这种干涉仪成功地检测了显微物镜。所使用的光路结构从本质上说与检测透镜使用的是相同的，不过一般说来，不使用凸面反射镜，因为显微物镜的焦距短。由于显微镜有时候是在有限筒长下工作，因此加入了一个负透镜来改变准直光，同时模拟一个16cm远处的光源。这个透镜的球差必须校正，但是不需要校正其色差。如图2.27所示，检测物镜可以使用好几种光路结构，最常用的是曲率中心与物镜焦点重合的球面反射镜那种结构。一个比半球稍厚一点的实心球面反射镜可以用来模拟存在防护玻璃罩的情况。

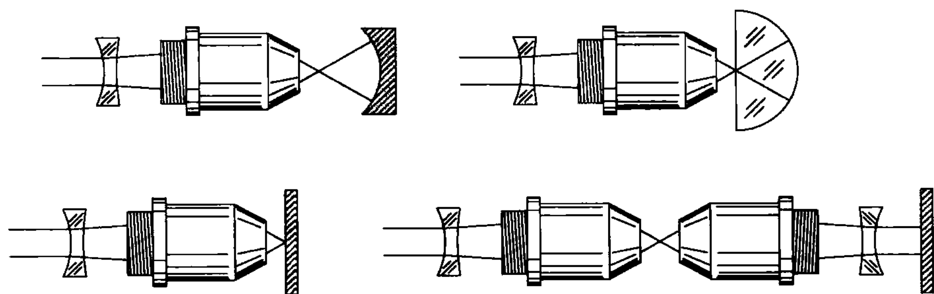


图2.27 检测显微物镜

还可以在物镜焦点上放置一块平面反射镜，但是在这种情况下波前会旋转180°。因此要么使用激光光源，要么在另一个臂上将波前旋转一下。要实现波前的旋转可以通过一个三角棱镜来实现，或者使用另一个带有相同平面反射镜的显微物镜的系统来实现。应该指出的是，在这种情况下，出现的干涉图样显示了两个物镜的像差之差。

第四个光路结构是由两个相对放置的显微物镜组成的。在这种情况下，干涉图像显示了两个物镜像差的和。但是，当被检测的像差比较大，或者针孔比较大时，最好使用第12章中介绍的Dyson系统光路结构。

2.5 干涉仪内部畸变的补偿

由于光学元件的缺陷，泰曼-格林干涉仪自身很容易产生畸变，因此干涉条纹的图像就是被检测光学系统的畸变与干涉仪内部畸变共同作用的结果。基本上最终的畸变来源有三个，参考光路 W_{ref}、检测光路 W_{test} 以及被检光学元件或光学表面 W_{surf}。要想将光学表面的畸变单独取出来，可以使用杰森（Jensen，1973）提出的方法。整个过程需要对被测表面在不同的位置和方向上进行三次不同的测量。要描述该过程先假设如下三个测量。

1）如图 2.28a 所示，在通常的检测位置，干涉图的误差可以写为

$$W_{0^\circ} = W_{surf} + W_{ref} + W_{test} \tag{2.41}$$

2）如图 2.28b 所示，在通常的检测位置，但是将被检表面旋转 180°，干涉图的误差则是

$$W_{180^\circ} = \overline{W}_{surf} + W_{ref} + W_{test} \tag{2.42}$$

式中，W_{surf}上的横线表示波前误差被旋转了 180°。

3）如图 2.28c 所示，将被检光学表面的定点放置在聚焦透镜的焦点处，此时表面误差不会出现在干涉图中，然而反射波前发生了旋转。于是得到

$$W_{focus} = W_{ref} + \frac{1}{2}(W_{test} + \overline{W}_{test}) \tag{2.43}$$

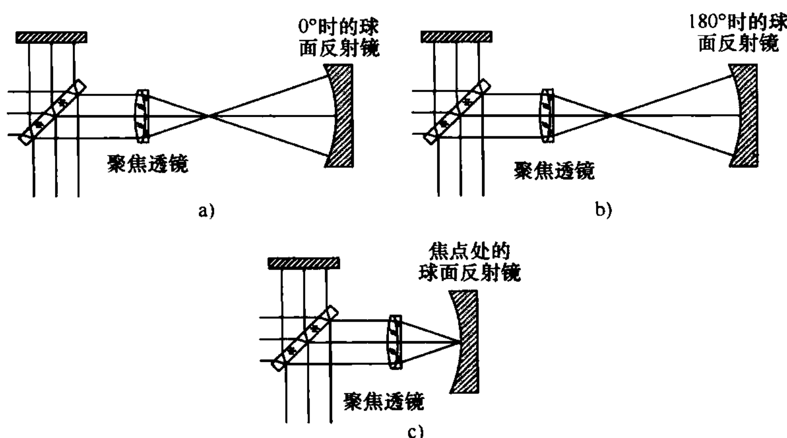


图 2.28 通过单独检测一个凹球面来对泰曼-格林干涉仪进行校准
a）通常的检测位置 b）通常的检测位置、被检表面旋转 180° c）被检光学表面在聚焦透镜的焦点

针对这三个公式中的任何一个，都可以使用相同的方式来旋转所有的波前，且不会影响公式的有效性。通过在原本顶上没有横线的 W 上加上横线，或者将 W 上原来有的横线取掉来表示波前的旋转。根据这一特性，可以得到以下公式

$$W_{surf} = \frac{1}{2}(W_{0^\circ} + \overline{W}_{180^\circ} - W_{focus} - \overline{W}_{focus}) \tag{2.44}$$

从式（2.44）的形式可以看出干涉仪的误差已经被降低了，使得该设备就像不存在任何自身误差一样。如果要检测大量相似的球面表面，设备内部误差可以表示为

$$W_{ref} + W_{test} = \frac{1}{2}(W_{0^\circ} - \overline{W}_{180^\circ} + W_{focus} + \overline{W}_{focus}) \tag{2.45}$$

一旦干涉仪被校准后，如果被测表面的曲率半径与校准用反射镜的曲率半径相近时，干涉仪的内部误差可以被消除。

遗憾的是，正如克里斯和怀扬特（Creath and Wyant，1992）指出的那样，这种方法对诸如被测表面在旋转和移动中产生的轴向偏差和倾斜这样的试验误差很敏感。考虑到这一点，他们提出了一种简单的方法，干涉仪的内部误差和球面的误差都差不多是旋转对称的。这样从式（2.41）~式（2.45）可以推导出

$$W_{surf} = W_{0^\circ} - W_{focus} \tag{2.46}$$

这样内部误差正好等于 W_{focus}。必须指出的是这种方法在泰曼-格林干涉仪中的应用与在非佐干涉仪中应用效果一样好。

2.6 非等程干涉仪

在2.3节中，我们讨论了泰曼-格林干涉仪的相干性要求，并且指出在使用激光光源时，可以引入很大的 *OPD*（Morokuma et al.，1963）。为了说明这一点，首先要研究一下激光的光谱。使用多纵模气体激光器照明时干涉仪的可见度如图2.29所示，气体激光器发出来的光通常有频率间隔为 $\Delta\nu$ 的几条光谱线（纵模）组成，$\Delta\nu$ 的计算式为，

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L} \tag{2.47}$$

如果激光器的腔长因为某种原因（热膨胀或收缩、机械振动等）发生变化，谱线将在保持其间隔 $\Delta\nu$ 不变的前提下发生频率漂移，但是谱线强度仍将如图2.29中虚线包络（功率增益曲线）里面的那样。

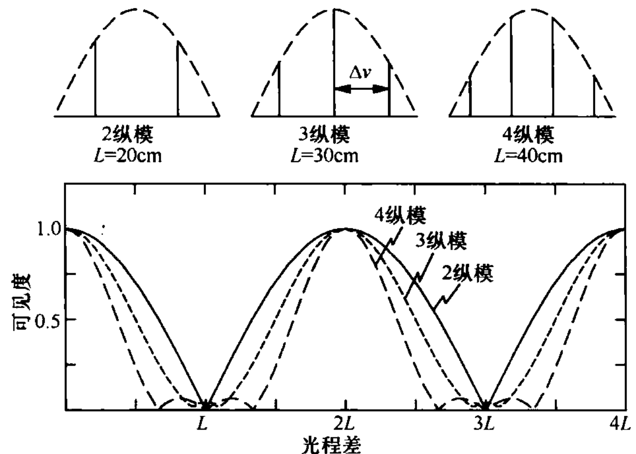


图2.29 使用多纵模气体激光器照明时干涉仪的可见度

只有一条谱线的激光器称为单模或单频激光器。这种激光器能发出理想的非调制波列，但是由于腔长 L 也不稳定，其频率也是不稳定的。不过通过使用伺服系统，可以生产出商用化的频率极稳定的单频激光器。因为可以引入足够的光程差还不会降低条纹的对比度，因此单频激光器对干涉仪而言是一种理想的光源，遗憾的是这种激光器非常贵，而且输出功率很低（小于1mW）。即便是这样，一个1mW的激光器其辐照度比其他任何类型的干涉仪光源要高。

可以证明，当使用一个多纵模激光光源时，干涉仪的理论可见度如图2.29所示（Collier et al.，1971）。因此为了得到更高对比度，*OPD*（0）必须近似等于2L的整数倍，即

$$OPD(0) = 2t_0 = 2ML \tag{2.48}$$

所以当干涉仪中的反射镜通过调整满足这个条件时，激光是非常适合在泰曼-格林干涉仪中使用的。因为存在机械不稳定性，激光腔总是在振动，所发出的谱线其频率也始终是不稳定的。这对于 *OPD* 在1m左右的小光程差的情况不存在什么严重的问题，但是正如巴蒂希科和香农（Batishko and Shannon，1972）研究得到的那样，一旦光程差很大，达到或超过

10m 时，条纹对比度会发生近似周期性的变化。要克服这一影响所带来的困难，他们建议使用曝光时间为 1/250ms 的镜头来拍摄干涉条纹。这个曝光时间对于避免干涉条纹的振动而言时足够快了，但对于获取干涉条纹对比度的变化而言又是足够慢的。

巴尔霍恩等人（Balhorn et al.，1972）、贝内特等人（Bennet et al.，1973）及戈登和雅可比（Gordon and Jacobs，1974）提出了一种方法来稳定双模激光器的纵模，从而避免条纹对比度的变化。

泽林斯克（Zielinski，1978、1979）提出了一些对准和调整非等程干涉仪的建议。

2.6.1 几种特殊设计

随着激光的出现，使得大光程差的泰曼-格林干涉仪的应用成为现实。第一个提出这个想法的人大概是霍普金斯（Hopkins，1962）。格里古尔和罗丁科尔德（Grigull and Rottenkolder，1967）根据威廉姆斯光路结构制作了一个这种类型的设备，用于风洞观测和球面镜检测。

豪斯顿等人（Houston et al.，1967）设计了一种用于光学车间检测的多功能非等程干涉仪，这种干涉仪的结构如图 2.30 所示。以布儒斯特角放置的分光镜。其两个表面之间有 2～3分弧度的夹角。为了消除像散和其他不必要的影响，分光镜的反光面放置在接收被检样品反射回来的光线的位置上。将一个两个透镜组成的光发散器放在干涉仪的一个臂上。透镜由高折射率玻璃制成，每一个面都是球面，对表面的检测能力为 $f/1.7$。使用一个零透镜，再结合光发散器，可以对非球面元件进行检测，零透镜的放置和排列如图 2.31 所示（详见第 12 章内容）。

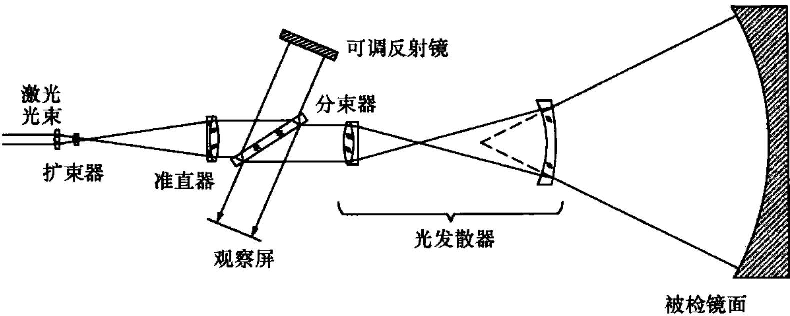


图 2.30 Houston 的非等程干涉仪

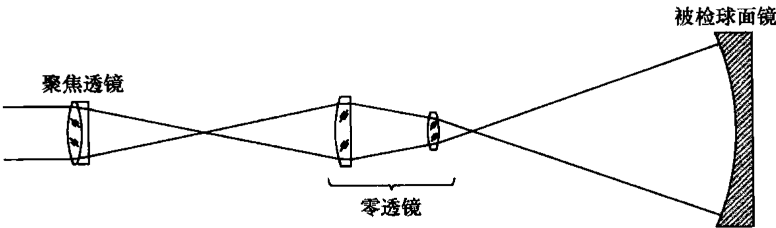


图 2.31 非等程干涉仪的零透镜的放置和排列

科克尔（Kocher，1972）设计了另外一种非等程干涉仪，如图 2.32 所示，这种设备与

图2.2所示的泰曼-格林干涉仪非常相似。它最主要的特点是在发散光束中使用了一个厚基底分光镜。这样一个平板会引入误差，但是能够有意地使得两个臂上的误差相等。如果分光镜整体的厚度能够保持较小值时，就一级近似而言对条纹图案没有影响。布依恩等人（Buin et al.，1969）介绍了非等程干涉仪在工业上的成功应用。

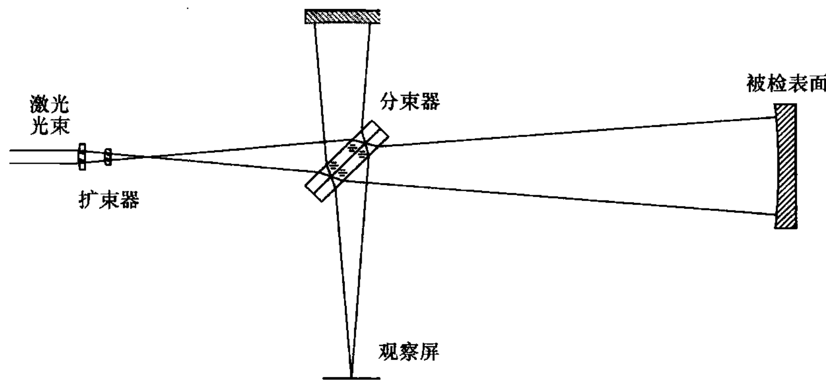


图2.32 Kocher的非等程干涉仪

2.6.2 提高条纹稳定性

非等程干涉仪常常会遇到这样的问题，即由于被检表面的抖动导致条纹很不稳定。大部分的镜面抖动都主要是前后俯仰和左右倾斜两个分量，而沿光轴的前后方向分量很少见。如果光学元件足够厚，弯曲则一般不是主要的问题。这样，一个显而易见的方法就是配置一套光学系统，这样被检抖动系统波前的反向对称分量就能消去。这种方法的缺点就是一些反向对称的像差，如彗差，不能检测。

图2.33所示为基于这种观点的一个可行的光路结构。发散光束从干涉仪中输出，照在被检的凹面上，然后反射到一个会聚光束且会聚在靠近元件曲率中心的一个小平面反射镜上。然后，光束又传回反射镜上，不过返回的波前相对入射波前而言已经发生了180°的旋转。这一个波前的旋转就消除了波前误差的所有反向对称分量，仅保留了对称分量。

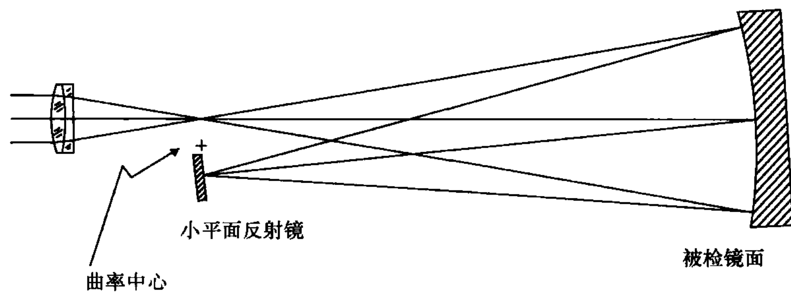


图2.33 利用一个小反射镜消除波前的反向对称误差，从而实现干涉条纹的稳定

在参考波前上引入一个完全相同的振动也能够从干涉图上消除镜面的抖动。哈德斯提（Hardesty，1979）给出过一个光路结构，其中干涉仪的参考臂与检测臂一样长，同时参考反射镜尽可能地靠近被检元件，这样它们的振动就是同步的。

抑制振动的第三种方法就是使用一个光探测器来探测振动，然后根据探测到的信号将参

考镜面向相反的方向移动（Cole et al.，1997）。这是一个闭环伺服系统，其中使用了一个频率为几千赫兹的位相调制器。

第四种方法是尽可能快地抓拍干涉图，这样振动不会对图像产生影响。这一点可以实现，但是如果需要几幅不同位相的干涉条纹时，比如在相移干涉仪中，这种方法就会受到限制。现在已经设计出了一些可以同时测量四幅不同位相干涉图的干涉仪。

2.7 开放光路干涉仪

在泰曼-格林干涉仪中，光束要两次通过被检光学元件。可是有时候必须让光束只通过样品一次，这一点可以通过展开光路，来对泰曼-格林干涉仪的光路结构进行改进来做到。这里将介绍包括马赫-泽德干涉仪在内的几种可能的光路结构。

2.7.1 马赫-泽德干涉仪

如前面指出的，相对于泰曼-格林光路结构而言，图2.34所示为马赫-泽德干涉仪的基本结构，它具有一些优势。比如说，如果被检样品具有很大的误差，那么最好只让光束通过样品一次。另外一个优点就是因为有两个分束器，这种干涉仪是自动补偿的。

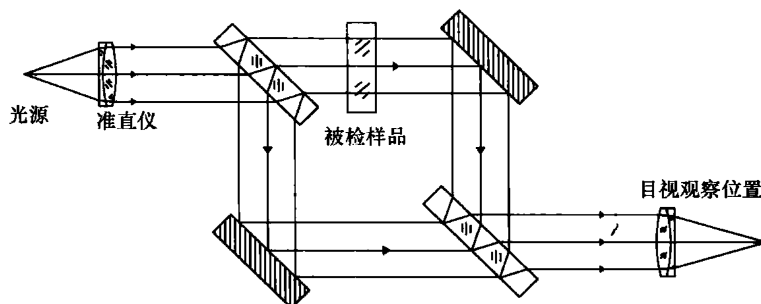


图2.34 马赫-泽德干涉仪的基本结构

Wyko公司制造的一个商用的马赫-泽德干涉仪，用于检测半导体激光器波前质量，其光路如图2.35所示，为了检测光源的波前质量，在一支光路上使用了一个针孔，由此产生了一个理想的波前（Leung and Lange，1983；Creath，1987）。马赫-泽德干涉仪还可以用来检测离轴非球面（Gerth et al.，1978）。库尔拉德等人（Cuadrado et al.，1987）介绍了一种使用等边双曲线波带片来对准马赫-泽德干涉仪的方法，弗拉克（Flack，1978）分析了被检元件未对准导致的误差。

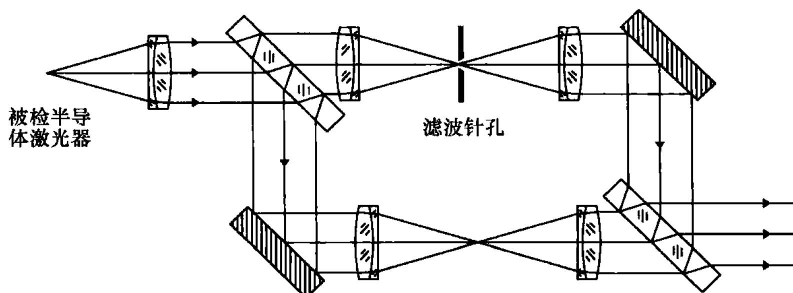


图2.35 用于检测半导体激光器波前质量的马赫-泽德干涉仪的光路

有时候，为了节省一个反射镜，会使用如图 2. 36 所示的三角形光路结构。

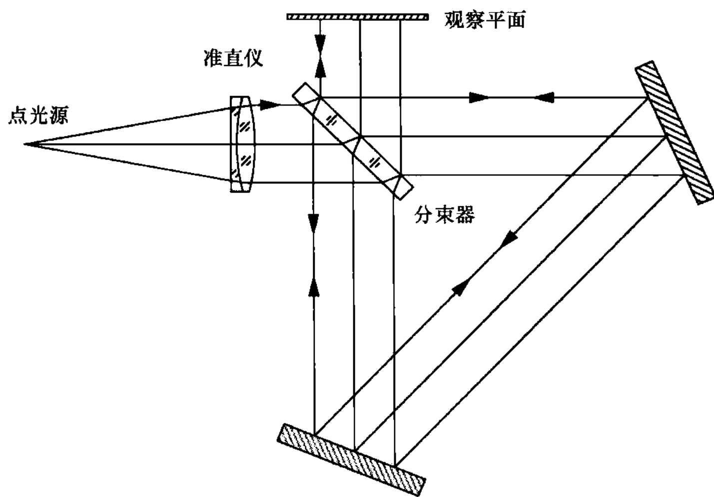


图 2. 36　三角形光路结构

2. 7. 2　倾斜入射干涉仪

另外一种双光束干涉仪具有三角形光路，这样其中一束光是倾斜地反射到被检平面上。很容易证明，在这种条件下，被测表面上一个高度为 h 的小误差引起的波前误差为 $2h\cos\theta$，其中 θ 是入射角。这个干涉仪的感光度就会因为 $\cos\theta$ 这个因子而降低。倾斜入射的另外一个结果就是被检表面的反射率会极大增加。这样，倾斜入射干涉仪非常适合用于检测粗糙表面或者配对平面的检测，这些表面的平面度和反射率不够好，不能使用传统干涉仪检测。

林尼克（Linnik，1942）、桑德斯和格勒斯（Saunders and Gross，1959）、伯奇（Birch，1973、1979）、哈里哈伦（Hariharan，1975）及麦克贝恩（MacBean，1984）都对倾斜入射干涉仪进行过描述。这些干涉仪中有一些使用衍射光栅作为分束器，如哈里哈伦介绍的如图 2. 37 所示的结构。琼斯（Jones，1979）指出，使用倾斜入射干涉仪可以检测微微粗糙的平面，或者是接近平面的非球面。

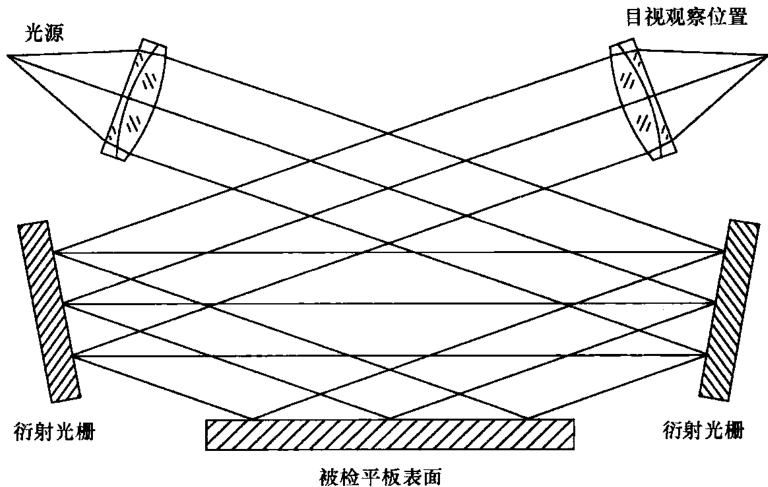


图 2. 37　使用衍射光栅分束器的掠入射干涉仪

2.8　泰曼-格林光路结构的变形

现在已经有了很多种泰曼-格林干涉仪的变形结构，其中比较引人注意的是由范·希尔和西蒙斯（Van Heel and Simons，1967）及巴西莱（Basile，1979）设计的一些小型的、紧凑的干涉仪。在泰曼-格林干涉仪中使用一个长波长（10.67μm）二氧化碳激光器作为光源，用以测量未抛光或粗糙的表面（Munnerlyn et al.，1969；Kwon et al.，1979；Lewandowski et al.，1986）。

另外一个引人注目的进展是研制出了一种廉价的干涉仪，利用一幅全息图可以修正其缺陷（Roger,1970）。首先在一个很便宜的、不是很好的干涉仪中引入一个很大的倾斜，再拍出一幅干涉图照片。这样会得到一组特别清晰的条纹，虽然用肉眼观察不到，但是可以拍摄到。再把同一块底板放入被检平板所在的干涉仪中后，将其曝光1s。这样在底板上会出现莫尔条纹，给出了被检平板表面质量的轮廓。

陈和布莱希特（Chen and Brechinridge，1982）设计了另外一种有意义的全息泰曼-格林干涉仪。在他们的设计中，一个单个全息光学元件集合了分束器、光发散器、零补偿透镜的功能。麦克多内尔和德扬（McDonell and DeYoung，1979）利用全息补偿器设计了一个大口径的干涉仪。

2.8.1　多幅成像干涉仪

在干涉仪中使用偏振光是为了同时获得多幅具有固定相位差的不同泰曼-格林干涉条纹，可以利用检偏器的方向来选择这些条纹的位相值。在2.2.4小节中介绍的干涉仪能够产生两幅互补的干涉图，其光路排布如图2.38所示。如果两束返回光源的光束能够通过另一个偏振分光镜被观察到，可以获得具有不同相位值的四幅不同的条纹图案。这样的干涉仪可以通过使用四个独立的相机来构建，但是这个系统很难校准。米罗德、布洛克、海斯、吉姆布拉夫、诺凡克罗斯-莫瑞斯（Millerd，Hayes，Kimbrough，Novak，North-Morris，2005）等人所介绍的另一个系统则不存在这个问题。他们在CCD光电探测器前面设置了一个如图2.39所示的特制光屏，通过使用全息元件将相同的成像范围投影到四个像素组成的一个组合上，CCD相机的像素存在四个不同取向的检偏器，这样就可以同时获得四幅相移干涉图。

2.8.2　使用衍射分光镜的干涉仪

一些双光束干涉仪也可以认为从基本的泰曼-格林干涉仪改进而得的。其中一些使用如图2.40所示的衍射光栅作为分束器，默勒西尼等人（Molesini et al.，1984）介绍了这种结构。这种特殊光路结构的优点是可以容忍相对较大的光栅平面度误差。在接下来的小节中，我们将会看到其他一些使用衍射光栅作为分束器的干涉仪。

2.8.3　相位共轭干涉仪

相位共轭镜在干涉仪中是一种非常有用的工具，它们降低了对理想参考波前的需求。如图2.41所示，泰曼-格林干涉仪使用了范伯格（Feinberg，1983）和豪斯（Howes，1986a、1986b）介绍过的相位共轭镜。相位共轭镜是由$BaTiO_3$晶体制作，其C轴与晶体的一个边平

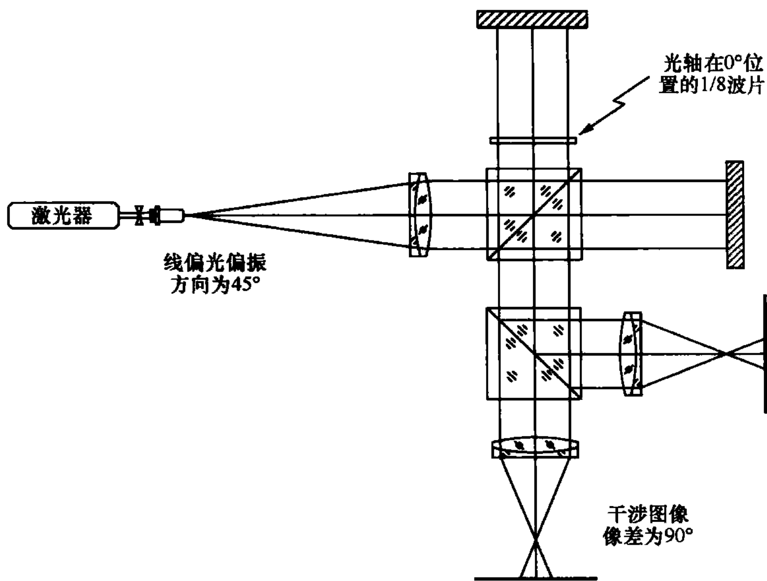


图 2.38 使用非偏振棱镜分光镜的泰曼-格林干涉仪

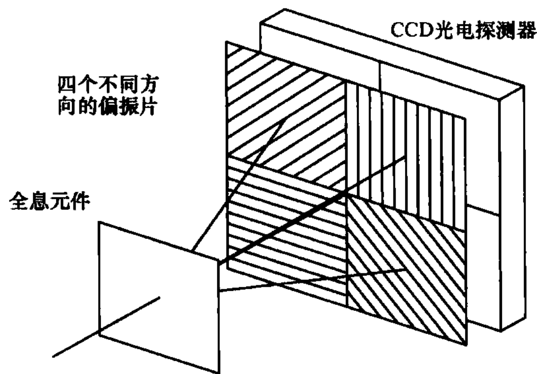


图 2.39 使用前方放有偏振元件的 CCD 光电探测器同时产生四幅不同像差干涉图的光路结构

行，入射光和与光轴垂直的平面之间的夹角为 20°。通过四波混频可以获得相位共轭。通过一个 30mW 的氩离子激光器发出的入射光在晶体的各个面间发生内反射，而自动生成泵浦光。因此这是一个自泵浦相位共轭镜。

这种自共轭镜的优点是入射到镜面的波前将沿着与入射波前相同的光线方向反射。这样波前变形改变了符号。因为反射的光线与入射光线的方向是相同的，聚焦透镜的质量就不再重要了。但是光源准直镜的质量是很重要的。最终的干涉图上会出现由这个准直镜产生的复制的波前畸变。换句话说，一个与平面参考光相反的波前是不能检测的，但是可以检测一个波前畸变符号正好相反的波前。

那么，被检透镜就是准直器，其灵敏度与普通的泰曼-格林干涉仪相同，不过光束只是单程通过透镜。这样的好处是不再需要一个理想的透镜，而缺点就是需要使用氩离子激光器。

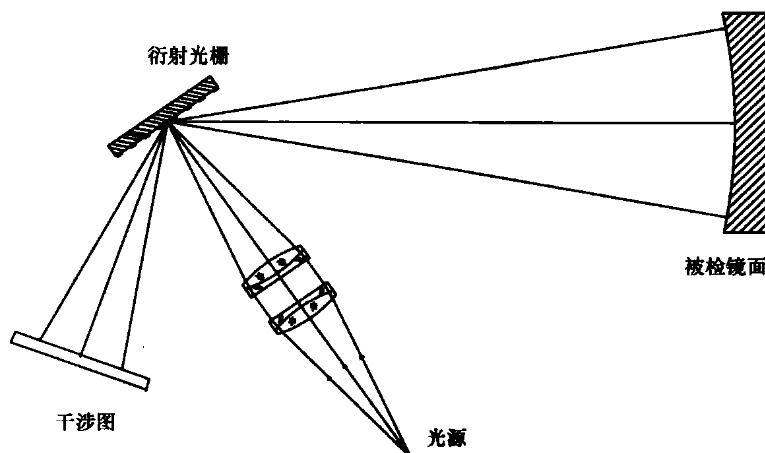


图 2.40　使用反射光栅作为分光镜的倾斜入射干涉仪

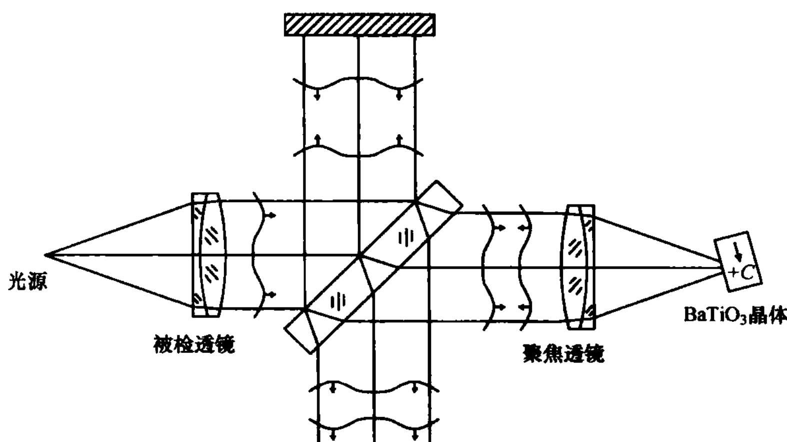


图 2.41　使用相位共轭镜的泰曼-格林干涉仪

2.9　泰曼-格林干涉图及其分析

像差的干涉图可以利用金斯莱克（Kingslake，1925-1926）提出的波前方程来描述，该方程形式为

$$OPD = A + Bx + Cy + D(x^2 + y^2) + E(x^2 + 3y^2) + Fy(x^2 + y^2) + G(x^2 + y^2)^2 \qquad (2.49)$$

式中，A 为常数项（平移）；B 为相对 y 轴的倾斜；C 为相对 x 轴的倾斜；D 为参考球面变化，也称为离焦；E 为沿 y 轴的径向像散；F 为沿 y 轴的径向彗差；G 为初级球差。

在极坐标（ρ，θ）下，式（2.49）（$x = \rho\cos\theta$，$y = \rho\sin\theta$）可以改写为

$$OPD = A + B\rho\cos\theta + C\rho\sin\theta + D\rho^2 + E\rho^2(1 + 2\sin^2\theta) + F\rho^3\sin\theta + G\rho^4 \qquad (2.50)$$

式（2.50）用来描述中心透镜由初级像差产生的波前，该透镜的点光源和像沿 y 轴移动。这样，该波前通常是沿 y 轴对称的。同时，彗差和像散是源于匹兹瓦面（Petzval surface），该平面在大多数干涉仪中并没有很大的实用性。当检测一个光学表面或者一个倾斜的系统时，通常假设是不对称性的，这样需要考虑一个更为一般性的波前表述。

另外，在进行数学分析时，除了两个倾斜以外所有像差的平均倾斜量等于零的话是很方便的。这种处理方法与针对每一个像差选择最适宜的参考波前倾斜是等价的。还有，除了球差的曲率，所有像差的平均曲率必须等于零，也称为离焦。这等效于对每一个像差选择最适宜的焦点定位值。这些像差就是将在第 13 章将要详细介绍的泽尼克多项式。根据这些像差，四阶以内的波前形状可以写为

$$\begin{aligned} OPD =& A_1 + A_2x + A_3y + A_4(x^2+y^2-0.5) + A_5xy + A_6(x^2-y^2) \\ &+ A_7y(3x^2+3y^2-2) + A_8x(3x^2+3y^2-2) + A_9y(3x^2-y^2) \\ &+ A_{10}x(x^2-3y^2) + A_{11}[6(x^2+y^2)^2+6(x^2+y^2)+1] \\ &+ A_{12}(x^2-y^2)(4x^2+4y^2-3) + A_{13}xy(4x^2+4y^2-3) \\ &+ A_{14}[x^2-y^2]^2-8x^2y^2] + A_{15}xy(x^2-y^2) \end{aligned} \tag{2.51}$$

或者用极坐标表示

$$\begin{aligned} OPD =& A_1 + A_2\rho\cos\theta + A_3\rho\sin\theta + A_4(\rho^2-1) + A_5\rho^2\sin2\theta \\ &+ A_6\rho^2\cos2\theta + A_7\rho(3\rho^2-2)\sin\theta + A_8\rho(3\rho^2-2)\cos\theta \\ &+ A_9\rho^3\sin3\theta + A_{10}\rho^3\cos3\theta + A_{11}(6\rho^4-6\rho^2+1) \\ &+ A_{12}\rho^2(4\rho^2-3)\cos2\theta + A_{13}\rho^2(4\rho^2-3)\sin2\theta \\ &+ A_{14}\rho^4\cos4\theta + A_{15}\rho^4\sin4\theta \end{aligned} \tag{2.52}$$

式中，A_1 为常数（平移）项；A_2 为相对 y 轴的倾斜；A_3 为相对 x 轴的倾斜；A_4 为球差项，也称为离焦；A_5 为 ±45°轴向的像散；A_6 为 0°或 90°轴向的像散；A_7 为沿 y 轴的三阶彗差；A_8 为沿 x 轴的三阶彗差；A_9 为底边平行于 x 轴的三角形像散；A_{10} 为底边平行于 y 轴的三角形像散；A_{11} 为 初级球差；A_{12} 为 0°或 90°的高阶像散；A_{13} 为 ±45°的高阶像散；A_{14} 为 0°或 90°的四边形像散；A_{15} 为 ±45°的四边形像散。

在计算干涉图中，可以假设一个单位半径为 ρ 的归一化入瞳。这样归一化有一个最大的好处就是所有的像差系数都表示相同的孔径边缘处的最大波前畸变。

相对简单的金斯莱克（Kingslake）表述可以使我们对干涉图进行简单和直观的分析，下面将通过一些例子来说明这一点。一些像差对应的干涉图是通过计算二维点阵上的辐照度来模拟得到的。在这些干涉仪中，使用的光源波长是 632.8nm，孔径的直径为 20.0mm，而系数的取值是针对归一化孔径（$\rho=1$）来定义的。

1）理想透镜。一个无倾斜（$B=C=0$）和倾斜（$B=5.0\times10^{-3}$）的理想透镜的干涉图样如图 2.42a 和 b 所示。一个离焦（$D=3.0\times10^{-3}$）和离焦并倾斜（$D=3.0\times10^{-3}$，$B=5.0\times10^{-3}$）的理想透镜的图样如图 2.42c 和 d 所示。

2）球差。假设 $G=5.0\times10^{-3}$ 可以计算得到纯球差的干涉图样。图 2.43a 和 d 给出了近轴焦点（$D=0$）处，没有倾斜（$B=C=0$）和具有倾斜（$B=5.0\times10^{-3}$）时的干涉图样。边缘焦点处的图样可以通过式（2.49）得到，此时只有 A 和 D 不为零，

$$\frac{\mathrm{d}OPD}{\mathrm{d}\rho} = 4G\rho^3 + 2B\rho = 0 \tag{2.53}$$

因此设定离焦系数 $B=-5.0\times10^{-3}$，球差系数 $G=5.0\times10^{-3}$。图 2.43c 和 f 给出了没有倾斜（$B=C=0$）和具有倾斜（$B=5.0\times10^{-3}$）的干涉图。$B=-10.0\times10^{-3}$ 时中间焦点处的条纹图样如图 2.43b 和 e 所示。

3）彗差。所有的彗差干涉图样通过令 $F=5.0\times10^3$ 得到。图 2.44 所示为近轴条件下

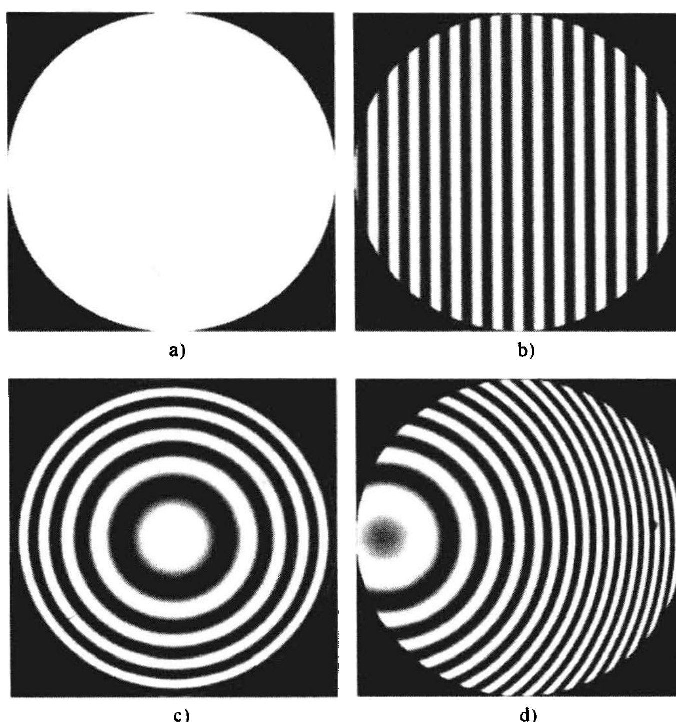


图 2.42 理想透镜的干涉图

a）没有倾斜或离焦 b）具有倾斜 c）具有离焦 d）具有倾斜和离焦

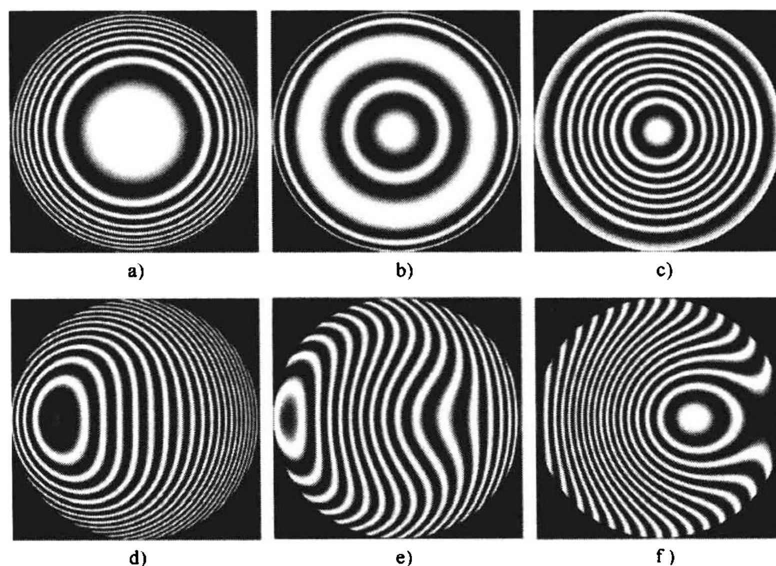


图 2.43 一个具有球差的透镜在旁轴、中间和边缘焦点处的干涉图样

（$D=0$）的图样，而图 2.45 是有一个小离焦情况下（$D=5.0\times10^{-3}$）的图样。在这两个图中，中间的图样没有倾斜（$E=F=0$）的，而周围的图样则是不同倾斜（$B=\pm5\times10^{-3}$，$C=\pm5\times10^{-3}$）联合作用的结果。

4）**像散**。所有的像散图样是当 $C=3.0\times10^{-3}$时计算得到的。如果 $D=0$，就能够得到

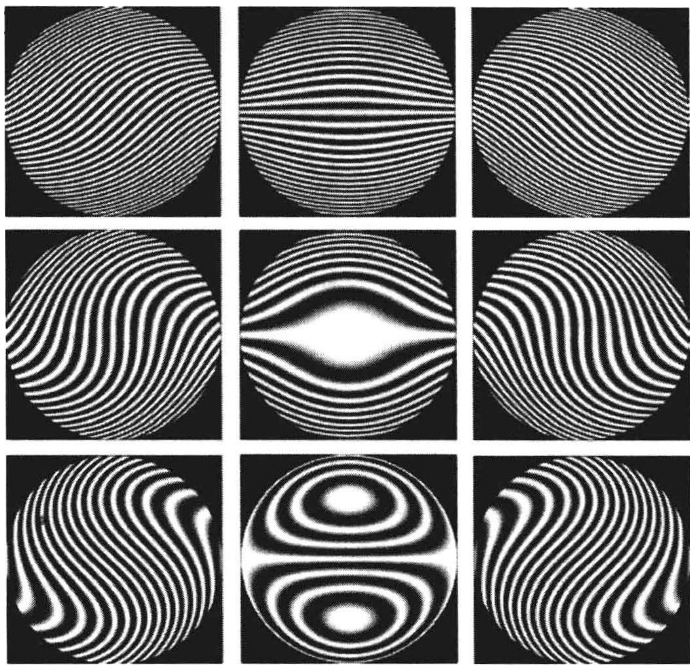


图 2.44　一个近轴焦点处具有彗差的透镜的干涉图样

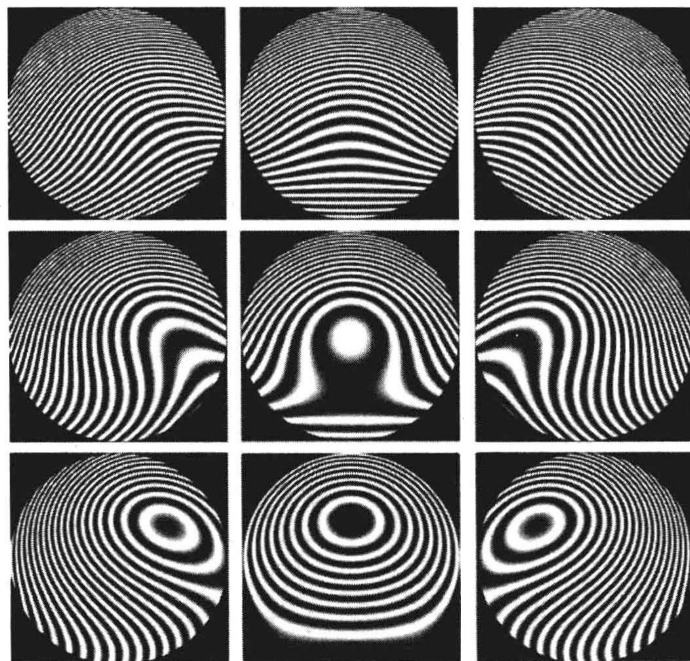


图 2.45　小离焦情况下一个具有彗差的透镜的干涉图样

匹兹瓦焦点。根据式（2.49）可以将像散的 OPD 写为

$$OPD=(D+E)x^2+(D+3E)y^2 \tag{2.54}$$

因此，当 $D+E=0$ 时对应得到弧矢焦点，而当 $D+3E=0$ 时对应了子午焦点。当 $D+E=-(D+3E)$ 时能得到中间焦点，由此可得 $D=-2E$。

图2.46所示为在匹兹瓦焦点处波前在所有方向上倾斜（$B = \pm 5 \times 10^{-3}$，$C = \pm 5 \times 10^{-3}$）时的干涉图样。图2.47～图2.49分别给出了在弧矢焦点、最佳焦点和子午焦点处波前在所有方向上倾斜时的干涉图样。

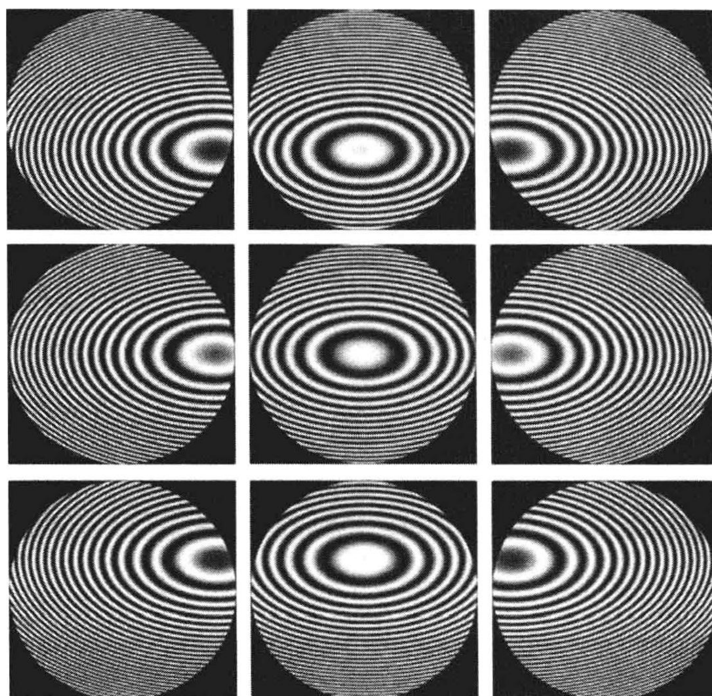


图2.46 匹兹瓦焦点处具有像散的透镜的干涉图样

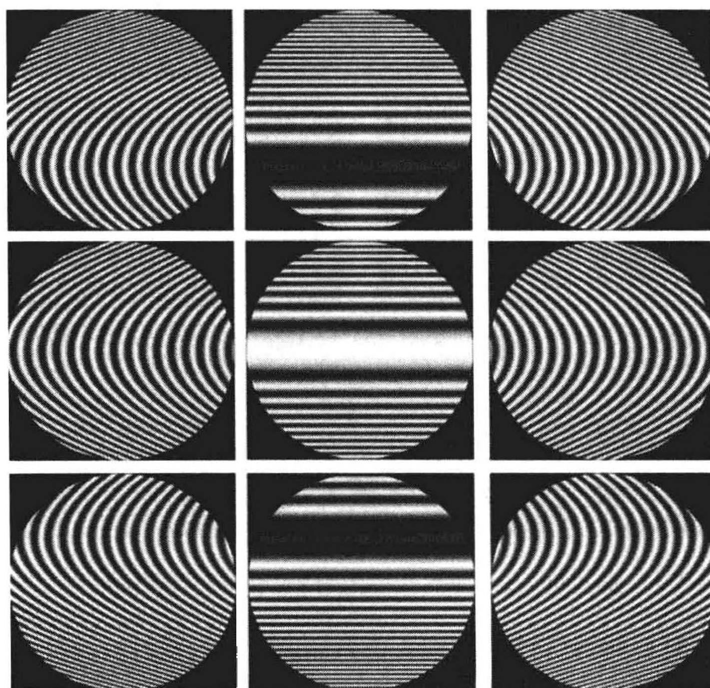


图2.47 弧矢焦点处具有像散的透镜的干涉图样

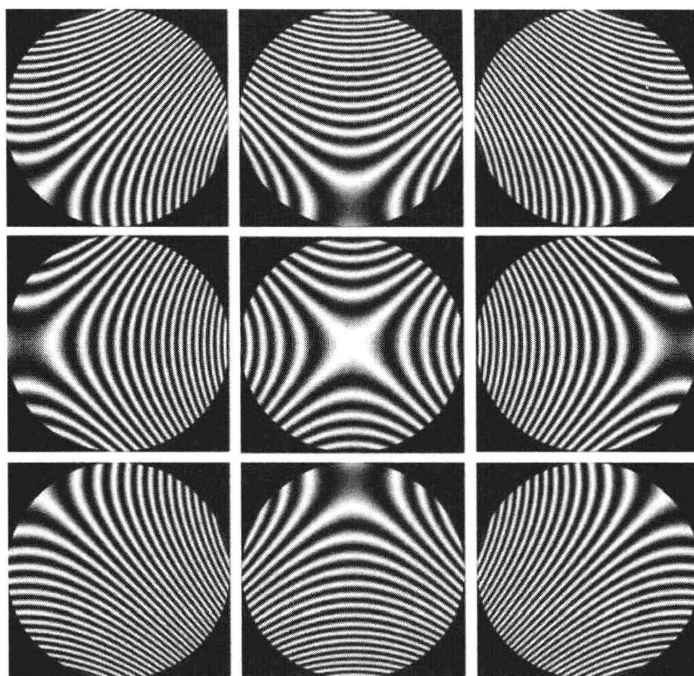


图 2.48 最佳焦点处具有像散的透镜的干涉图样

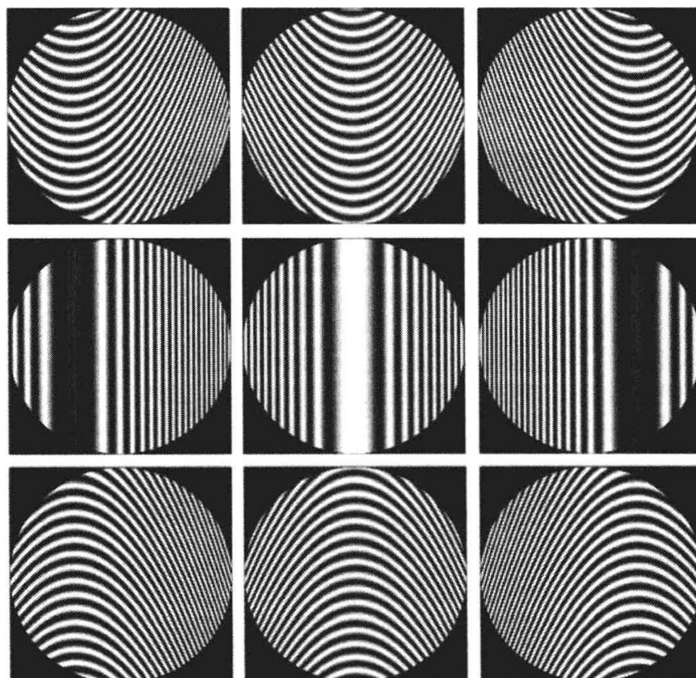


图 2.49 子午焦点处具有像散的透镜的干涉图样

5）混合像差。图 2.50 所示为具有混合像差的透镜的干涉图样，图 2.50a 是球差加上彗差（$G=2.0\times10^{-3}$ 且 $F=3.0\times10^{-3}$），图 2.50b 是球差加上像散（$G=4.0\times10^{-3}$ 且 $E=-2.0\times10^{-3}$），图 2.50c 是彗差加上像散（$F=-2.0\times10^{-3}$ 且 $E=4.0\times10^{-3}$），图

2.50d 是球差加上彗差再加上像散（$G=5.0\times10^{-3}$，$F=-2.0\times10^{-3}$且$E=4.0\times10^{-3}$）。

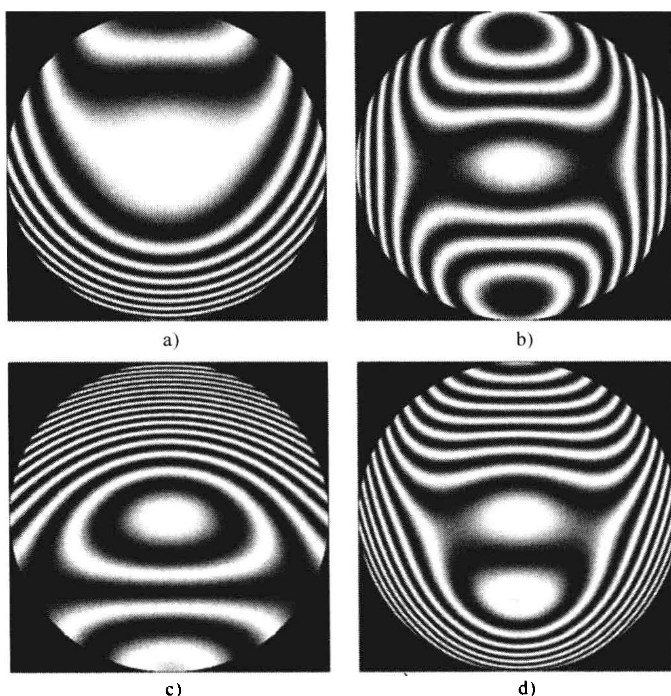


图 2.50　具有混合像差的透镜的干涉图

a）球差和彗差　b）球差和像散　c）彗差和像散　d）球差、彗差和像散

马雷夏尔和德戎克（Marechal and Dejonc，1950）在他们的一篇文章中给出了典型的干涉图。这些干涉图也可以在迈克耳逊干涉仪上（Murty，1960），利用一个平行平板和一个替代反射镜的三角棱镜引起的光程差构成的等倾干涉条纹来模拟，该光程差也可以利用一个CRT上的电子电路来引入（Geary et al.，1978；Gearty，1979）。

金斯莱克（Kingslake，1926-1927）最早分析了这一类型的干涉图。他通过对条纹进行计数来测量 x 轴和 y 轴上几个点的光程差。然后求解一个线性方程组，计算出 OPD 的系数 B、C、D、E、F、G。另外一种分析泰曼-格林干涉图的方法由桑德斯（Saunders，1965）提出。他发现测量四个恰当选择的点就足以确定三个初级像差中的任何一个。这些点的选择如图 2.51 所示，这样像差系数为

$$A=\frac{128}{81r^3}[P_1-P_9+2(P_8-P_7)] \tag{2.55}$$

$$B=\frac{2}{3r^3}[P_2-P_4+2P_6-3P_5)] \tag{2.56}$$

$$C=\frac{1}{4r^2}[P_2+P_4-P_1-P_3] \tag{2.57}$$

式中，P_i 为 i 点处的干涉级次。

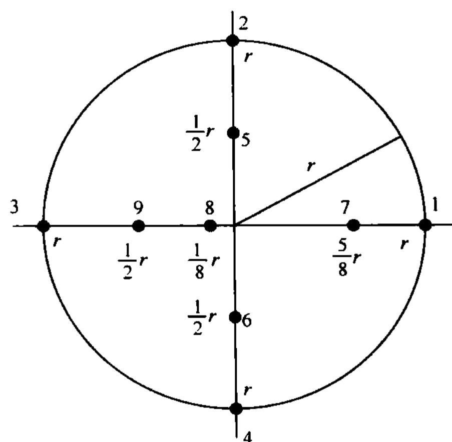


图 2.51　求解初级像差时参考点的分布

如果没有拍摄干涉图照片，可以通过直接读取

条纹系统来确定像差系数，在不同离焦和倾斜情况下对干涉仪进行分析（Perry，1923-1924）。为了使判读容易，可以使用哈里哈伦和森（Hariharan and Sen，1961）提出的一种方法，即利用某些光路排布方式来分开对称和非对称的波前像差。

从单幅泰勒-格林干涉图中确定任意形状波前的具体形状这一问题已有多位作者进行了简要的分析，如伯格伦（Berggren，1970），而里默等人（Rimmer et al.，1972）则进行了更全面的分析。其步骤包括测量整幅干涉图中很多点上的条纹位置，以及读取这些位置(x, y)和干涉级次m。由于测量使用的点数是有限的，因此必须使用插值法。插值过程可以使用最小二乘法拟合来实现，具体内容将在第16章介绍。

如果波前足够光滑，按照线性组合的泽尼克多项式来表述最终的波前$W(x, y)$是很方便的。这样去掉或加上离焦或倾斜的过程会变得很容易。根据这个最终结果，画出波前的等高图就非常容易。更多的细节可以参考马拉卡拉、赛维和马拉卡拉（Malacara，Servin and Malacara，2005）的书。

参考文献

Adachi I., T. Masuda, and S. Nushiyama, "A Testing of Optical Materials by the Twyman Type Interferometer," *Atti. Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica*, **16**, 666 (1961).

Adachi I., T. Masuda, T. Nakata, and S. Nushiyama, "The Testing of Optical Materials by the Twyman Type Interferometer III," *Atti. Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica*, **17**, 319 (1962).

Balhorn R., H. Kunzmann, and F. Lewosky, "Frequency Stabilization of Internal Helium-Neon Lasers," *Appl. Opt.*, **11**, 742 (1972).

Basile G., "Two-Wave Interferometers for Use with a Monochromatic Source," *Appl. Opt.*, **18**, 422, (1979).

Batishko C. R. and R. R. Shannon, "Problem in Large-Path Difference Laser Interferometry;" *Appl. Opt.*, **11**, 195 (1972)

Bennett S. J., R. E. Ward, and D. C. Wilson, "Comments on Frequency Stabilization of Internal Mirror He-Ne Lasers," *Appl. Opt.*, **12**, 1406 (1973).

Berggren R., "Analysis of Interferograms," *Opt. Spectra.*, **4**, 22 (1970).

Birch K. G., "Oblique Incidence Interferometry Applied to Non-Optical Surfaces," *J. Phys. E.*, **6**, 1045 (1973).

Birch K. G., "Interferometric Examination of Lenses and Other Components," *Proc. SPIE*, **163**, 112, (1979).

Briers J. D., "Interferometric Testing of Optical Systems and Components: A Review," *Opt. Laser Technol.*, **4**, 28 (1972).

Bruning J. and D. R. Herriott, "A Versatile Laser Interferometer," *Appl. Opt.*, **9**, 2180 (1970).

Bruning J. H., D. R. Herriott, J. E. Gallagher, D. P. Rosenfeld, A. D. White and D. J. Brangaceio, "Digital Wavefront Measuring Interferometer for Testing Surfaces and Lenses," *Appl. Opt.* **13**, 2693–2703 (1974).

Buin A. P., M. P. Semenova, and Kriuyukhina, "Inspection of the Surface Quality of Large Scale Optical Components of an Unequal Arm Interferometer," *Sov. J. Opt. Technol.*, **36**, 720 (1969).

Burch C. R., "The Williams Interferometer," *Monthly Not. R. Soc.*, **100**, 488 (1940).

Candler C., *Modern Interferometers*, Hilger and Watts, London, 1951, Chaps. 6 and 7.

Chen C. W. and J. B. Breckinridge, "Holographic Twyman–Green Interferometer," *Appl. Opt.*, **21**, 25-63 (1982).

Cole G. C., J. H. Burge, and L. R. Dettmann, "Vibration Stabilization of a Phase Shifting Interferometer for Large Optics," *Proc. SPIE*, **3134**, 438–446 (1997).

Collier R. T., C. B. Brukhardt, and L. H. Lin, *Optical Holography*, Academic Press, New York, 1971, p. 146.

Connes P., "Aumentation du Produit Luminosite X resolution des Interferometers par l' Emploie d' une Difference de Marche Independente de l' Incidence," *Rev. Opt.*, **35**, 37 (1956).

Creath K., "Wyko Systems for Optical Metrology," *Proc. SPIE*, **816**, 111 (1987).

Crèath K., "Testing Spherical Surfaces: A Fast, Quasi-Absolute Testing," *Appl. Opt.*, **31**, 4350–4354 (1992).

Creath K. and J. C. Wyant, "Testing Spherical Surfaces: A Fast, Quasi-Absolute Technique," *Appl. Opt.*, **31**, 4350-4354 (1992).

Cuadrado Javier M., M. Va. Pérez, C. Gómez-Reino, "Equilateral Hiperbolic Zone Plates: Their use in the Alignment of a Mach-Zehnder Interferometer," *Appl. Opt.*, **26**, 1527 (1987).

De Vany, A. S., "On Using a Williams Interferometer for Making a Divider Plate," *Appl. Opt.*, **4**, 365 (1965).

Dorband B. and H. J. Tiziani, "Auslegun von Kompensationsystemen zur Interferometrischen Pröfung Asphärischer Flächen," *Optik*, **467**, 1, (1) (1984).

Dyson J., "Unit Magnification Optical System without Seidel Aberrations," *J. Opt. Soc. Am.*, **49**, 713 (1959).

Fantone S. D., "Simple Method for Testing an Axicon," *Appl. Opt.*, **20**, 3685 (1981).

Feinberg J., "Interferometer with a Self-Pumped Phase-Conjugating Mirror," *Opt. Lett.*, **8**, 569 (1983).

Fegurson T. R., "Polarization Effects in Interferograms of Conical Optical Elements," *Appl. Opt.*, **21**, 514 (1982).

Flack Jr., Ronald D., "Mach-Zehnder Interferometer Errors Resulting from Test Section Misalignment," *Appl. Opt.*, **17**, 985 (1978).

Geary J. M., "Real Time Interferogram Simulation," *Opt. Eng.*, **18**, 39 (1979).

Gerth H. L., R. E. Sladky, M. J. Besik, and C. A. Washington, "Fabrication of Off Axis Parabolic Mirrors," *Opt. Eng.*, **17**, 588 (1978).

Gordon S. K. and S. F. Jacobs, "Modification of Inexpensive Multimode Lasers to Produce a Stabilized Single Frequency Beam," *Appl. Opt.*, **13**, 231 (1974).

Grigull V. and H. Rottenkolber, " Two Beam Interferometer Using a Laser," *J. Opt. Soc. Am.*, **57**, 149 (1967).

Guild J., "Fringe Systems in Uncompensated Interferometers," *Proc. Phys. Soc.*, **33**, 40 (1920-1921).

Hansen G., "Die Sichtbarkeit der Interferenzen beim Twyman-Interferometer," *Zeiss-Nachuichten*, **4**, 109–121 (1942).

Hansen G., "Die Sichtbarkeit der Interferenzen beim Twyman-Interferometer," *Optik*, **12**, 5–16 (1955).

Hansen G. and W. Kinder, "Abhangigkeit des Kontrastes der Fizea-Streifen im Michelson-Interferometer vom Durchmesser der Aperturblende," *Optik*, **15**, 560–564 (1958).

Hansen G., "On Twyman-Interferometers," *Optik*, **67**, 79 (1984).

Hardesty C., "Vibration Insensitive Laser Unequal Path Interferometer (LUPI) Test," *Proc. SPIE*, **192**, 93 (1979).

Hariharan P., "Improved Oblique Incidence Interferometer," *Opt. Eng.*, **14**, 257 (1975).

Hariharan P. and D. Sen, "The Separation of Symmetrical and Asymmetrical Wavefront Aberrations in the Twyman Interferometer," *Proc. Phys. Soc.*, **77**, 328 (1961).

Hopkins R. E., "Re-Evaluation of the Problem of Optical Design," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 1218 (1962).

Horne D. F., *Optical Production Technology*, Adam Hilger, London, 1972, and Crane Russak, New York, 1972, Chap. 11.

Houston J. B., Jr., C. J. Buccini, and P. K. Neill, "A Laser Unequal Path Interferometer for the Optical Shop," *Appl. Opt.*, **6**, 1237 (1967).

Howes W. L., "Lens Collimation and Testing Using a Twyman–Green Interferometer with a Self-Pumped Phase-Conjugation Mirror," *Appl. Opt.*, **25**, 473 (1986a).

Howes W. L., "Large Aperture Interferometer with Phase-Conjugate Self-Reference Beam," *Appl. Opt.*, **25**, 3167 (1986b).

Jaroszewics Z., "Interferometric Testing of the Spacing Error of a Plane Diffraction Grating," *Opt. Commun.*, **60**, 345 (1986).

Jones R. A., "Fabrication of Small Nonsymmetrical Aspheric Surfaces," *Appl. Opt.*, **18**, 1244 (1979).

Jensen A. E., "Absolute calibration Method for Twyman–Green Wavefront Testing Interferometers," *J. Opt. Soc. Am.*, **63**, 1313A (1973).

Kingslake R., "The Interferometer Patterns Due to the Primary Aberrations," *Trans.Opt. Soc.*, **27**, 94 (1925-1926).

Kingslake R., "The Analysis of an Interferogram," *Trans. Opt. Soc.*, **28**, 1 (1926-1927).

Kocher D. G., "Twyman–Green Interferometer to Test Large Aperture Optical Systems," *Appl. Opt.*, **11**, 1872–1873 (1972).

Kowalik W., "Interference Measurement of Continuos Heterogeneities in Optical Materials," *Appl. Opt.*, **17**, 2956 (1978).

Kwon O. Y., J. C. Wyant, and C. R. Hayslett, "Long-Wavelength Interferometer in the Optical Shop," *Proc. SPIE*, **192**, 88 (1979).

Linnik V. P., "An Interferometer for Controlling Large Mechanical Details," *Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l"URSS*, **35**, 16 (1942).

Leung K. M. and S. Lange, "Wavefront Evaluation on Laser Diodes Using a Phase Measurement Interferometer," *Proc. SPIE*, **429**, 27 (1983).

Lewandowski J., B. Mongeau, M. Cormier, and J. La-Pierre, "Infrared Interferometers at 10 7m 1m," *J. Appl. Phys.*, **661**, 132 (1986).

Luneburg, R. K., *Mathematical Theory of Optics*, University of California, Press, Berkeley, 1964, Appendix 2, P. 372.

MacBean M. D. A., "Oblique Incidence Interferometry of Rough Surfaces Using a Novel Dove-Prism Spectrometer," *Appl. Opt.*, **23**, 4024 (1984).

Malacara D. and C. Menchaca, "Imaging of the Wavefront Under Test in Interferometry," *Proc. SPIE*, **540**, 34 (1985).

Malacara D., M. Servin and Z. Malacara, Interferogram Analysis for Optical Testing, 2nd Ed., Taylor and Francis, Boca Raton FL, 2005.

Marechal A. and P. Dejonc, "Quelques Aspects de Franges de Twyman" (Some Aspects of Twyman Fringes), *Rev. Opt. Theor. Instrum.*, **29**, 430 (1950).

Martin L. C. and R. Kingslake, "The Measurement of Chromatic Aberration on the Hilger Lens Testing Interferometer," *Trans. Opt. Soc.*, **25**, 213 (1923-1924).

Masuda T., S. Nishiyama, T. Nakata, and I. Adachi, "The Testing of Optical Materials by the Twyman Type Interferometer. II," *Atti Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica*, **17**, 197 (1962).

McDonell M. M. and T. F. DeYoung, "Inexpensive Large Aperture Interferometer," *Proc. SPIE*, **192**, 145, (1979).

Mertz L., International Commission for Optics Conference, Stockholm, 1959.

Michelson A. A., "On the Correction of Optical Surfaces," *Astrophys J.*, **47**, 283 (1918).

Millerd J., N. Brock, J. Hayes, B. Kimbrough, M. Novak, M. North-Morris, "Modern Approaches in Phase Measuring Metrology," *Proc. SPIE*, **5856**, 14-22 (2005).

Molesini G., G. Pedrini, and F. Quercioli, "Laser Unequal Path Interferometer Configurations by Grating Splitting at the Fourier Plane," *Opt. Eng.*, **23**, 646 (1984).

Morokuma T., K. F. Neften, T. R. Lawrence, and T. M. Klucher, "Interference Fringes with Long Path Difference Using He-Ne Laser," *J. Opt. Soc. Am.*, **53**, 394 (1963).

Munnerlyn C. K., M. P. Givens, and R. E. Hopkins, "Interferometric Measurement of Optically Rough Surfaces," *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-5**, 359 (1969).

Murty M. V. R. K. and D. Malacara-Hernández "Some Applications of the Gas Laser as a Source of Light for the Testing of Optical Systems," *Jap. J. Appl. Phys.*, **4**, Supplement 1, 106–112 (1965).

Ostrovskaya M. A. and F. M. Filimonova, "Use of the Gas Laser for Interferometric Quality Control in Telescope Manufacture," *Sov. J. Opt. Technol.*, **36**, 563–565 (1969).

Parmigiani F., "Phase Dependence of Michelson Interferometer Outputs on The Absorbing Beam Splitter Thickness," *Opt. Commun.*, **38**, 319 (1981).

Perry J. W., "The Determination of Aberrations, as Expressed in Geometrical Optics, from the Indications of the Hilger Interferometer," *Trans. Opt. Soc.*, **25**, 97 (1923-1924).

Rimmer M. P., D. M. King, and D. G. Fox, "Computer Program for the Analysis of Interferometric Test Data," *Appl. Opt.*, **11**, 2790 (1972).

Rogers G. L., "The Equivalent Interferometer in Holography," *Opt. Acta*, **17**, 257 (1970).

Saunders J. B., "Precision Method for Evaluating Primary Aberrations of Lenses with a Twyman Interferometer," *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **69C**, 251 (1965).

Saunders J. B. and F. L. Gross, "Interferometer for Large Surfaces," *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **62**, 137 (1959).

Schwider J. and O. Falkenstörfer, "Twyman–Green Interferometer for Testing Microspheres," *Opt. Eng.*, **34**, 2972–2975 (1995).

Schwider J., "Partially Coherent Illumination in Interferometry for Optical Testing" *Proc. SPIE*, **3745**, 2–13 (1999).

Sinclair D. C. and W. E. Bell, Gas Laser Technology, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969, Chap. 5.

Slevogt H., "Zur geometrischen Optik der Zweistrahl-Interferometer," (About the Geometrical Optics of Two-Beam Interferometers), *Optik*, **11**, 366 (1954).

Steel W. H., "Adjustable Compensators for Two-Beam Interferometers," *Opt. Acta*, **9**, 111–119 (1962).

Steel W. H., "The Compensation of a Williams Interferometer," *Opt. Acta*, **10**, 205–208 (1963).

Steel W. H., "Two-Beam Interferometry," in Progress in Optics, Vol. 5, E. Wolf, Ed., North-Holland, Amsterdam, 1966, Chap. 3.

Thomas D. A. and J. C. Wyant, "Determination of the Dihedral Angle Errors of a Corner Cube from its Twyman–Green Interferogram," *J. Opt. Soc. Am.*, **67**, 467 (1977).

Twyman F. and A. Green, *British Patent* (prisms and microscopes) 103832 (1916).

Twyman F., "Correction of Optical Surfaces," *Astrophys. J.*, **48**, 256 (1918a).

Twyman F., *British Patent* (camera lens) 130224 (1919).

Twyman F., "Interferometers for the Experimental Study of Optical Systems from the Point of View of the Wave Theory," *Philosophical Magazine*, **35**, 49–58 (1918b).

Twyman F., "The Testing of Microscope Objectives and Microscopes by Interferometry," *Trans. Faraday Soc.*, **16**, 208 (1920).

Twyman F., "An Interferometer for Testing Camera Lenses," *Trans. Opt. Soc.*, **22**, 174 (1920-1921); also appeared in *Philos. Mag.*, **42**, 777 (1921).

Twyman F., and A. J. Dalladay, "Variation in Refractive Index Near the Surfaces of Glass Melts," *Trans. Opt. Soc.*, **23**, 131 (1921-1922).

Twyman F., "The Hilger Microscope Interferometer," *J. Opt. Soc. Am.*, **7**, 635–656 (1923).

Williamson R., "Novel Interferometer," *Proc. SPIE*, **5178**, 124–130 (2004).

Zielinski R. J., "Unequal Path Interferometer Alignment and Use," *Opt. Eng.*, **18**, 479 (1979).

Zielinski R. J., "Unequal Path Interferometer Alignment and Use," *Proc. SPIE*, **153**, 51 (1978).

第3章 共光路干涉仪

S. 玛利克（S. Mallick）、D. 马拉卡拉（D. Malacara）

3.1 引言

在泰曼-格林（Twyman-Green）或马赫-泽德（Mach-Zehnder）等干涉仪中，由于参考光和检测光束沿分开的光路传播，故受到的机械振动和温度起伏的影响不同。因此，如果不采取适当的预防措施，则观察面上的干涉条纹不稳定，不能进行测量。在检测大口径光学系统时，这类问题就显得特别突出。利用共光路干涉仪可避免其中的大部分难题。因为在共光路干涉仪中，参考光和检验光束经过同一光路。这种干涉仪还具有这样的优点：在产生参考光束时，并不要求理想的光学元件（主要元件）的尺寸与被检系统尺寸相等，而且在视场中心的两光束光程差一般为零，这使白光作为光源成为可能。

在某些共光路干涉仪中，参考光束通过被检光学系统的小部分区域，因而不受系统像差的影响，当参考光束与经过该光学系统全孔径的检验光束相干时，就可以直观地获得系统缺陷信息。但在大多数共光路干涉仪中，参考光束和检验光束都受像差影响，干涉是由一光束相对另一光束剪切产生的。在此情况下得到的信息是不直观的，需要作某些计算才能确定像差波前的形状。

在共光路干涉仪中，借助于部分散射面、双折射晶体或半反射面实现分束。本章将介绍这类干涉仪的几个实例。

3.2 使用两块匹配散射板的伯奇干涉仪

这种干涉仪最初是由伯奇（Birch，1953、1962、1969）提出的，后来其他作者鲁比（Rubin，1980）也对此干涉仪进行了研究。图3.1是伯奇干涉仪用两匹配的散射板检测放大倍率透镜的示意图。透镜形成的小光源 S 在透镜上的像为 S'，被检透镜的放大率必须很接近1。一个部分散射板在被检透镜前两倍焦距的位置，透镜将第一个散射板 R_1 成像于另一个相同的散射板 R_2 上，R_2 相对于 R_1 旋转180°，因此散射板 R_2 上的点与 R_1 像上的点完全匹配。入射到散射板 R_1 上的部分光没有被散射到达 S' 点，由于光束只与透镜上 S' 点附近的区域接触，不受透镜误差的影响，这束光作为基准光束。一部分入射光被 R_1 散射充满了透镜的全孔径，它包含了透镜的误差，因此作为检验光束。

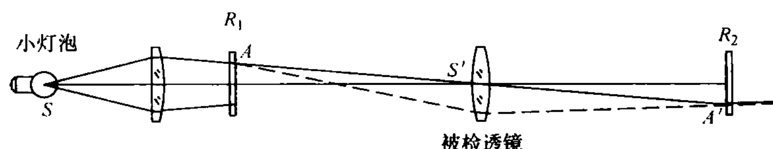


图3.1 伯奇干涉仪用两匹配的散射板检测放大倍率透镜的示意图

现在来研究入射到散射板 R_1 上 A 点的一条光线，直接透过的光线（图3.2中实现）沿光路 $AS'A'$ 行进，并在 A' 处与 A 完全相同的散射中心相遇。这条光线在 A' 处被散射，并产生一个光锥，其中部分光与路线与在第一个板上散射的光线相同，但与第二个不同。散射光线（虚线）充满被测的整个孔径，到达像 A' 没有散射穿过 R_2。有两束从 R_2 发射过来相干光，其中一束直接由 R_1 传递过来经 R_2 散射，另一束被 R_1 散射透过 R_2。观察者透过 R_2 观看镜子表面就可出现两束光的干涉图。很多光线首先照射到散射板上，因此观察到干涉图像就是很多重叠条纹。如果镜面在 S' 区域没有误差，则干涉图将直观地给出镜面像差信息，与分离式光路干涉仪一样。直接透过 R_1 和 R_2 的光在 S' 处产生一个亮点，这对目视观察是很麻烦的。被 R_1 散射又被 R_2 散射的光产生一个弱的背景，使条纹对比度稍微减小。光源 S 的大小应保证其像 S' 的大小限于在一个条纹内。如果在镜面的某个区域中条纹相当宽（这相当于镜面在该区域几乎没有像差），光源的像 S' 应落在该区域中。观察到的光束散射如表3.1所示。

表3.1 伯奇干涉仪中的光束散射

经过第一个散射板后	经过第二个散射板后	出射光束
没被散射	没被散射	中心亮点
没被散射	被散射	基准光束
被散射	没被散射	被检光束
被散射	被散射	太暗，无法观察

为了观察固定的干涉条纹，在第二散射板 R_2 后面放置相机透镜，使镜面在照相底片上成像。镜面上的每一个共轭点都在底片上成像，底片上的干涉效应（光强），给出镜面在共轭点处的像差信息。

图3.2是伯奇干涉仪检测凹面反射镜的示意图，第一个散射板应有旋转对称性，那么散射点 A 与散射点 A' 才会相同。散射板必须放置在镜面的曲率中心，放大率才为1。苏等人（Su，et al.，1984）计算两束干涉光的光程差为

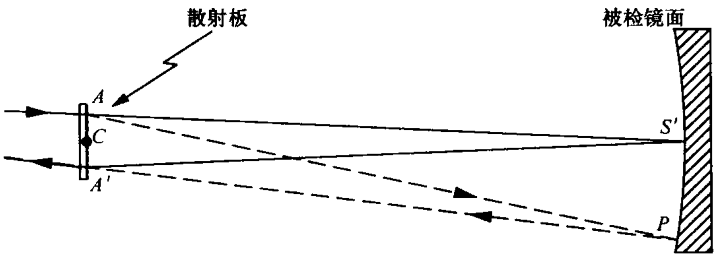


图3.2 利用双光束穿过散射板，用伯奇干涉仪检测凹球面镜

$$OPD = (AP + PA') - 2AS' \tag{3.1}$$

如果被检表面为球面，可以看出只有从散射板中心穿过的光线光程差才为零。但是，假设散射板足够小，如果表面不是球面相对于球面面形为 W，则光程差为 $2W$。Su等人（1984）认为如果散射板太大，对比度会下降，最大应为

$$OPD = \frac{D^2 s^2 r^3}{4} < \frac{\lambda}{2} \tag{3.2}$$

式中，D 为镜面直径；r 为曲率半径；s 为散射板的半径。

两个实用的伯奇干涉仪用于检测凹面镜，测量的曲率半径与口径之比大于6，从离轴方向检测的示意图如图3.3和图3.4所示。光源采用小灯。如果一些望远镜中心有小孔，则像点必须要偏离中心。在图3.3干涉检测中，两散射板要相同，但其中一个相对于一个旋转180°。在双光路干涉中的散射板如图3.4所示，是经过精磨的，然后第一表面半抛光的分光棱镜。放置一个相对于曲率中心对称的小平面镜，为了防止不需要的光束反射到观察者的眼睛，在棱镜后面粘上一个涂上黑色的小三角棱镜。

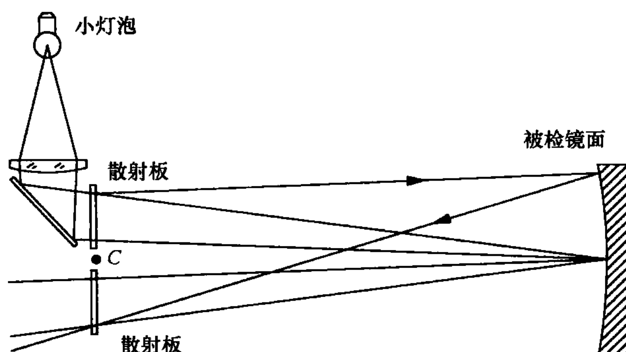


图 3.3　用伯奇干涉仪和两个相同的散射板检测凹面反射镜

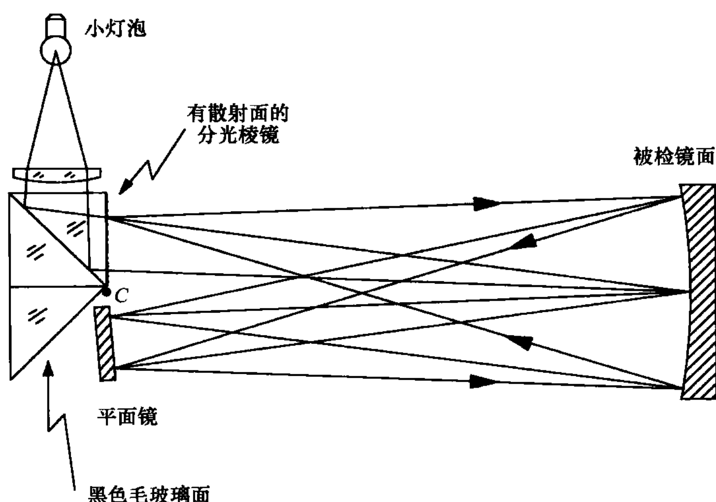


图 3.4　伯奇干涉仪检测凹球面（光束两次经过散射板且与散射板对称）

散射板在其表面相对其他像发生小量偏移，会产生平行直条纹（倾斜），镜面的瑕疵会使直条纹弯曲。如果整个干涉仪和两个散射板垂直朝光轴移动，将会产生这样的偏移；只有当散射板相对于光轴对称，才会产生倾斜条纹。相对于光轴偏移，远离或靠近被检面都会产生离焦影响引入圆环形条纹。由于两束干涉光光程一致，因此不可能引入平移项。在这个系统中，像所有的对称系统一样，在曲率中心测量彗差被消除了，只存在像散。在这种情况下，条纹呈现椭圆状。斯科特（Scott，1969）用这个干涉仪检测口径91.5cm，F/4抛物面镜和口径35cm的格雷果里次镜。在本章引用的文献中介绍了伯奇原设计所做的试验和修改的详细内容。

伯奇干涉仪很容易受绕垂直于视线或横移过视线的轴的倾斜振动的影响，为了减小这个系统对这类振动的敏感性，休梅克和默蒂（Shoemaker and Murty，1966）修改了这个装置，他们用一个平面镜代替第二块散射板，使第一块散射板上的每一个点重新成像于其自身之上。这个装置对偶数级像差的灵敏度是原装置的2倍，但不能检测奇数级像差。它的一个显著优点是只需要制作一块散射板。在镜面和散射板之间的快速振动，将会引起焦点的振动，但它们并不代表很严重的问题。严重的问题出现该装置中，由于光在被检镜面反射了两次，所以表面必须是高反射率。如果没有采用明亮的光源，没有镀膜的表面会产生的干涉图会很模糊。

由于两干涉光束具有相同的光路，干涉测量可对白光进行补偿。因此可采用小的白炽灯作为光源。如果需要更强的光，主要是在检测没有镀膜的双光路结构表面，可采用激光作为光源，但是可能会出现伪条纹和斑点。

两个相同的散射板 R_1 和 R_2 或其中一个轴对称，可采用很多方法制造。例如：给一个星点模型拍照。对称散射板可对相同星点模型双倍曝光，将板旋转180°后再第二次曝光，如苏（Su et al.，1984）、斯马特、斯蒂尔（Smartt and Steel，1985）和罗斯-莫瑞斯（North-Morris et al.，2002）等人所描述的复制两块轻的毛玻璃（Houston，1970）和用微成像技术拍摄旋转对称类型（Murty，1963）。

3.2.1 菲涅耳波带片干涉仪

类似的采用菲涅耳带板取代散射板的干涉仪最初由默蒂（Murty，1963）提出的，后来斯马特（Smart，1974）、洛曼（Lohmann，1985）、斯蒂温斯（Stevens，1988）和黄（Huang，1989）等人也做了研究。与散射板让光在所有方向无规则散射不同，菲涅耳带板能产生聚光，还产生发散的球面波前。菲涅耳波带板的一个优点是它旋转对称，因此图3.2和图3.3均可采用。菲涅耳波带板可通过拍摄大的图片，再把它们减小到想要的大小，也通过可以拍摄会聚光和平面波前的干涉获得（Smartt，1974）。

3.2.2 伯奇和菲涅耳波带片干涉仪检测非球面

如果散射板上的散射点离光轴较远，会看到球面的光程差并不为零。当散射板较大时，不同半径的散射点产生不同条纹，降低了观察干涉图的对比图。如果能将散射板上不同半径点与被检面上不同半径点对应，就可以利用光程差的变化来对非球面进行零检测。苏（Su，1986）和黄（Huang，1989）等人对该方法进行了研究。他们采用小口径光圈放置在观测散射板后如图3.5所示。可以证明式（3.1）在这种情况下仍然适用，不同光圈使散射板上的点 A 与被检面上不同点 P 相匹配，通过选择不同光圈 L，不同非球面度镜被补偿来获得零检测。

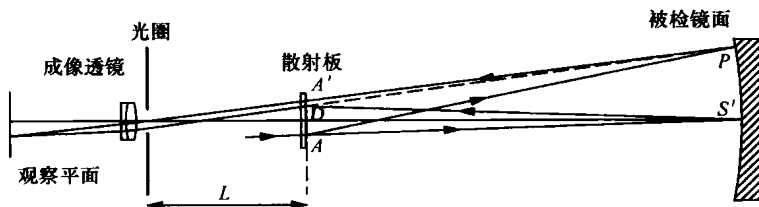


图3.5 伯奇和菲涅耳波带片干涉仪检测非球面

3.2.3 伯奇和菲涅耳波带片干涉仪测量相移

帕特斯克和赛尔巴特（Patorski and Salbut，2004）描述了一种散射干涉仪，被检波前相位和基准波前相位可以根据需要改变。伯奇和菲涅耳波带片利用偏振光干涉仪检测相移如图3.6所示。该装置的光源为激光，如果激光为非偏振光，则需要在第一个散射板前加一个偏振片，否则如果为线偏振光就不需要。然后相对于偏振波面振动的45°方位加入一个1/4波片，产生一个圆偏振照明光源。靠近被检镜面基准光的光路上插入一个1/4波片。

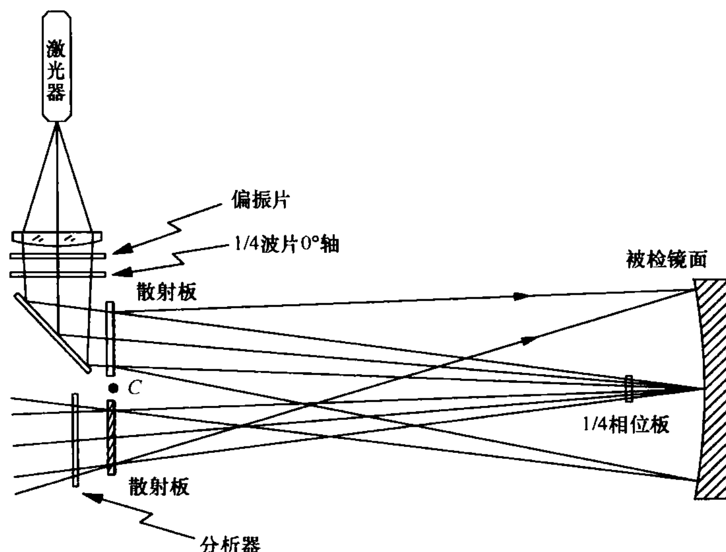


图3.6 伯奇和菲涅耳波带片利用偏振光干涉仪检测相移

基准光在波片里穿过两次，所以圆偏振光反向。这就是所要的结果，被检光和基准光均为圆偏振光但反向。从分析器出射在观测者前的光束为线偏振光，与分析前相位不同。

另一种相移散射干涉仪（North-Morris and Wyant，2002），如图3.7所示。该装置最主要单元为特殊制作的散射板，它是由光轴与两个面平行的方解石刻蚀而成的，斑点的样式刻蚀在两个面上的步骤在引用的参考文献中有描述。然后在被刻蚀的方解石上覆盖薄玻璃，在它们之间加入油层。油的折射率与方解石折射率相匹配。在非单轴晶体中如方解石，部分光

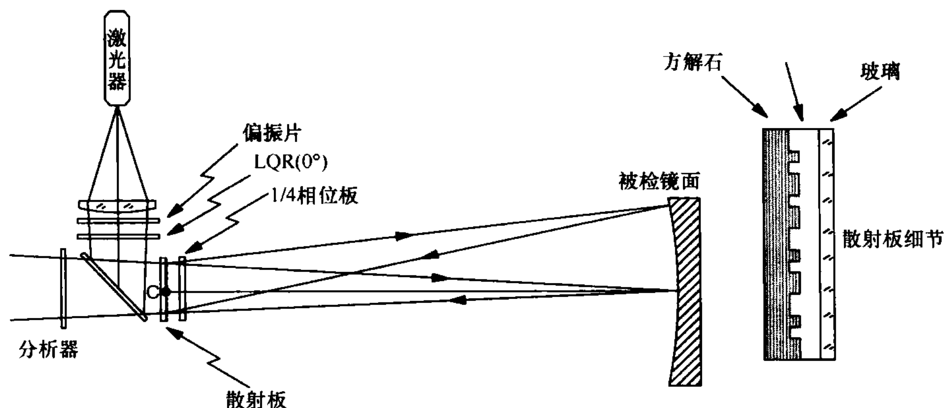


图3.7 伯奇干涉仪利用偏振光检测相移

线在含有晶体光轴的面发生偏振。结果是散射板将光在沿着它光轴的偏振面散射，但在垂直于光轴的方向对线偏振光不产生散射。另一种重要的光学元件为液晶相位板（LQR），它的相位延迟在垂直于轴的两个方向是变化的，并且可以按照要求的值取设定。

与前面所提到的干涉仪一样，激光光源为线性偏振或在它前面加起偏器让它偏振45°。然后，线偏振光在水平方向和垂直方向的相位差可以通过液晶相位板（改变成椭圆偏振光）改变为想要的值。接着散射板将沿着方解石光轴方向的偏振光散射，而不是散射垂直于光轴方向的偏振光。结果使得检测光和基准光在LQR（液晶相位板）设定的相位差下在两正交的平面上偏振。两束光均两次穿过45°角放置的1/4波片。之后两束干涉光为圆偏振，但方向相反。最后在观测者前面放置分析器，根据分析器方向给出两束不同相位的线偏振光。

3.3　双折射分光镜

一类重要的干涉仪是用双折射晶体作分光镜，这类称为偏光干涉仪（Franon and Mallick，1971）。本节将介绍这三种分光镜。

3.3.1　萨瓦偏光镜

萨瓦（Savart）偏光镜由两个完全相同的单轴晶片组成，晶体光轴与晶片法线成45°（参见图3.3）。两个晶片的主截面（包含晶体光轴和晶片法线的平面）彼此相交。第一个晶片的光轴位于图平面内，第二个晶片的光轴与图平面成45°角，图3.8中的双箭头表示该光轴在图平面内的投影。入射光线被第一个晶片分成两束，即O光和E光。因为第二个晶片相对于第一个晶片转过90°，所以第一个晶片中的O光在第二个晶片中变为E光，反之亦然。OE光不在图面内，而是穿过图面而出射，与它相伴的EO光平行，虚线表示该光线在图面内的投影。两晶片中每个晶片在两光线间产生的横向位移量都为$2t$的萨瓦偏光镜。

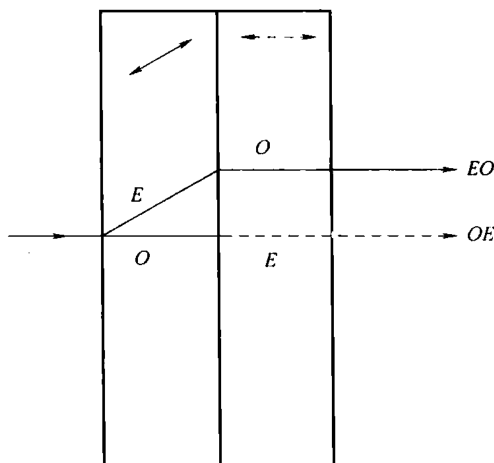


图3.8　用萨瓦偏光镜分束（用正晶体，例如，石英制成的偏光镜分束的情况）

在出射光线EO和OE间产生的总位移量为：

$$d=\sqrt{2}\frac{n_e^2-n_o^2}{n_e^2+n_o^2}t \tag{3.3}$$

式中，n_o 和 n_e 分别为 O 光和 E 光的折射率。如果偏光镜由石英制成，则 1cm 厚的偏光镜产生的横向位移量为 80μm；如果偏光镜由方解石制成，则产生 1.5mm 横向位移。在图 3.8 中，如果入射光线不平行于晶片法线，则出射的两束光线仍平行于原入射光线，而且它们的相对位移量实际上保持不变。

平行的出射光线在无限远处（或在一正透镜的后焦面上）产生干涉，干涉图形与杨氏实验中用两个间距为 d 的相干光源产生的干涉图形类似。对入射角小的光线，产生的干涉条纹是与位移方向垂直的等间距直线条纹。这些条纹的角间距为

$$角间距 = \frac{\lambda}{d} \tag{3.4}$$

零条纹与垂直入射的光线相对应，它位于视场的中心。对于 1cm 厚石英制的萨瓦偏光镜和焦距为 10cm 的透镜，黄光产生的条纹间距为 2mm，如偏光镜为方解石，则产生的条纹间距为 0.1mm。

从萨瓦偏光镜出射的 OE 光线和 EO 光线，其偏振方向互相垂直。为了使这两束光相干涉，可用一个线偏光镜使它们振动方向彼此平行，线偏光镜的轴线与互相垂直振动方向成 45°。可是这个线偏光不足以使干涉发生。因为自然光（非偏振光）相当于两个在互相垂直方向上作等幅振动的互相不相干分量，因此晶体产生的 O 光和 E 光之间没有恒定的相位差。为了使这些光线互相干涉，迎着入射光束放置一个起偏器，使自然光中只有一个分量可透射至晶体上。这个起偏器的轴线与晶体的主轴成 45°角。

3.3.2 渥拉斯顿棱镜

渥拉斯顿（Wollaston）棱镜，如图 3.9 所示，是由两个相似的光楔组成，它们胶合在一起组成一个平行平板。两光楔中的光轴与外表面平行且彼此垂直。渥拉斯顿棱镜将入射光线分成两条沿不同方向行进的光线，两光线间的横向位移量随光线离渥拉斯顿棱镜距离的不同而不同。其分束角 α 为

$$\alpha = 2(n_e - n_o)\tan\theta \tag{3.5}$$

式中，θ 为楔角。在大多数实际应用中，可认为 α 与入射角无关。对 $\theta = 5°$，用石英制的渥拉斯顿棱镜，分束角为 6 弧分，对同样角度方解石的渥拉斯顿棱镜，分束角为 2°。

如图 3.10 所示，从与渥拉斯顿棱镜的 y-y' 轴相距 x 处出射的 OE 光线和 EO 光线间的光程差所示。

$$\Delta = 2(n_e - n_o)x\tan\theta = \alpha x \tag{3.6}$$

沿光轴出射的光线的光程差为零，此处两光楔的厚度相同，光程差随 x 而线性增大。将渥拉斯顿棱镜放在两个取向合适的偏振镜之间时，就可观察到一组与两光楔片边缘平行，且位于棱镜内的直条纹（条纹与图 3.10 的平面垂直）。沿光轴的光程差为零，故可用白光看到条纹，条纹间隔等于

$$x_0 = \frac{\lambda}{2(n_e - n_o)\tan\theta} \tag{3.7}$$

当 $\theta = 5°$，$\lambda = 0.55 = \mu m$，且 $n_e - n_o = 9 \times 10^{-3}$（石英）时，每毫米大约有三个条纹。当 θ 角很小时（几个弧分），条纹间距相当大，渥拉斯顿棱镜可作补偿器用。这种形式的渥拉斯顿棱镜称为巴比涅（Babinet）补偿器。

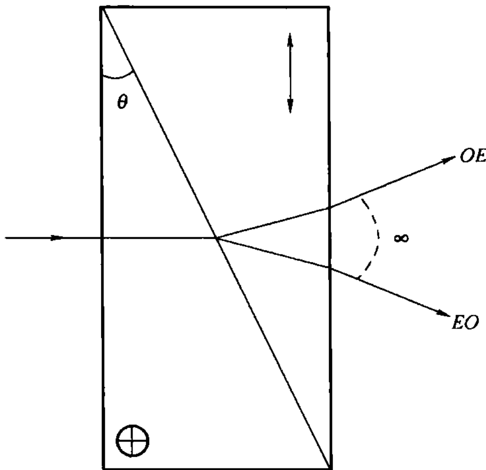


图 3.9　渥拉斯顿棱镜

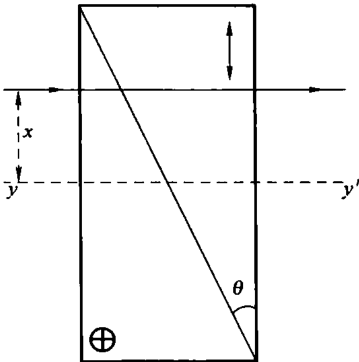


图 3.10　渥拉斯顿棱镜产生的两束光间的光程差与 x 成线性关系

用于求 OE 光线和 EO 光线间光程差的关系式（3.6）对垂直入射光也适用（分束角小，计算 Δ 时可忽略）。对非垂直入射的光线，式（3.6）的右边要加上一个与入射角平方成正比的项。但是这一项可忽略，例如对一个 10mm 厚的石英，当入射角小于 10°时，就可忽略。某些改进型的渥拉斯顿棱镜已设计成可用于更大的入射角的。

3.3.3　双焦系统

双折射晶体制成的透镜可作分光镜，一束平行光入射到这样的透镜上将被分成 O 光和 E 光，这两束光聚焦于两个不同的点上，如图 3.11 所示。O 光与 E 光的像分别位于沿光束的轴上，这与萨瓦偏光镜或渥拉斯顿棱镜的情况相反，在那里是沿垂直于入射光束的方向。现在已经设计出了各种形式的专用式复合透镜。

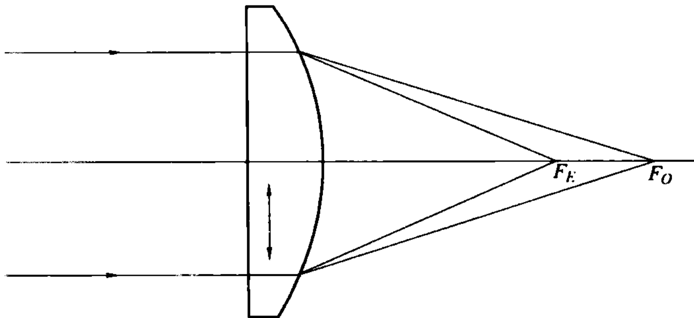


图 3.11　双折射透镜将入射光束分成 O 光和 E 光（它们聚焦于透镜轴上两个不同的点，图中为用正晶体制成透镜的分光情况）

3.4　横向剪切干涉仪

3.4.1　萨瓦偏光镜的使用

采用双折射分光镜的横向剪切干涉仪已广泛用于研究光学系统的像差。在此介绍一下弗

朗松和若尔代里提出的装置，该系统采用了萨瓦偏光镜使有像差的波前产生横向剪切，如图3.12所示。被检透镜 L（或镜面）使小光源 S 成像于 S'。L 到光源的距离根据被检透镜的情况而定。透镜 L_1 准直 S'发出的光线，使经过萨瓦偏光镜 Q 的光线是一束平行光。在萨瓦偏光镜的前后各放一个线偏振镜（图3.12中没有画出）。透镜 L_1 和 L_2 组成一个低倍显微镜，并调焦于被检透镜 L 上。如果透镜 L 是完美无缺的，则波前 Σ 是平面，由萨瓦偏光镜产生的 O 光波前和 E 光波前之间有相同的光程差。观察者在 L_2 的焦面外视场中心观察到均匀的颜色（用单色光照明时，则呈现均匀的光强）。有像差时波前 Σ 将变形，视场呈现不均匀。如果像差大则将观察到一组条纹。像差的性质和大小可由观察到的颜色（或强度）的变化来确定。

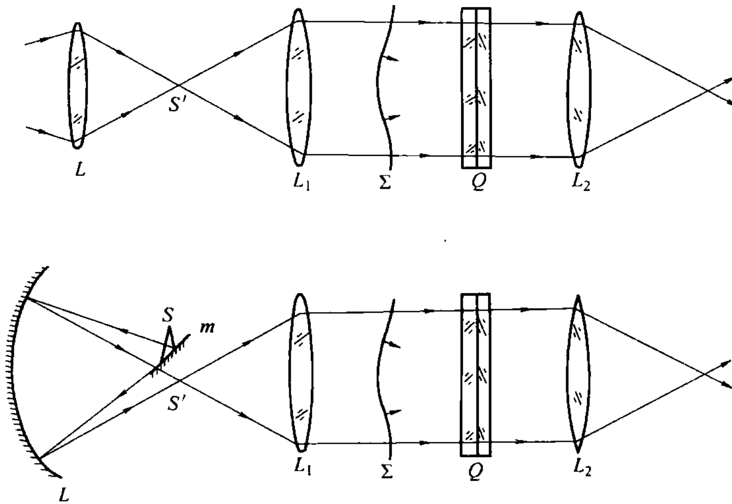


图3.12 采用萨瓦偏光镜 Q 的干涉装置检测光学系统

萨瓦偏光镜 Q 的远场条纹实际上定域于光源像 S'的平面上。光源的大小应使 S'只占有条纹宽度的几分之一（例如1/5）。

背景的颜色（或光强）可通过改变萨瓦偏光镜相对平行于条纹的轴线的倾斜度来选择。当萨瓦偏光镜垂直于光轴时，即垂直于入射光时，零级条纹与光源像 S'重合，背景将是暗的（起偏器与检偏器互相正交）。倾斜萨瓦偏光镜，可使 S'与任何一种所要求颜色的条纹重合，因此背景上将呈现这种颜色。可以用一组规则的直线条纹来代替视场中均匀的背景颜色，这些规则的直条纹在波前偏离理想形状的区域将会形变。如果在 L_2 的右边再放一个萨瓦偏光镜，则在与被检透镜共轭的平面内就会产生这样的规则直条纹。

为了说明这种方法的原理，研究了有一级球差时视场中的情形。以均匀光强为背景，在离光轴高度为 h 处，像差波前 Σ 和理想波前（对应于高斯像点）间在光轴方向的距离为

$$z = ah^4 \tag{3.8}$$

式中，a 为取决于像差值的常数。为了求出干涉场的条纹形状，必须计算萨瓦偏光镜产生的两个剪切波前 Σ_1 和 Σ_2 之间的光程差。图3.13所示为波前 Σ_1 和 Σ_2 在垂直于系统光轴平面（这是理想波前的平面）内的投影。O_1 和 O_2 分别为 Σ_1 和 Σ_2 的中心。选择坐标系，使 x 轴通过 O_1 和 O_2，y 为 O_1-O_2 的垂直平分线。现在考虑位于理想平面波前上的一点 m（x，y），它离像差波前 Σ_1 的距离为

$$z_1 = ar_1^4 \tag{3.9}$$

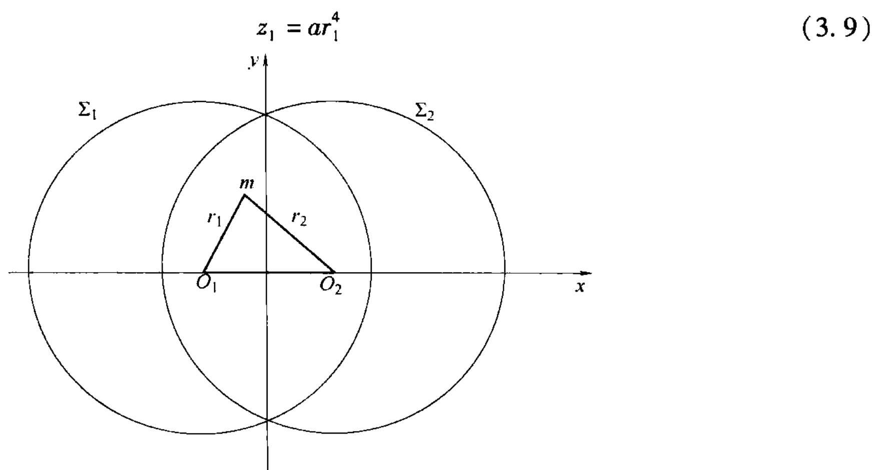


图 3.13　两个剪切波前在垂直于系统光轴平面内的投影

同样，m 点离 Σ_2 的距离为

$$z_2 = ar_2^4 \tag{3.10}$$

因此，Σ_1 和 Σ_2 间的间距为

$$z_1 - z_2 = a(r_1^4 - r_2^4) = 4a \times d\left(x^2 + y^2 + \frac{d^2}{4}\right) \tag{3.11}$$

式中，d 为 Σ_1 和 Σ_2 间的剪切量。

图 3.14 所示为光程差 $z_1 - z_2$ 相等的干涉条纹。其他像差形成的条纹形状可以用类似的方法确定。显然，当像差很小时，将看不到条纹，在视场中只有很小的光强变化。

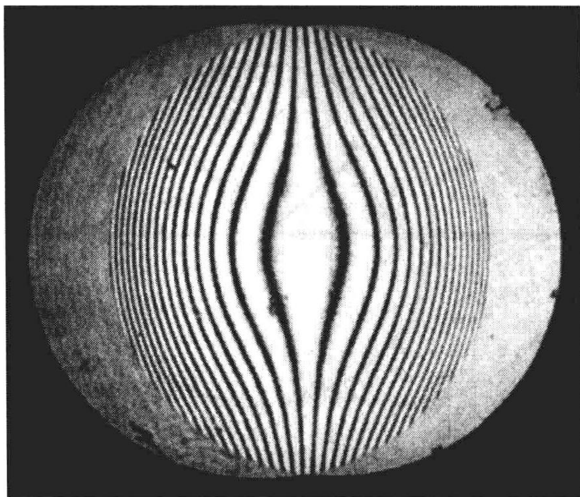


图 3.14　光程差 $z_1 - z_2$ 相等的干涉条纹

桑德斯（Saunders，1961、1962）指出，可以通过数学运算对横向剪切干涉图作完整地分析（参见第 4 章内容）。他用的方法可求出被检波前与一个紧贴球面的偏离值。参考球面可以选择，所以求得的结果是最接近的球面偏离值。

3.4.2 渥拉斯顿棱镜的使用

在图3.7所示的装置中，可以用渥拉斯顿棱镜代替萨瓦偏光镜。这个棱镜放在光源像S'处。垂直于光轴面横向平移渥拉斯顿棱镜可以改变背景光强度；沿着光轴移动渥拉斯顿棱镜则可在背景上产生一组直线条纹。

在图3.12所示的装置中光源的大小受到很大限制，但如果改进这个装置，使光线两次通过渥拉斯顿棱镜，则光源的大小可以显著增大。图3.15所示就是这样的装置。光源S成像于渥拉斯顿棱镜上的S'点，S'接近被检球面镜M的曲率中心。透镜L使M成像于观察屏M'上。通常，还需要两个起偏器来补偿系统，其中一个放置在m和W之间，另一个放在W和L之间。如果在两个平行的起偏器之间观察，则在W和L之间放一个能覆盖W全部孔径的起偏镜即可。如果S'和S''的位置对称与渥拉斯顿棱镜的中心条纹，则干涉光束间的光程差为零，背景随起偏器的交叉或平行而呈现均匀的暗或亮。在与W的条纹垂直的方向移动W，可改变背景光强。如果W沿着干涉仪的轴线移动，使它不再位于M的曲率中心，则在观察屏上将呈现一组直条纹。

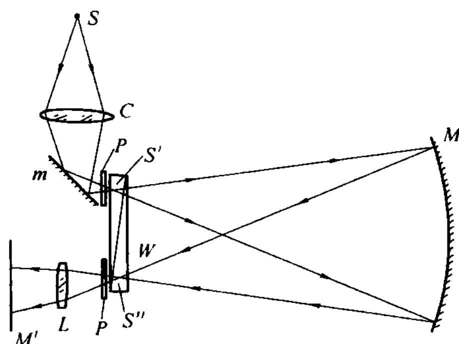


图3.15 双光程补偿干涉仪检测球面镜M

菲尔伯特（Philbert，1958）及菲尔伯特和加里森（Philbert and Garyson，1961）曾利用这个干涉仪来检验光学玻璃的均匀性（玻璃板靠近M放置），以及在修磨过程中检测球面镜、抛物镜和平面镜。检测抛物面时，将渥拉斯顿棱镜放在其焦点处，用一个辅助平面镜将从抛物面出射的平行光束反射回去。图3.16所示为用这个装置检测平面。在最后精磨阶段，加工表面与理想表面偏差很小，因此干涉图上只有微小的光强变化。在这种情况下，视场中的情况与在傅科刀口检测中观察到的情形类似。

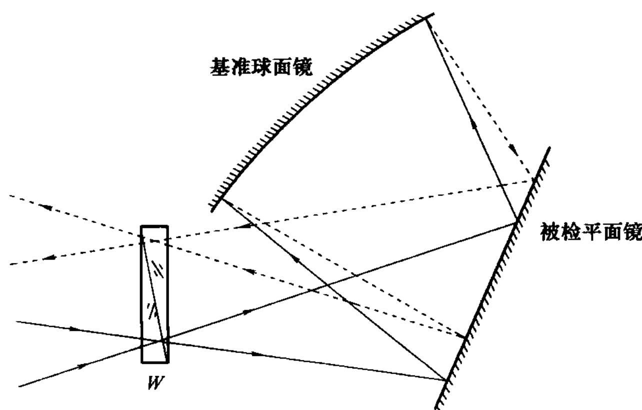


图3.16 检测平面用的装置

为了减小这个系统对振动的敏感性，戴森（Dyson，1963）在靠近渥拉斯顿棱镜处放一个小平面镜，使棱镜成像与自身重合，然后用一个小棱镜代替大棱镜，因为棱镜的一半已由小平面镜代替。

3.5　双焦干涉仪

戴森（Dyson，1957a、1957b、1970）设计了一个检测光学元件的干涉仪，其中用双折射透镜作为分光镜，如图3.17所示。这个双折射双焦透镜 L_1 为对称的三合透镜，由位于中间的方解石双凹透镜和两个玻璃双凸透镜组成。方解石的光轴位于透镜平面内，三合透镜的 O 光的光焦度设计为零，E 光的焦距为几厘米。与伯奇干涉仪一样（参见3.2节内容），该装置直接给出波前面形信息，因为入射光的一部分聚焦于被检系统孔径中的一个小区域内，并作为参考光束。

图3.17中被检系统为凹面镜，三合透镜的中心位于凹面镜曲率中心，其焦点 F_1 在凹面镜的镜面上。在 L_1 的右侧还放一个1/4波片，其主轴与方解石透镜的光轴成45°。一束准直线偏振光自左方入射，透镜 L_1 将此光束分成 O 光和 E 光。O 光不被 L_1 偏折而被透镜 L_2 聚焦于 L_2，因此光源在 F_1 处成像。O 光的反射光线被透镜 L_2 准直，并且由于它两次经过1/4波片，其振动方向转过90°，因此被透镜 L_1 折射至 F_1' 处。

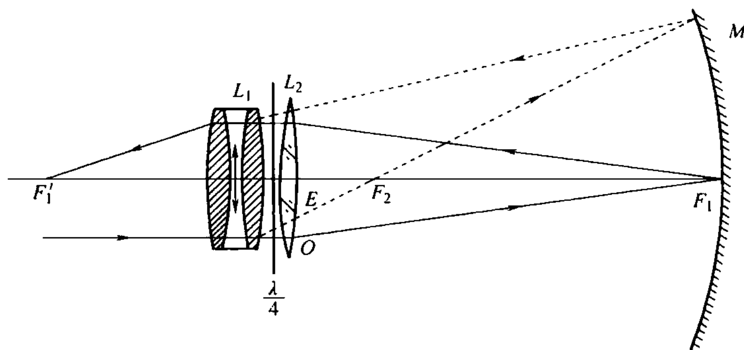


图3.17　戴森双焦干涉仪

E 光在其入射过程中被透镜 L_1 和 L_2 折射，并会聚于 L_1L_2 组合的焦点 F_2 处，被扩束后充满球面镜 M 的全孔径。由于装置的对称性，该光束也被聚焦于 F_1'。在三合透镜的左侧放置一个半反射镜，使光源（或观察系统）可放在干涉仪的轴外。

观测者将在 F_1' 处看到：一个均匀的光斑（其大小由透镜的孔径角（参考场）确定）和一个照亮的球面镜 M 的孔径（检测场）。这两个场将产生干涉（显然有一个检偏器使 O 光和 E 光的振动彼此平行），在无像差时，合成场的光强将是均匀的。当三合透镜轴向移动时，将观察到圆形条纹，当球面镜有像差时，这些条纹就发生变形。分光路干涉仪一样可以从这些变形条纹中推导出来像差。

戴森干涉仪可用于自动消像散系统，即从特定平面上的一点发散的光重新聚焦至同一平面上一点形成倒像的系统。非自动消像散系统可通过添加一个或多个辅助零件而变为自动消像散系统。例如，为了检测透镜，采用了图3.18所示的方案。在图3.18a中，透镜在无限远的共轭下检测。在图3.18b中，透镜在有限远距离共轭检测，焦点 C 与三合透镜中心重合。焦点 C 与三合透镜中心重合，值得一提的是被检系统并不是在校正良好的情况下工作，因为检测光束不是沿原光路返回。该装置给出的是两个焦点平移像差的总和，这两个聚焦位置分别在所要求位置的两侧。总误差往往很小，由于三合透镜存在像差，所以只有中等孔径

（例如$f/5$）的光学系统才能用这种干涉仪检测。

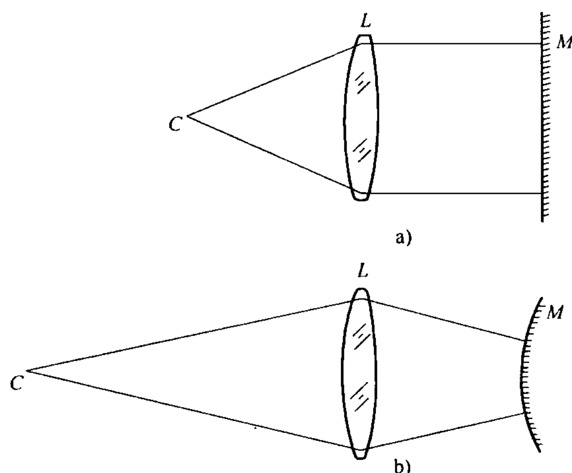


图 3.18 添加辅助反射镜 M 可使被检透镜 L 自动消像散

a）透镜在无限远的共轭下检测 b）透镜在有限远距离共轭检测

3.6 桑德斯棱镜干涉仪

桑德斯（Saunders，1967、1970）描述了横向剪切干涉仪，其分光镜由两个斜边胶合在一起的直角棱镜组成，其中一个斜面半镀银，如图3.19所示，B 面和 B' 面制成高反射面。为了在视场中心获得零级条纹，应使反光面中心至两个反射面的距离相等。如果两个棱镜完全相同，则从 A' 面出射的两光束互相平行。如果使一个棱镜绕垂直于另一个棱镜的半反射面的轴转动可在两光束间引入剪切角。剪切方向近似平行于棱镜的顶边。还可以使两个棱镜的角 α 和 α' 稍有不同，来产生剪切角。当这两个棱镜不是从同一个大棱镜切割下来而是分别制成时，通常就有这种情况，此时剪切角等于 $2(\alpha-\alpha')$，剪切方向垂直于棱镜顶边。

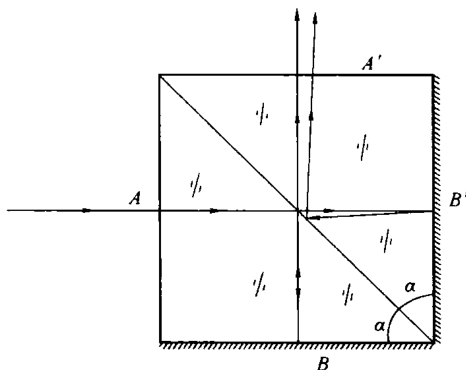


图 3.19 桑德斯设计的分光镜

图 3.20 所示为检测有限远共轭透镜的装置。调节棱镜，使其背面近似于像平面并且靠近它，使主光线在棱镜中心附近通过。这样调整会产生可见的条纹。当光源像位于棱镜背面时，条纹宽度很大。沿主光线移动棱镜使其离开光源像，可减小条纹宽度。沿平行于像平面且平行于剪切方向移动棱镜，可使任何选定的条纹通过干涉场的任何选定地点。桑德斯棱镜的调整与渥拉斯顿棱镜的调整相似。为了得到高对比度的条纹，光源在剪切方向上的尺寸要小。立方体的边长最好是 10～15mm。

桑德斯（Saunders，1957）还研究过一种采用改进型的克斯特尔斯双像棱镜的波前反转干涉仪。图 3.21 为其检测一个无限远共轭透镜的示意图。分光镜底面是球面，它的曲率中心 S_0 与被检透镜所在的像点重合。观察者的眼睛位于光源 S 的像 S'处。在此装置中，棱镜

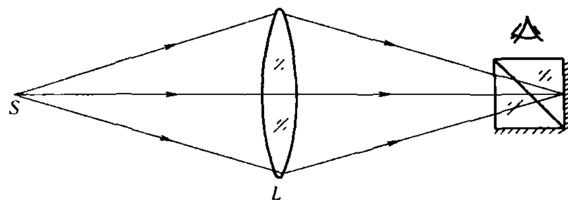


图 3.20　采用图 3.19 分光镜的横向剪切干涉仪

分光面下的那部分波前在第二次通过棱镜后，好像被折叠到上半部分去了。当分光面切过透镜的中心时，偶级像差被消除。但是，当分光面被调整至与透镜轴有一夹角时，偶级像差仍存在。桑德斯对这个装置进行改装，可用于检测不同像差。

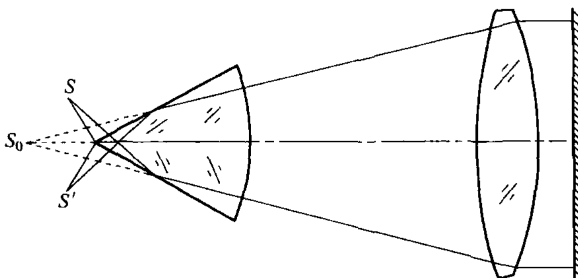


图 3.21　桑德斯波前反转干涉仪

3.7　点衍射干涉仪

另一种有意义的共光路干涉仪所谓的点衍射干涉仪，最初是由林尼克（Linnik，1933）在 1933 年提出的，并由斯马特和斯特朗（Smart and Strong，1972）重新开发，并由斯马特和斯蒂尔（Smart and Steel，1975）做了全面的发展。这种干涉仪原理如图 3.22 所示，被检波面聚焦并得到一个通常有像差的点光源像。在此像面处放置一个吸收膜片，在膜片上有一个针孔或不透明的小圆盘，使光线衍射而得到一个参考球面波。图 3.23a 所示为在放有衍射板的像平面上的放大振幅，图 3.23b 所示为经过衍射板后的整个振幅，它可以看做由图 3.23c 的两图像的振幅叠加。

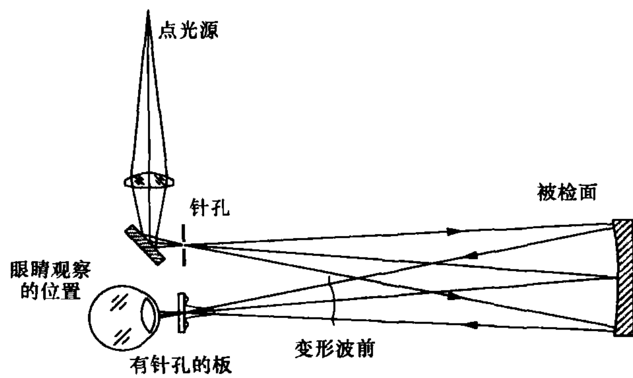


图 3.22　点衍射干涉仪原理

要得到高对比度干涉图，透过膜片的波面和衍射板的球面波在观测面上应有相同的振幅。这可以通过改变滤光片的透过率和针孔或圆盘的大小来控制。此外，球面波的振幅还取决于有多少成像光线落到针孔或圆盘上，而这又取决于波像差的大小和针孔或圆盘的位置。斯马特和斯蒂尔（Smartt and Steel，1975）建议，滤光片的透过率为 0.005～0.05，最常用的值为 0.01。针孔或圆盘的最佳尺寸约等于无像差时原波面产生的爱里斑的大小。为了使两束光的振幅相匹配，吴等人（Wu et al.，1984）采用在相位膜片偏振板上的针孔。旋转偏振板后，起偏器改变透过膜片的光束振幅，而不改变衍射光束的振幅。通常参考波前的倾斜和离焦可分别通过横向和纵向平移衍射点来改变。

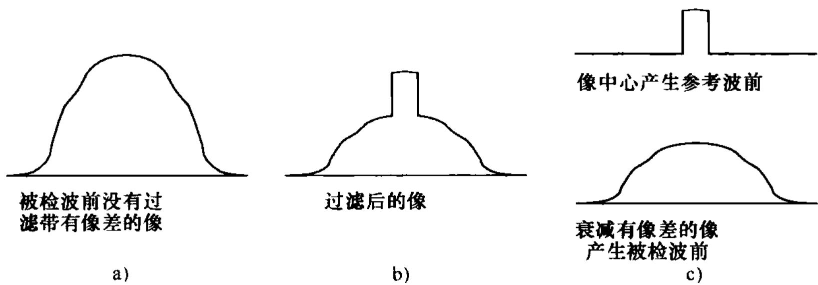


图 3.23　衍射板所在的像平面上振幅
a）未经过衍射板　b）经过衍射板之后　c）参考波前和被检波前

米勒德等人（Millerd et al.，2004）报道了相移点衍射干涉仪，这种干涉仪最重要的部分是一个偏振的点衍射板，如图 3.24 所示。在衍射板上中心区域和环形的部分为在两个垂直方向上的起偏器。它们由金属线格的结构制造而成，其详细结构可参考相关的书籍。经过衍射板后参考波前和被检波前为两个垂直方向上的正交线偏振光。有在 45°角方向两个正交偏振面的 1/4 波相位板使两干涉光在垂直方向上圆偏振。然后与通常一样旋转分析器可以得到想要的不同相位。尼尔和怀扬特（Neal and Wyant，2006）还介绍了另一种采用双折射针孔板相移点衍射干涉仪。

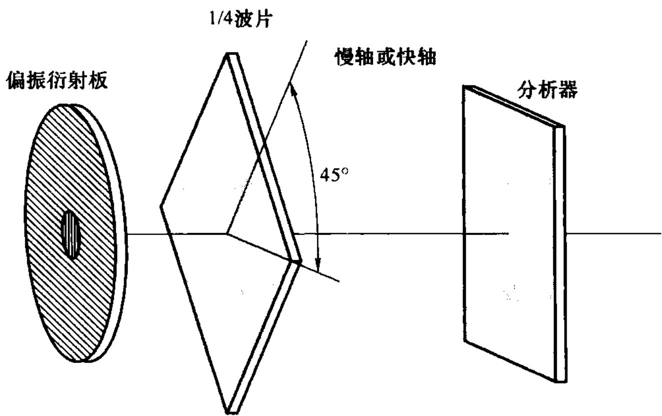


图 3.24　相移偏振衍射干涉仪中的主要组成元件

点衍射干涉仪已成功应用于检测天文望远镜（Speer et al.，1979）和环形面的检测（Marioge et al.，1984）。斯马特和斯蒂尔（Smartt and Steel，1985）基于点衍射原理开发出

了白光干涉显微镜。

3.8　采用共光路干涉仪的泽尼克检测

在所有两光束干涉仪中，干涉条纹的光强是两束光相位差的函数，如图3.25所示。如果干涉图有很多条纹，光强会经过函数的最高点和最低点。但是如果波前是完善的，且偏差小于半个波长，相位的改变不会引起任何光强的变化，因为此时图中在点A处的斜率为0。

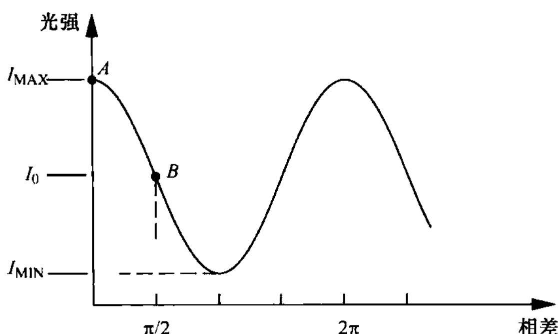


图3.25　干涉仪中光强和相位差函数关系

如果通过一些方法引入像差偏移就可以很容易检测出这些小波前误差，因此当波前完善的时候像差为$\pi/2$（B点）。这种干涉仪敏感的小像差很大。图3.26a是平移项为0的干涉图，图3.26b为同一种波前，但平移项为$\pi/2$。

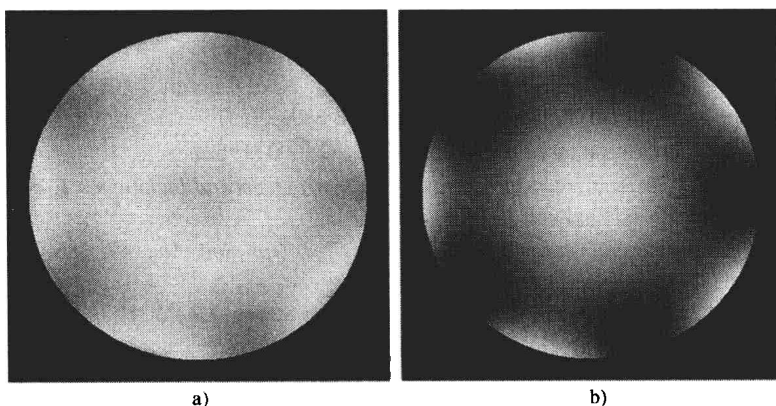


图3.26　偏差远小于波长的同一波前产生的干涉图
a）平移项为0　b）平移项为$\pi/2$

制造泽尼克点衍射干涉仪需要用到如图3.27所示的衍射板，环形区域镀了振幅透过率为T_{ext}的膜，相位板的振幅透过率为T_{disc}，典型的通常为1。中心斑厚度较环形区域更厚，以便通过中心的光路相位比通过环区域光路的相位大。我们假设相位差为ϕ。因此被检波前和参考波前相位差γ

$$T_{disc}\exp(i\phi)-T_{ext}=|T_1|\exp(i\gamma) \tag{3.12}$$

其中，

$$|T_1|^2=T_{disc}^2+T_{ext}^2-2T_{disc}T_{ext}\cos\phi \tag{3.13}$$

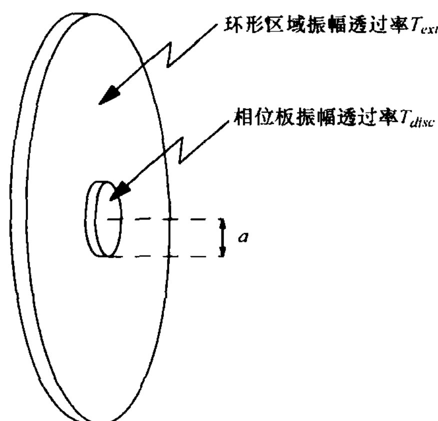


图 3.27 Zernike 衍射板简图

因此，可以看到参考波前和被检波前的相位差 γ

$$\tan\gamma = \frac{T_{disc}\sin\phi}{T_{disc}\cos\phi - T_{ext}} \tag{3.14}$$

如果需要 $\gamma = \pi/2$，则要求

$$\cos\phi = \frac{T_{ext}}{T_{disc}} \tag{3.15}$$

可以看到如果 T_{ext}变得很小时，ϕ 和 γ 接近于同一值，点衍射中的泽尼克检测来自于一物理光学观点，将在第 8 章中介绍。

参考文献

Burch J. M., "Scatter Fringes of Equal Thickness," *Nature*, **171**, 889 (1953).

Burch J. M., "Scatter-Fringe Interferometry," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 600 (1962).

Burch J. M., "Interferometry With Scattered Light," in: *Optical Instruments and Techniques*, J. Home Dickson, Ed., Oriel Press, England, 1969, p. 213.

Dyson J., "Common-Path Interferometer for Testing Purposes," *J. Opt. Soc. Am.*, **47**, 386 (1957a).

Dyson J., "Interferometers," in: *Concepts of Classical Optics*, John Strong, Ed., W. H. Freeman, San Francisco, 1957b, Appendix B, p. 377.

Dyson J., "Very Stable Common-Path Interferometers and Applications," *J. Opt. Soc. Am.*, **53**, 690 (1963).

Dyson J., *Interferometry as a Measuring Tool*, Machinery Publishing Co., Brighton, 1970.

Françon M. and M. Jordery, "Application des Interferences par Double Réfraction a l'Etude des Aberrations," *Rev. Opt.*, **32**, 601 (1953).

Hopkins H. H., "Interferometric Methods for the Study of Diffraction Images," *Opt. Acta*, **2**, 23 (1955).

Houston J. B. Jr., "How to Make and Use a Scatterplate Interferometer," *Opt. Spectra*, **4**, 32 (1970).

Huang J., N. Ohyama, and T. Honda, "A Null Test of Conic Surfaces in Zone Plate Interferometer," *Opt. Commun.*, **72**, 17 (1989).

Juneji H., T. Honda, N. Ohyama, and J. Tsujiuchi, "Fringe Scanning Scatter Plate Interferometer," *Opt. Commun.*, **68**, 235 (1988).

Linnik W., "Simple Interferometer to Test Optical Systems," Comptes Radnus de l'Académie des Sciences d l'U.R.SS. 1, 208 (1933). Abstract in *Z. Instrumentenkd.*, **54**, 463 (1934).

Lohmann A. W., "An Interferometer with a Zone Plate Beam-Splitter," *Opt. Acta*, **32**, 1465 (1985).

Marioge J.- P., B. Bonino, F. Bridou, P. Fournet et al., "La Fabrication et le Controle de Surfaces Toriques," *J. Opt. (Paris)*, **15**, 286 (1984).

Millerd J. E., N. J. Brock, J. B. Hayes, and J. C. Wyant, "Instantaneous Phase-Shift, Point-Diffraction Interferometer," *Proc. SPIE*, **5531**, 264–272 (2004).

Murty M. V. R. K., "Common Path Interferometer Using Fresnel Zone Plates," *J. Opt. Soc. Am.*, **53**, 568 (1963).

Neal R. M. and J. C. Wyant, "Polarization Phase-Shifting Point-Diffraction Interferometer," *Appl. Opt.*, **45**, 3463–3476 (2006).

North-Morris M., J. Van Delden, and J. C. Wyant, "Phase-Shifting Birrefringent Scatterplate Interferometer," *Appl. Opt.*, **41**, 668–677 (2002).

Patorski K. and L. Salbut, "Simple Polarization Phase-Stepping Scatterplate Interferometry," *Opt. Eng.*, **43**, 393–397 (2004).

Philbert M., "Applications Métrologiques de la Strioscopie Interférentielles," *Rec. Opt.*, **37**, 598 (1958).

Philbert M. and M. Garyson, "Réalisation et Controle par Strioscopie Interférentielle de Miroirs Plans, Sphériques et Paraboliques," in: *Optical Instruments and Techniques*, K. J. Habell, Ed., Chapman and Hall, London, 1961, p. 352.

Rubin L. F., "Scatter Plate Interferometry," *Opt. Eng.*, **19**, 815 (1980).

Saunders J. B., "The Kösters Double-Image Prism," in *Concepts of Classical Optics*, John Strong, Ed., W. H. Freeman, San Francisco, 1957, Appendix C, p. 393.

Saunders J. B., "Measurement of Wavefronts Without a Reference Standard I; The Wavefront-Shearing Interferometer," *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **65B**, 239 (1961).

Saunders J. B., "Measurement of Wavefronts Without a Reference Standard II: The Wavefront-Reversing Interferometer," *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **66B**, 29 (1962).

Saunders J. B., "A Simple, Inexpensive Wavefront Shearing Interferometer," *Appl. Opt.*, **6**, 1581 (1967).

Saunders J. B., "A Simple Interferometric Method for Workshop Testing of Optics," *Appl. Opt.*, **9**, 1623 (1970).

Scott R. M., "Scatter Plate Interferometry," *Appl. Opt.*, **8**, 531 (1969).

Shoemaker A. H. and M. V. R. K. Murty, "Some Further Aspects of Scatter-Fringe Interferometry," *Appl. Opt.*, **5**, 603 (1966).

Smartt R. N. and J. Strong, "Point-Diffraction Interferometer" (abstract only), *J. Opt. Soc. Am.*, **62**, 737 (1972).

Smartt R. N., "Zone Plate Interferometer," *Appl. Opt.*, **13**, 1093 (1974).

Smartt R. N. and W. H. Steel, "Theory and Application of Point-Difference Interferometers," Proceedings of the ICO Conference on Optical Methods in Scientific and Industrial Measurements, Tokyo, 1974; *Jpn. J. Appl. Phys.*, **14**, Suppl. **1**, 351 (1975).

Smartt R. N. and William H. Steel, "Point Diffraction Interferometer," *Appl. Opt.*, **24**, 1402 (1985).

Speer R. J., M. Crisp, D. Turner, S. Mrowka, and K. Tregidjo, "Grazing Incidence Interferometry: The Use of the Linnik Interferometer for Testing Image-Forming Reflection Systems," *Appl. Opt.*, **18**, 2003 (1979).

Stevens R. F., "Zone Plate Interferometers," *J.Mod. Optics (Form. Opt. Acta)*, **35**, 75 (1988).

Su D.- C., T. Honda, and J. Tsujiuchi, "A Simple Method of Producing Accurately Symmetrical Scatter Plates," *Opt. Commun.*, **49**, 161 (1984).

Su D.- C., N. Ohyama, T. Honda, and J. Tsujiuchi, "A Null Test of Aspherical Surfaces in Scatter Plate Interferometer," *Opt. Commun.*, **58**, 139 (1986).

Su D.- C., T. Honda, and J. Tsujiuchi, "Some Advantages of Using Scatter Plate Interferometer in Testing Aspheric Surfaces," *Proc. SPIE.*, **813**, 217 (1987).

Wu S. T., Ch. L. Xu, and Zh. J. Wang, "New Application of Point Diffraction Interferometer—Polarization Fringe Scanning PDI," in: *ICO 13 Conference Digest, Optics in Modern Science and Technology*, H. Ohzu, Ed., Reidel, Dordrecht, 1984, p. 458.

第4章　横向剪切干涉仪

4.1　引言

横向剪切干涉计量是干涉计量学中的一个重要领域，已广泛应用于各种场合，如检验各种光学零件和光学系统，研究气体和液体中的流动、扩散等现象。横向剪切干涉方法基本上包括以下步骤：①复制被测波前并将其小量平移；②得到原始波前和平移后波前之间的干涉图样。

图4.1所示为横向剪切干涉的原理图，图4.1a为近似平面波前，图4.1b为球面波前。当波前为近似平面时，横向剪切可由波前在其平面上平移得到。当波前为近似球面时，由波前相对原波前沿一条通过球面波前曲率中心的轴线滑动来得到横向剪切。

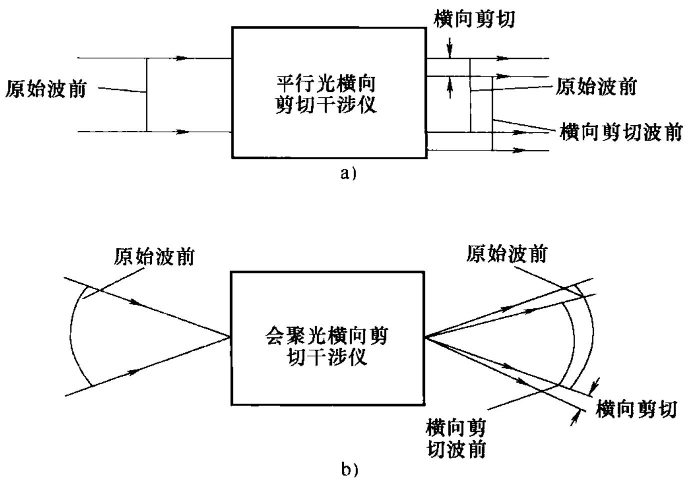


图4.1　横向剪切干涉的原理图
a）近似平面波前　b）球面波前

有许多可以产生横向剪切的物理装置。著名的意大利光学科学家朗奇（Ronchi）首先在20世纪上半叶引入横向剪切波前来进行光学零件检验。他采用的是衍射方法，在一套适当分离的谱线中得到零级和一级光束。这项技术以发明者的名字命名为朗奇检验，在20世纪60年代激光发明之前，朗奇检验成为光学检验中常用的技术。

在本章中，我们将介绍使用分光镜可以获得横向剪切干涉图的装置。分光镜将入射波前进行振幅分割，但不会改变波前形状。也就是用镀有半反射膜层材料的平面作为分光板。本章将介绍实现横向剪切的几个装置，主要是为了说明在实验室或光学车间，利用一些易于获得的零件，能够很方便地搭建一台可操作的横向剪切干涉仪。横向剪切干涉技术基本上是一维的，当在两个相互正交的方向实施时，它具有了双倍的一维功能。本章还将介绍更为通用一些的矢量剪切干涉技术，由一次剪切来实现两维功能。

在设计横向剪切干涉仪时，另一个需要考虑的重要因素是光源的性质。就横向剪切干涉仪来讲，光源可以分为两类：①激光光源，如He-Ne气体激光器，能够给出高空间和时间相干性的632.8nm光束；②所有其他光源，如气体放电灯，在某种程度上具有时间相干性，但不具有空间相干性。

4.2　光源的相干性

图 4.2 所示为横向剪切干涉仪的示意图，其中，剪切发生在一个由准直透镜得到的近似平面波前上。设被测波前的全口径宽度为 d，横向剪切量为 S，准直透镜的焦距为 f。则当光源尺寸与给定准直镜头的 f 数所决定的中心衍射斑（爱里斑）的宽度相等时，在整个光束口径内波前是空间相干的。

f 数是光学系统的焦距 f 与其通光口径 d 的比值。对圆形口径来说，衍射斑的直径为 $1.22\lambda f/d$。λ 是所采用的特定光源谱线的波长。因此，实现空间相干性所采用的针孔相对于光源的尺寸量级是由（$\lambda f/d$）所给出。幸运的是，在横向剪切干涉仪中，空间相干性应该是足够的，这样，由分开一定距离 S（$S<d$）的一对波前形成的干涉条纹是能够探测到的。这样，光源（针孔）尺寸是（$\lambda f/d$）（d/S）$=\lambda f/S$。因此，所选择的针孔尺寸是衍射极限针孔尺寸的若干倍。

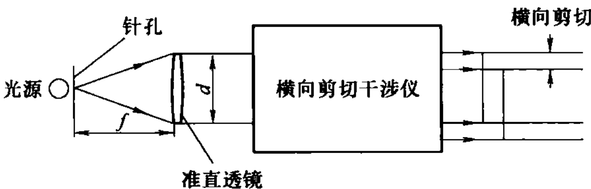


图 4.2　横向剪切干涉仪示意图

举一个例子，假定使用水银放电灯作为光源，并使用滤波片分离出绿色谱线（546.1nm）。如果采用一个 f 数 $=5$ 的准直透镜，并假定剪切系数 S/D 为 0.1，则针孔必须在 25μm 左右。这是一个很小的针孔，一般来讲，在干涉图样中仅能得到非常弱的光强。因此，必须采用像高压水银拱形灯这样的高强度光源。即使采用滤波片分离出适用的谱线，该光源的时间相干性仍然很差。采用这样的光源，就必须在干涉仪中补偿两路光的光程差，才能用作横向剪切干涉仪。这种情况有时称为白光补偿。当使用白光光源时，所得到的横向剪切干涉图样中心部分的条纹是黑白的（白色），其他条纹则是彩色的。

在气体激光光源得到普遍使用以前，所有的横向剪切干涉仪都设计有白光补偿。现在，设计两个相干涉光束的光程不相等（不加补偿）的横向剪切干涉仪已经成为可能。但为了实现这一目的，必须采用高时间和空间相干性的激光光源。在这类场合下，发出 632.8nm 谱线的 He-Ne 激光常作为光源。一个经过白光补偿设计的横向剪切干涉仪通常是可以使用激光光源的，但是反过来却不行。因为一个为使用激光光源设计的横向剪切干涉仪，在使用相干性不足的光源时，可能会产生不相等的光程，从而无法产生可见的或可记录的干涉图样。

4.3　横向剪切干涉计量的理论简介

波前误差 $W(x, y)$ 是实际波前和理想波前或者实现设计目标所需要的波前之间的差值。波前是在三维空间内具有相同相位的所有点的组合。因此，它的单位是 m。在干涉计量和光学工程中，用 λ 为单位来衡量波前（相当于照明光源的波长数）。当照明光源是在

632.8nm 发射谱线的 He-Ne 激光器时，两套单位的换算关系是 $\lambda = 632.8\text{nm} = 632.8 \times 10^{-9}\text{m}$。

图 4.3 所示为原始波前和横向剪切波前。暂假定波前为近似平面，波前误差可以认为是相对该平面的小量偏离。波前误差可以表示为 $W(x, y)$，(x, y) 为任意点 $P(x, y)$ 的坐标位置。当波前在 x 方向有一个量值为 S 的剪切时，剪切波前的任一点上的波前误差为 $W(x-S, y)$。在 $P(x, y)$ 点上，原始波前和剪切波前之间的波前差异 $\Delta W(x, y) = W(x, y) - W(x-S, y)$。这样，在剪切干涉计量中，需要求得的量即为 $\Delta W(x, y)$。

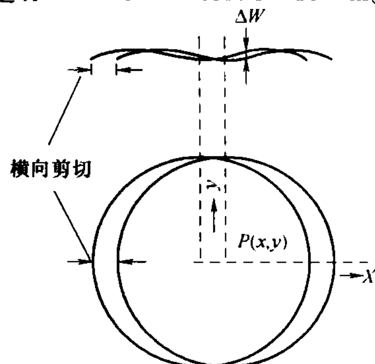


图 4.3 用正视图和俯视图表示的圆形孔径原始波前和剪切波前的示意图

由横向剪切产生的条纹仅在两波前的重叠区域可以观察到。

当剪切量 S 为零时，干涉仪中的任一点上都不存在波前差异。因此，观察不到波前差异，也无法不受幅值影响地测量出波前误差。现在，可以将波前误差 $\Delta W(x, y)$ 按照常用关系式表示为波长单位

$$\Delta W(x,y) = n\lambda \tag{4.1}$$

其中，n 为干涉条纹的级次，λ 为所用的波长。在 $(S/\partial x)$ 的形式下，式（4.1）的左边可以是其若干倍。当剪切量 S 极小并在理论上接近零时，波前差异的变化相对平移量的变化成为了一个偏微分。式（4.1）可以写为

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}S = n\lambda \tag{4.2}$$

这样，在横向剪切干涉仪中得到的信息是以角度度量的光线误差 $(\partial W/\partial x)$。随着剪切量 S 趋于零，式（4.2）会变得更精确。但随着剪切量 S 趋于零，测量的灵敏度将会降低。这样，在应用式（4.2）时，试验人员就必须努力寻找一个合适的剪切量 S，以兼顾两者。

现在采用较为简单的形式，来研究非旋转对称像差时的一些特殊情况。

4.3.1 球面和平面波前的干涉图样

（1）离焦 离焦波前误差可以表示为

$$W(x,y) = D(x^2 + y^2) \tag{4.3}$$

系数 D 表示误差的幅值，通常以波长数给出。当存在一个微量的离焦时，将使预期产生理想平面波的光学系统，出射一个曲率半径很大的微凹或微凸的球面波前。因此，在这种情形下

$$\Delta W(x,y) = 2DxS = n\lambda \tag{4.4}$$

式（4.4）表示一个直条纹系统，条纹间距相等且垂直于 x 方向（剪切方向）。这种情形如图 4.4a 所示，直条纹出现在叠加波前的公共区域。如果不存在离焦（$D=0$），则不会出现条纹。由于两条光路的光程相等，波前的叠加区域看起来具有均匀的强度分布。

（2）波面倾斜 当波前被横向剪切时，通常假定新的波前相对于原始波前不存在倾斜。然而，在一些特定的装置中，在这两个波前之间还是可能获得一个已知量的倾斜的。在这些情形下，通常获得一个与剪切方向相垂直的倾斜。与该倾斜相关的光程差可以表示为 y 坐标的线性函数。这样，在仅存在波面倾斜的情况下

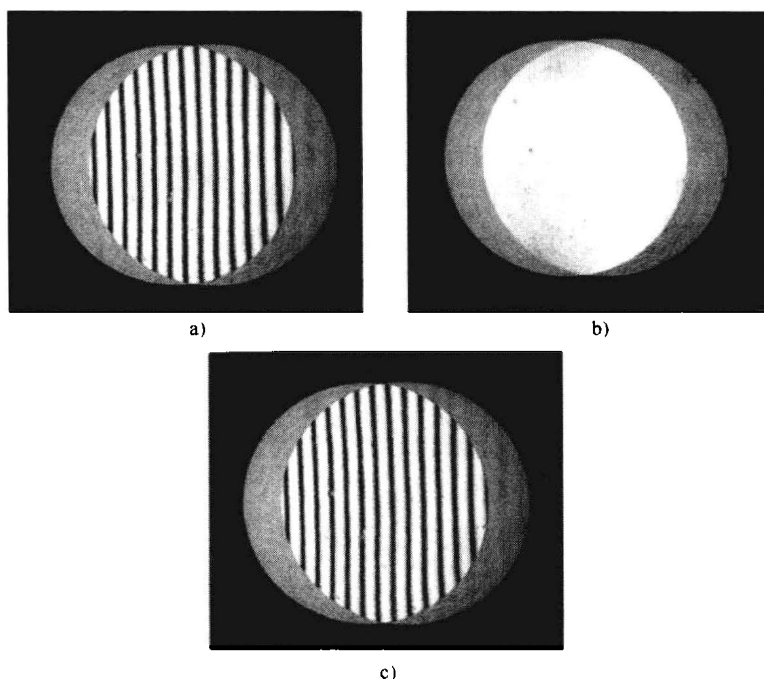


图 4.4 一组无像差波前的横向剪切干涉图

a）焦点内 b）焦点上 c）焦点外（在图 b 中，不存在离焦，因而没有干涉条纹。图 a 和图 c 是由正负相反的相等微量离焦所产生的。）

$$\Delta W(x,y)=Ey=n\lambda \tag{4.5}$$

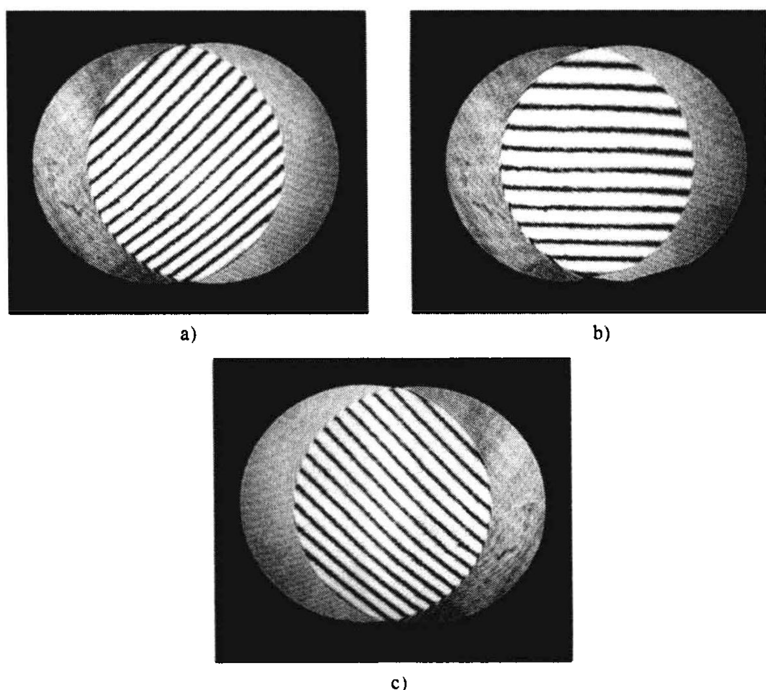
E 为剪切波前和原始波前之间的倾斜角。它们的交线平行于 x 轴。如果离焦和波面倾斜同时出现，光程差为

$$\Delta W(x,y)=2DxS+Ey=n\lambda \tag{4.6}$$

式（4.6）表示既不平行于 x 轴也不平行于 y 轴的直条纹系。只有当系数 D 或 E 为零时，条纹会分别平行于 x 轴或 y 轴。

让我们解释一下式（4.4）和式（4.6）所代表的两种情况之间的差异。当不存在离焦时（$D=0$），式（4.4）描述了一个均匀的或无条纹的场，而式（4.6）给出了一个条纹平行于 x 轴的直条纹系。当一个光学系统相对于一个点光源平行时，我们研究一下焦点区域的情况。图 4.4 所示为一个没有倾斜的横向剪切干涉仪中典型的横向剪切干涉图样。图 a 为焦点内，图 b 为焦点上，图 c 为焦点外。当使用一个能够为了同样目的引入倾斜的横向剪切干涉仪时，引入的倾斜与剪切方向垂直，对应序列的干涉图样如图 4.5 所示。在这种情形下，即便是很小的离焦也可以被观察到。与识别一个完全没有条纹的平面相比，检测条纹方向的变化要容易得多。

因此，在特定情况下，横向剪切之外还可以引入倾斜可能会成为一个明显的优势。后面我们将介绍如何利用这个特性来在光学装置中完成不同的任务。



a)　b)　c)

图4.5　一组无像差波前的横向剪切干涉图

a）焦点内　b）焦点上　c）焦点外（在焦点上，干涉条纹平行于剪切方向；焦点内和焦点外，条纹相对剪切方向是倾斜的。）

4.3.2　横向剪切干涉中初级像差的干涉图样

1. 初级球差

初级球差的波前误差可以表示为

$$W(x,y)=A(x^2+y^2)^2 \tag{4.7}$$

这样，当不存在离焦项时，剪切干涉图样可以由式（4.8）得到

$$\Delta W(x,y)=4A(x^2+y^2)xS=n\lambda \tag{4.8}$$

当存在离焦时，条纹分布可以由式（4.9）确定

$$\Delta W(x,y)=[4A(x^2+y^2)x+2Dx]S=n\lambda \tag{4.9}$$

式（4.8）和式（4.9）的幂级数都达到3。因此，显示存在球差的图样将是立体的弯曲线。图4.6所示为在原始波前中存在初级球差时的典型干涉图样，除了球差和离焦外，倾斜也可出现。干涉条纹的方程由式（4.10）给出

$$\Delta W(x,y)=[4A(x^2+y^2)x+2Dx]S+2Ey=n\lambda \tag{4.10}$$

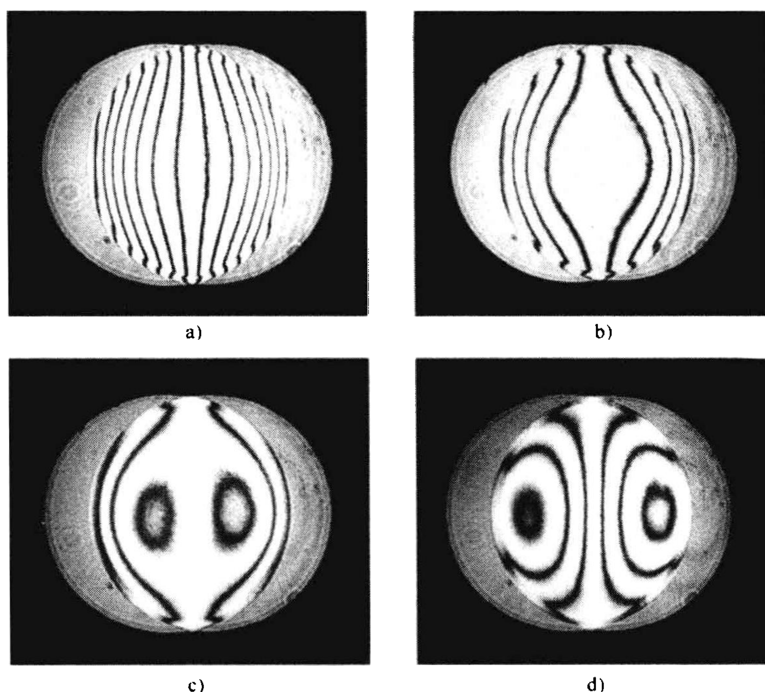
如果仅有球差和倾斜存在，可以由下式（4.11）来估计出条纹形状

$$\Delta W(x,y)=4A(x^2+y^2)xS+2Ey=n\lambda$$

当初级球差很小并且不存在离焦时，因为中心条纹接近 x 轴，式（4.10）可以近似为

$$\Delta W(x,\varepsilon)=4Ax^3S+2E\varepsilon=0 \tag{4.11}$$

中心条纹的方程给出了典型的水平S形特征曲线，在其中，非常小的球差都可以用目视方法识别出来。典型横向剪切干涉图如图4.7所示。



a) b) c) d)

图 4.6 在原始波前中存在初级球差时的典型干涉图样
（当没有离焦时出现图 b 中的条纹。）
a）焦点内 b）焦点上 c）焦点外 d）焦点外

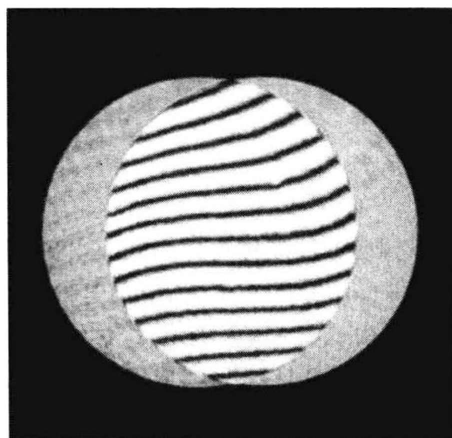


图 4.7 存在初级球差，并且在垂直方向有微量倾斜时的典型横向剪切干涉图（干涉条纹带有 S 形特征。）

2. 初级彗差

初级彗差的波前误差可以表示为

$$W(x,y)=By(x^2+y^2) \tag{4.12}$$

由于该像差的非对称性，剪切干涉图样会随着剪切是在 x 方向、y 方向或者其他方向而出现不同的形状。

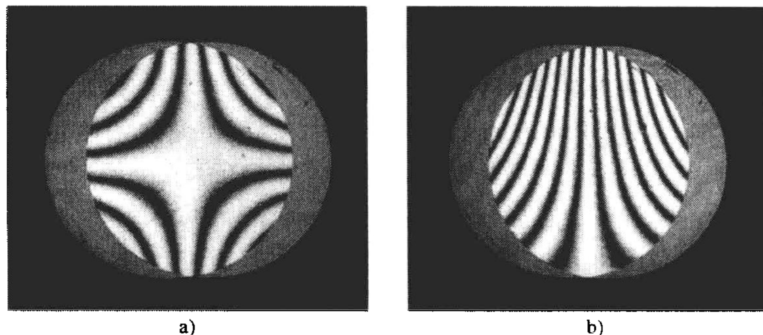
首先考虑在 x 方向剪切情况。图样形状可以由式（4.13）得到

$$\Delta W(x,y)=2BxyS=n\lambda \tag{4.13}$$

式（4.13）所示的曲线为一组分别有着 x 方向和 y 方向渐近线的等轴双曲线。离焦的效果是附加另外一项 $2DxS$，则式（4.13）可写为

$$\Delta W(x,y)=2BxyS+2DxS=n\lambda$$

离焦项的引入使得该等轴双曲线系的中心沿着 y 方向产生了移动。图4.8给出了这两种情形下的典型条纹图样。在图4.8a中，位于中心的条纹指示仅有彗差存在。在图4.8b中，垂直于剪切方向的倾斜被叠加于彗差上。当其他方向的倾斜被加到彗差上时，双曲线条纹的中心将沿着一条与 x 轴和 y 轴都有倾斜的直线移动。



a)　　b)

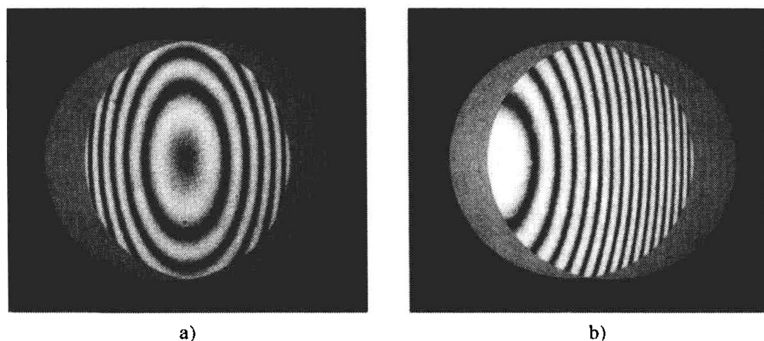
图4.8　带有初级彗差且剪切方向选在弧矢方向（水平方向或者 x 轴方向）时的典型横向剪切干涉图

a）无离焦时等轴双曲线的中心居中　b）有小量离焦时等轴双曲线的中心（实际上是渐近线的交点）在垂直于剪切方向上（y 轴方向）产生偏移。

下面考虑在 y 方向剪切的情形。这时，如果 y 方向的剪切量表示为 T，则条纹形状可以由式（4.14）得到

$$\Delta W(x,y)=B(x^2+3y^2)T=n\lambda \tag{4.14}$$

在这种情形下，条纹组成了一个长轴和短轴之比为$\sqrt{3}$的椭圆曲线族。并且，长轴是平行于 x 轴的。离焦和倾斜的效果与之前讨论的类似。在剪切方向平行于 x 轴的横向剪切干涉仪中，彗差所特有的典型条纹图样分别如图4.9a、b所示。



a)　　b)

图4.9　带有初级彗差且当剪切方向在弧矢方向（水平方向或者 x 方向）时的横向剪切干涉图

a）不存在离焦时出现中心位于干涉场中心的椭圆条纹　b）有离焦时条纹中心沿着剪切方向（水平方向或者 x 轴方向）发生偏移

3. 初级像散

初级像散的波前误差可以表示为

$$W(x,y)=C(x^2+y^2) \tag{4.15}$$

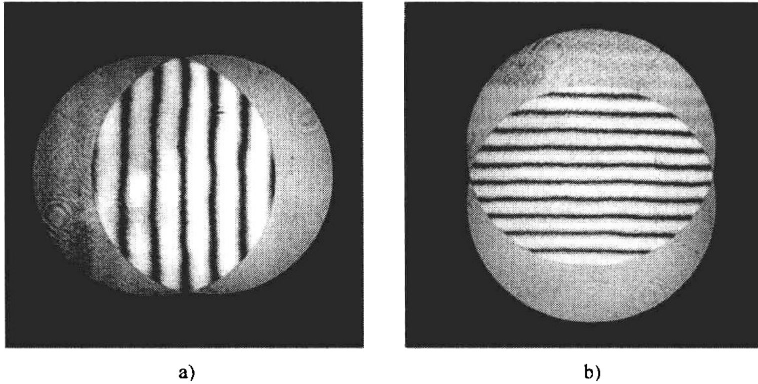
在对像散波前的分析中，横向剪切干涉图样几乎提供不了什么有用的信息。无论剪切方向是 x 方向还是 y 方向，直条纹均垂直于剪切方向。这样，可能很容易将像散波前误认为球差波前。幸运的是，离焦的引入显示了像散的存在。这时，x 方向横向剪切所产生的条纹图样由式（4.16）给出

$$\Delta W(x,y)=2(D+C)xS=n\lambda \tag{4.16}$$

类似地，y 方向的横向剪切产生的波前误差变为

$$\Delta W(x,y)=2(D-C)yT=n\lambda \tag{4.17}$$

如果弧矢方向的剪切量 S 和子午方向的剪切量 T 的值相等，则名义上存在两个 D 值，即 $D=\pm C$。这样，横向剪切干涉是无法显示条纹的。这两个离焦条件分别对应于像散波前的子午焦点和弧矢焦点。另一个检验像散的方法是计算相互垂直的两个剪切方向上的条纹数目，如图 4.10 所示，两者条纹数目的差异显示存在像散。在图 4.10a 中，沿水平剪切方向，共有 7 条暗的竖条纹。在图 4.10b 中，当在竖直方向施加相同的剪切量时，得到 10 条暗的水平条纹，这表明存在像散波前。



a) b)

图 4.10 有初级像散的横向剪切干涉图（在某个调焦位置处，分别在弧矢方向和子午方向上发生剪切，如果出现不等的直条纹数，即表明存在像散。）

a）弧矢方向 b）子午方向

另一个检验像散的方法需要进行综合方向上的横向剪切。在这种情形下，条纹系可以由式（4.18）得到

$$\Delta W(x,y)=2(D+C)xS+2(D-C)yT=n\lambda \tag{4.18}$$

式（4.18）给出了一个等间距的直条纹组。它们的斜率可以由将 n 置为零和求解 y/x 来得到。

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{(C+D)S}{(C-D)T}$$

在没有像散即 $C=0$ 的情况下，根据式（4.19），$\delta y/\delta x=-(S/T)$，等间距的直条纹是垂直于剪切方向的。通过改变剪切方向（T/S），发现当不存在像散时，条纹的斜率 $\delta y/\delta x$ 始终垂直于剪切方向。

当波前中存在像散时，等间距直条纹的斜率不再垂直于剪切方向。图 4.11 说明了横向

剪切干涉中像散的这一特性。

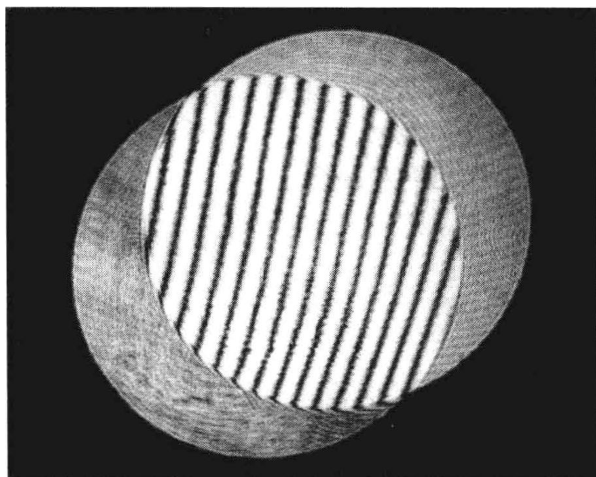


图4.11 有初级像散和离焦，并且剪切方向为$y=x$线（主对角线）或者为弧矢和子午方向的等分线时的典型横向剪切干涉图（直条纹相对剪切方向法线（另外一条对角线，$y=-x$）有倾斜，即表明存在像散。）

4. 场曲和畸变

场曲是焦点的一种轴向移动，因此可以当做离焦情形来对待。畸变是光瞳高度的线性函数。通常来讲，畸变在横向剪切干涉仪中是无法探测到的。

5. 色差

轴向色差是指不同波长形成的焦点不同。通过改变光源或使用同一光源中的不同波段，可以计算光谱离焦所引入的条纹数目。这样可以得到轴向色差的量值。与畸变类似，横向色差是光瞳的线性函数，因而也无法在横向剪切干涉仪中探测到。

以上的这些简要说明，将有助于利用横向剪切干涉技术简便、快速地评价光学系统的性能。我们介绍了存在离焦和倾斜时单项像差的情形，从而了解了它们的条纹图样。通常一个波前会是多个单项像差的混合，可以通过正式的数学重构技术来确定这些单项像差的大小。

4.4 未知波前的估计

现在我们来看看，通过一个波前的横向剪切干涉图样如何来确定该波前的形状。其中一种方法，由桑德斯（Saunders，1961、1970）提出，如图4.12所示，对沿着直径方向上各等间距点的干涉级次进行判断。通过设$W_1=0$，$W_2=\Delta W_1$，$W_3=\Delta W_1+\Delta W_2$等，对横向剪切测量量$\Delta W_i$求和得到波前。这一方法由桑德斯和布鲁宁（Saunders and Bruning，1968），以后又由里默（Rimmer，1972）、莱瑟能和杰克（Nyssonen and Jerke，1973）扩展到了二维方向上。

更正式的方法是如在之前章节中所作的假定那样，将未知波前$W(x, y)$当做一个可以由所谓的像差多项式表示的平滑函数。则波前误差函数$\Delta W(x, y)$可以由多项式的系数来衡量。$\Delta W_i(x_i, y_i)$的值由对条纹位置的测量得出。由此，通过拟和计算得到波前（像差多项式）的系数。马拉卡拉（Malacara，1965a）、默迪和马拉卡拉（Murty and Malacara，

1965）及多特等人（Dutton et al.，1968）发展了这种沿着与剪切方向平行的直径方向求解波前形状的一维方法。马拉卡拉和蒙德（Malacara and Mende，1968）将这种方法应用到了旋转对称表面的像差检验中。总之，多项式这种方法非常好，尤其是在里默和怀扬特（Rimmer and Wyant，1975）将之以下面的方式扩展到二维方向上之后。

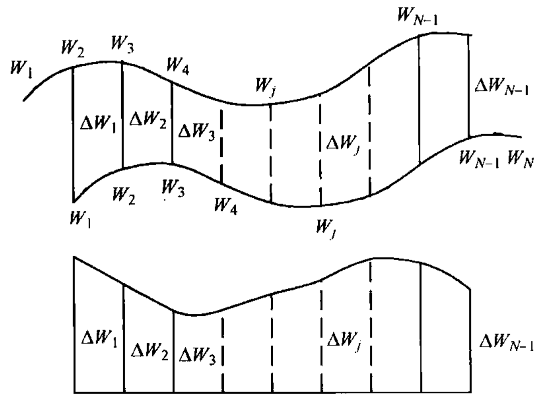


图 4.12 原始波前、剪切波前及它们的差异-桑德斯的由横向剪切干涉图确定波前方法的示意图

W（x，y）所代表的波前可以由一个二维 k 次多项式来表示

$$W(x,y) = \sum_{n=0}^{k}\sum_{m=0}^{n} B_{nm}x^m y^{n-m} \tag{4.19}$$

它包含 $N=(k+1)(k+2)/2$ 项。如果希望重构整个波前，则需要沿着互相垂直的方向分别进行以 S 和 T 表示的两次剪切，生成两个剪切干涉图样。对沿着 x 方向的剪切，可以得到

$$W(x+S,y) = \sum_{n=0}^{k}\sum_{m=0}^{n} B_{nm}(x+S)^m y^{n-m} \tag{4.20}$$

类似地，对 y 方向的剪切，给出

$$W(x,y+T) = \sum_{n=0}^{k}\sum_{m=0}^{n} B_{nm}x^m (y+T)^{n-m} \tag{4.21}$$

可以运用二项式定理，

$$(x+S)^m = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^{m-j}S^j \tag{4.22}$$ ⊖

二项式系数代表一个阶乘（这里以感叹号！表示）的商。

$$\binom{m}{j} = \frac{m!}{(m-j)!\,j!} \tag{4.23}$$

利用式（4.22），式（4.20）可以展开成一个多项式

$$W(x+S,y) = \sum_{n=0}^{k}\sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_{nm}\binom{m}{j}x^{m-j}y^{n-m}S^j \tag{4.24}$$

利用式（4.22），式（4.23）可以扩展为一个多项式

$$W(x,y+T) = \sum_{n=0}^{k}\sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-m} B_{nm}\binom{n-m}{j}x^m y^{n-m-j}T^j \tag{4.25}$$

当 $j=0$ 时，这些函数与 W（x，y）相等。重新整理一下这些和式，得到以下两个剪切干涉图样公式

$$\Delta W_S = W(x+S,y) - W(x,y) = \sum_{n=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{n} C_{nm}x^m y^{n-m} \tag{4.26}$$

⊖ 原文式（4.22）$(x+S) = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^{m-j}S^j$ 应该为 $(x+S)^m = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^{m-j}S^j$。——译者注

同样地可以得到

$$\Delta W_T = W(x,y+T) - W(x,y) = \sum_{n=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{n} D_{nm}x^m y^{n-m} \tag{4.27}$$

这样得到

$$C_{nm} = \sum_{j=1}^{k-n} \binom{j+m}{j} S^j B_{j+n,j+m} \tag{4.28}$$

同样地可以得到

$$D_{nm} = \sum_{j=1}^{k-n} \binom{j+n-m}{j} T^j B_{j+n,m} \tag{4.29}$$

里默和怀思特于 1975 年发展了这一结果。把 ΔW_S 和 ΔW_T 的测量值分别对式（4.26）和式（4.27）中的函数进行最小二乘拟和，就可以从干涉图中得到 C_{nm} 和 D_{nm} 的值。系数 C_{nm} 和 D_{nm} 共有 $M=k(k+1)/2$ 个值。由这些值需要确定 N 个波前系数 B_{nm}。式（4.28）给出了一个包含 M 个方程、M 个未知数的方程组，其中除了 B_{n0} 外，所有 B_{nm} 系数均为未知数。同样的，式（4.29）也给出了一个 M 个方程、M 个未知数的方程组，其中除了 B_{nn} 外，所有 B_{nm} 系数均为未知数。如果波前具有旋转对称性，对所有 n 值均有 $B_{n0}=B_{nm}=0$，则使用式（4.28）或者式（4.29）中的一个即已足够，因此，只需要一个干涉图样。如果 m 不等于 n，也不等于零，则 B_{nm} 的值需要在每一个表达式中逐一确定。对这些值要以合适的方式取平均值，因为它们的差异可能是由计算中的舍入误差所造成。

有许多可供选择的、由剪切干涉图样获得波前的方法已经被设计出来。包括如高斯科夫和李申科（Gorshkov and Lysenko，1980）及其他方法。其中最引人关注的一个是基于以泽尼克（Zernike）多项式表达的波前展开式，最初由里默和怀扬特（Rimmer and Wyant，1975）描述过，后来由科曼（Korwan，1983）作了修正。波前 $\Delta W(x, y)$ 及波前误差函数 $W(x, y)$ 以泽尼克多项式的线性组合来表示。沈等（Shen et al.，1997）几位研究人员系统地更新了这一工作。待测波前的泽尼克多项式系数以剪切干涉图样的泽尼克多项式系数来表示。

雷布莱特等（Leibbrandt et al.，1996）研究人员曾设计过一个基于迈克耳逊型结构的双光栅横向剪切干涉仪，其中，泽尼克多项式用来进行高精度的波前重构。

在 20 世纪 80 年代早期，当傅里叶技术被证明是一个可行的相位重建工具后，有一些研究组织曾使用过该技术。马拉卡拉和瑟文（Malacara and Servin，1995）及马拉卡拉等（Malacara et al.，1999）研究人员概括描述了进行波前重构的步骤。梁等（Liang et al.，2006a、2006b）研究人员进行了详述并举出了一些特殊的例子，证明在剪切量很大时也可以进行波前重构。小波变化也被证明对横向剪切干涉中的波前重构是有效的（Xu et al.，2002）。

4.5　平行光横向剪切干涉仪（白光补偿）

首先考虑使用非相干点光源、需要白光补偿的干涉装置。这里，名义上又有了两种干涉形式，即平行光横向剪切和会聚光横向剪切。然而，我们注意到，使用校正很好的透镜总能将一种形式转化为另外一种形式。

4.5.1　基于雅明（Jamin）干涉仪的横向剪切干涉装置

图 4.13 ~ 图 4.15 所示为三种由雅明干涉仪改装而成的横向剪切干涉仪（Murty，

1964b)。扩展点光源被一个小孔代替，被测透镜起准直透镜的作用，其像差被施加于近似平行光路中并进入干涉仪。每块平板玻璃的任意一个面均有分光和反光两重功能。它们必须是高质量且可互换的。如果它们互相平行，相互重合的光束将形成传统的雅明干涉仪。在雅明干涉仪中，两个玻璃平板是相互平行放置的。可以通过用一个扩展光源观察零级条纹的方法来对它们进行调整。雅明平板应足够大，以容纳因横向剪切而造成的光束平移。

有两种可行的方法将横向剪切引入雅明干涉仪。第一种方法如图 4.13 所示，右边的玻璃平行平板绕入射光束的光轴旋转。在这个装置中，是沿着垂直于纸面的方向产生剪切。

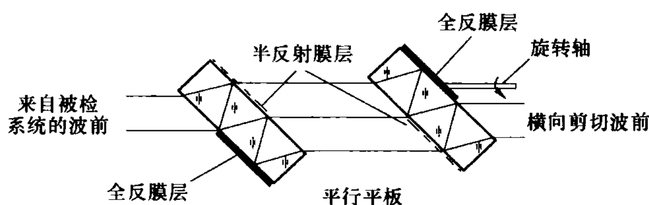


图 4.13 将雅明干涉仪改造成横向剪切干涉仪（可以绕入射光轴旋转右边的玻璃板来引入横向剪切，平板不旋转时即为传统的雅明干涉仪。）

在雅明干涉仪中产生剪切的第二种方法如图 4.14 所示。两个相同的玻璃平行平板分别放置于一个干涉臂中，这样，可以沿垂直于光束的同一轴向相反方向旋转同一角度。这可以通过使用一个简单的齿轮装置来实现。在另一方案中，将两端的雅明平板做成稍带楔形（几个角秒[⊖]），就可以在垂直方向上引入一个固定的倾斜量。

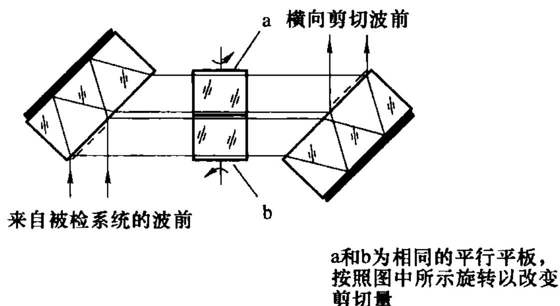


图 4.14 另一种由雅明干涉仪改造成的横向剪切干涉仪（两块相同的玻璃板分别放置在两支光路中，绕穿过两块玻璃板的轴线以相同角度向相反方向，分别旋转两块玻璃板来产生横向剪切。）

一种由循环式雅明干涉仪改装成的横向剪切干涉仪如图 4.15 所示。在该布局中，只需要使用一块平行平板。用直角棱镜或一对互成 90°的镜面来将光路折转。在一个干涉臂中置入一块透射平板。为了引入横向剪切，这块透射平板沿着穿过并同时垂直于两个光束的轴旋转。两束光从两面同时穿过透射平板。在纸平面内，一束光被抬高，另一束被下移，这样，两束光之间的位移即形成了横向剪切。该横向剪切干涉仪在检验小口径透镜时是很方便的。也可以引入倾斜；通过将直角棱镜或反射镜组的直角稍加改变，可以在垂直方向上引入倾斜。在两种情形下，倾斜均取决于偏离 90°角的误差大小。该装置可以用来检验直角棱镜的顶角精度，进行 90°镜面装配中的校准，更重要的是，还可以探测角锥棱镜的直角误差（Scholl，1995）。

4.5.2 基于迈克耳逊干涉仪的横向剪切干涉装置

迈克耳逊干涉仪是进行了白光补偿的，尤其是当调整零级干涉条纹的位置时。如果置入

⊖ 原文是弧秒（second of arc），应改为角秒。——编辑注

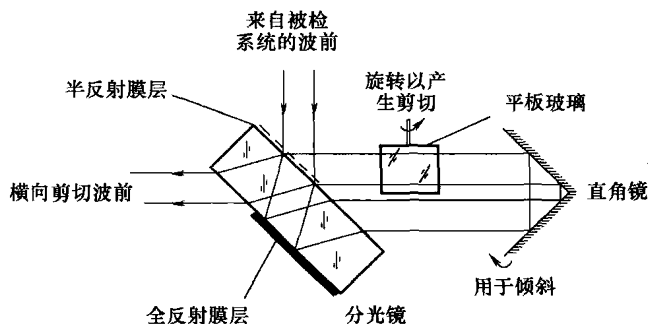


图4.15 一种由循环式雅明干涉仪改装成的横向剪切干涉仪（一块透射平板沿着穿过并同时垂直于两个光束的轴旋转来引入横向剪切。两束光从两面同时穿过透射平板。在纸平面内，一束光被抬高，另一束被下移，这样，两束光移动量的总和形成了横向剪切。）

直角棱镜或角锥棱镜，就可能实现横向剪切（Kelsall，1959）。在每个测量臂中均有直角镜面组（或棱镜）的迈克耳逊干涉仪如图4.16所示。为简便起见，假定所有直角棱镜尺寸和材料完全相同。当分光镜中看到的棱镜虚像互相重合时，光束之间不产生剪切。当其中一个棱镜横向平移一定量时，波前将产生两倍的剪切量。

分光镜必须足够大以适应光束的平移。同样的，至少一块直角棱镜必须是足够大的。可以通过使直角棱镜（或镜面组）在垂直于剪切方向上倾斜来产生倾斜量。如果使用一个角锥棱镜，则仅能产生单纯的横向剪切，因为以它们的状态无法实施倾斜。倾斜量只能在传统的迈克耳逊干涉仪中通过使其中一个平面镜倾斜来产生。

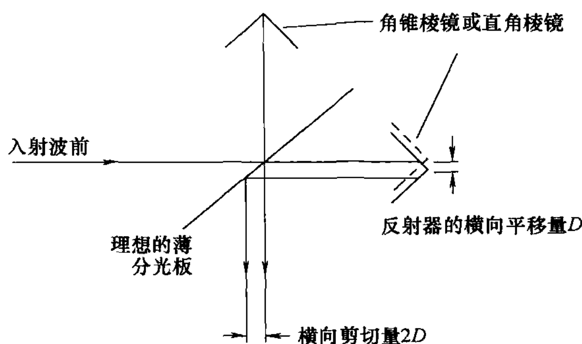


图4.16 由等光程迈克耳逊干涉仪改装而成的横向剪切干涉仪（末端的反射器或者是直角棱镜（反射镜组）或者是角锥棱镜，其中一个沿横穿光束的方向产生位移。）

李等（Lee et al.，1997）研究人员曾在一个二维横向剪切干涉仪中使用迈克耳逊结构来检验一个大半径曲面。皮菲尔（Pfeil，1998）曾使用一个带有倾斜端面镜的立方分光镜来检验高陡度圆柱形梯度分布折射率的透镜。阿尔贝塔兹和凡提（Albertazzi and Fantin，2002）使用像素级处理能力的迈克耳逊装置，来评价电荷耦合器件（CCD）上的微小入射差异。相机向一边移动一个或多个像素，而不是向一边移动或倾斜一个反射元件。这可以以物理方式或电子方式实现。斯克雷布（Schreiber，2005）发明了迈克耳逊剪切干涉仪的一种变形形式，利用一个返回式球面替代回转反射器来测量倾斜。

4.5.3 基于循环式干涉仪的横向剪切装置

循环干涉仪是指这样一种设计，其中两束光沿相反方向传播，正好在同一个元件相遇并形成干涉图样。图4.15所示的雅明干涉仪就是一个常见的循环干涉仪的例子。注意到光束是经过了相同光程，只是沿不同方向传播。

一种典型的循环干涉仪是三角形光路干涉仪（Hariharan and Sen，1960）。图4.17给出

的是在这种紧凑仪器中以最小的系统误差获得平行光束横向剪切的典型布局。同样，有两种方法来产生横向剪切。采用第一种方法，在光路中引入一个透射板并旋转，像在折叠式雅明干涉仪中那样（参见图 4. 15）。第二种方法，如图 4. 18 所示，当其中一块平面镜在纸平面内沿着光束方向移动时，光束之间将产生横向剪切。

在循环式干涉仪的一种对称形式中，如图 4. 15 和图 4. 17 所示，可以引入一块平板玻璃。在两种情形下，均由玻璃块或平板的旋转产生横向剪切。这也是一个相对容易实现的仪器。这种仪器对振动和环境，包括那些在受控实验室条件下可能产生的影响因素不敏感。通过评估一块表面为可伸展的塑料薄膜凹面镜的对称性，维德尔等（Waddel et al. , 1994）展示了这种平行平板方法的简易性。

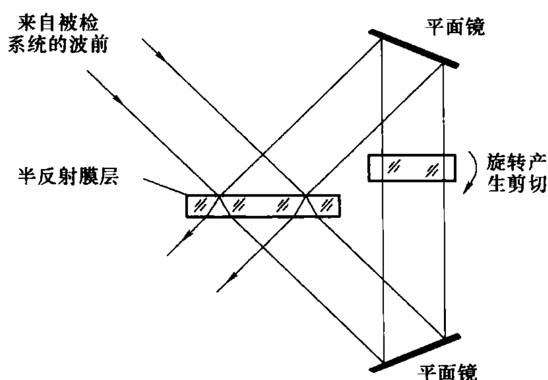


图 4. 17　循环式三角形光路干涉仪以最小的误差获得平行光束横向剪切的典型布局（在光路中引入一块厚透射板，绕垂直于纸面和光束的轴以一定角度旋转这块透射板，两光束将产生背向的横向位移。）

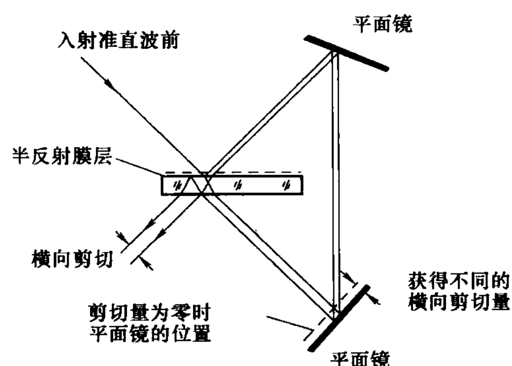


图 4. 18　对典型的循环式三角形光路干涉仪改造获得平行光横向剪切的改造示例（当其中一块平面反射镜沿着光束方向在纸平面内移动时，光束产生横向平移。）

图 4. 19 所示为另外一个在循环式干涉仪中产生剪切的紧凑装置。通过在主要光学面上镀制适宜膜层，一块 112. 5°、90°、112. 5°的五棱镜可以用作分光镜组。将一块 90°的五棱镜沿其对称轴剖开。其中一个切面上镀半反射膜来作为分光镜。使用折射率匹配液或油，使两个切面保持光学接触。一块半五棱镜沿着分光表面移动，使输出波前产生不同剪切。这种装置的成功实现，使得干涉仪中心部分具有抗振性。由于质量和尺寸限制，它最适宜于小口径光学系统的检验。

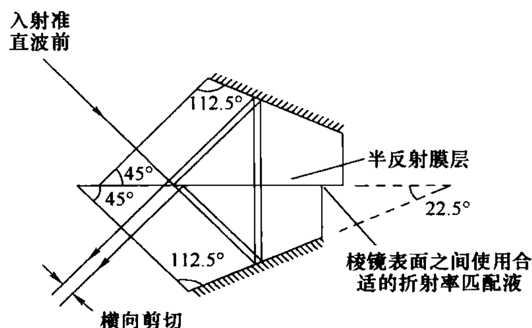


图 4. 19　另外一个在循环式干涉仪中产生剪切的紧凑装置（其中一个半五棱镜沿着分光表面移动产生横向剪切。）

康吉莱尔等（Kanjilal et al. , 1984）及康吉莱尔和庞特姆贝克（Kanjilal and Puntambekar, 1984）描述了另外一种可使用会聚光束的循环剪切干涉仪。

4.5.4　基于马赫-泽德干涉仪的横向剪切装置

作为参照，马赫-泽德干涉仪中的主要光学元件如图4.20所示。其中包括两个分光镜和两个反射器（镜面）。如图4.21所示，在每个干涉臂中各插一块厚度和材料均相同的玻璃平行平板，在平行光中产生横向剪切。

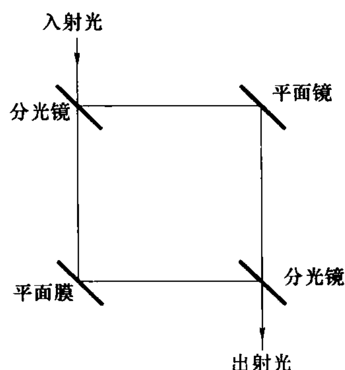


图4.20　使用薄分光板的马赫-泽德干涉仪中的主要光学元件

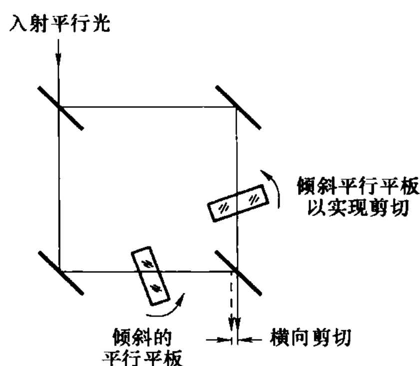


图4.21　可以对一个基本的马赫-泽德干涉仪进行改造以获得平行光横向剪切（两块相同的玻璃平行平板以一个倾斜角度分别插入两个干涉臂中，在平行光中产生横向剪切。可以改变平板相对入射光束的角度来控制剪切量的大小。）

每块平板使波前以相同量向相反方向移动。马赫-泽德干涉仪可以很容易地改造成平行光横向剪切干涉仪来使用（Paez et al.，2000）。一些研究者发现它调节起来相当困难，尤其是当所有光学元件都是单独固定且有各自的倾斜调节螺钉时更为麻烦。通常认为，会聚光路中产生横向剪切的马赫-泽德干涉仪会更有用。

4.6　会聚光横向剪切干涉仪（白光补偿）

4.6.1　基于迈克耳逊干涉仪的横向剪切装置

图4.22为会聚光横向剪切干涉仪中输入-输出关系的基本框图。近似球面波前会聚到其曲率中心，该曲率中心正是横向剪切干涉仪所在的位置。由于空间限制，用在会聚光路中的横向剪切干涉仪一般是尺寸很小的。

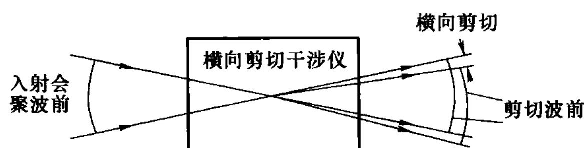


图4.22　会聚光横向剪切干涉仪中输入-输出关系的基本框图（近似球面波前会聚到其曲率中心，该曲率中心正是横向剪切干涉仪所在的位置。）

横向剪切干涉仪输出的包括两个幅值降低（至少降低 4 倍）但曲率半径与输入光束相同（符号相反）的光束。会聚光束相互之间存在倾斜。曲率半径到波前中心和“易位”的波前曲率半径到其中心之间存在一个夹角。如果将波前想象成一个球面的一部分，则剪切波前是沿着该球面滑动的。需要测量的数值正是该球面和实际波前的差异，该差异通常称为波前误差函数 $W(x, y)$。

如图 4.23 所示，由被测光学系统出来的一束会聚光进入一个带有薄分光镜的简易迈克耳逊干涉仪。当两个平面镜相对分光镜对称放置（等光程条件），并且使用理想的光学元件时，在干涉定域面上将产生一个宽的零级条纹。当使用平面镜时，分开的入射光束会聚于平面镜上一点。这是迈克耳逊干涉仪的基本布局：出射波前是相互重叠的，没有任何横向剪切量。

将其中一块平面镜绕着一个通过波前曲率中心的轴旋转一个小角度，则可以获得横向剪切，如图 4.24 所示。波前误差将在干涉图样中显现出来，没有误差的情况下是不会出现条纹的。曲率中心如果落在平面反射镜外，即使极小的距离，也会引入离焦。即使没有误差，也会有显示离焦存在的直条纹出现。在垂直方向上是不可能产生倾斜的。

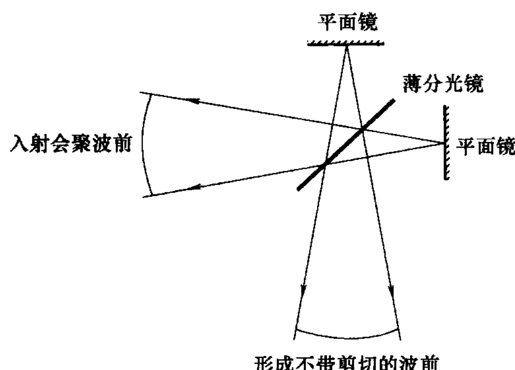


图 4.23　由被测光学系统出来的会聚光束进入一个带有薄分光镜的简易迈克耳逊干涉仪（当两个平面镜相对分光镜对称放置时，在干涉定域面上将产生一个宽的零级条纹。当使用平面镜时，分开的入射光束会聚于平面镜上一点。）

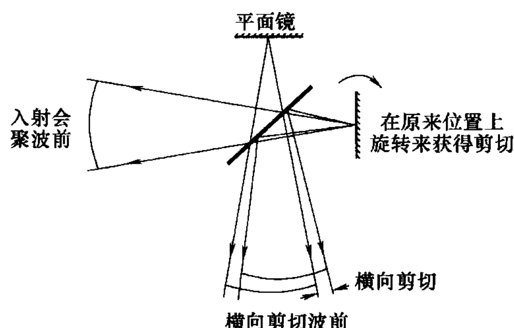


图 4.24　由迈克耳逊干涉仪改造而成的横向剪切干涉仪（将其中一块平面镜绕着一个通过镜面上波前曲率中心的轴旋转一个小角度，可以获得横向剪切。）

两块几乎完全相同的直角棱镜沿半透对角线胶合起来，可以组成一种稳固紧凑的干涉仪。如图 4.25 所示，一个微微倾斜的全反射表面将产生一个固定量的剪切。勒德维尔（Lenouvel，1938）可能是这种实用可靠的干涉仪的首创者。

后来，默迪（Murty，1969）、桑德尔（Saunders，1970）和其他一些研究者也发现这种干涉仪简单易行，在光学系统检测中很有用，可以在一个立方结构中使用相似的直角棱镜来改变剪切量（Murty，1970）。在两个斜面之间使用折射率匹配液或者合适的油，

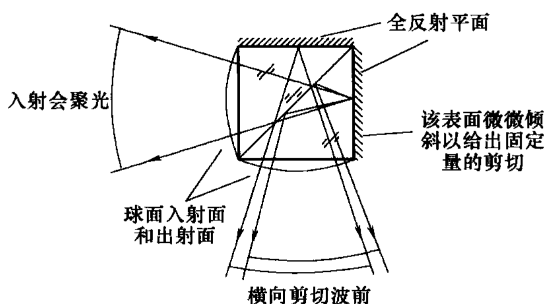


图 4.25　由迈克耳逊干涉仪改造而成的带有胶合立方棱镜的横向剪切干涉仪（两表面稍有错开，以产生一个固定的剪切量。入射面和出射面制成凸球面，以使光线垂直入射和出射。）

使得一个棱镜可以旋转，如图4.26所示，旋转轴同时穿过两个分束波前的曲率中心。入射面和出射面可以做成球面，这样光线进入或出射几乎不产生偏移。这种干涉仪曾用来进行低温激光会聚目标特性测量（Tarvin et al.，1979）。

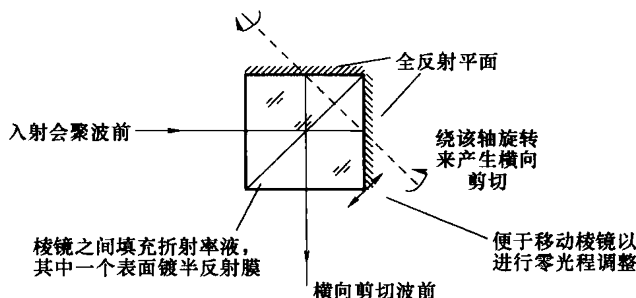


图4.26 基于迈克耳逊干涉仪的横向剪切干涉仪示意图（绕一个通过入射波前曲率中心的轴旋转一块棱镜，或两块同时旋转，可以改变横向剪切量。）

4.6.2 基于马赫-泽德干涉仪的横向剪切装置

图4.27所示为带有理想薄分光镜的简化型马赫-泽德干涉仪。一束会聚波前聚焦在两个平面镜上，两平面镜相对理想薄分光镜对称放置。如果其中一块平面镜绕一个穿过几何焦点、垂直于纸平面的轴旋转，则干涉仪的出射光束之间就可以产生横向剪切。在第二块分光镜绕垂直于纸面的轴旋转时，可以引入垂直于剪切方向的倾斜（参见图4.27）。这个倾斜量的引入是这种干涉仪的一个重要特征。将两束光都聚焦到第二块分光镜上，则更好一些。这时，平面镜和分光镜的作用发生了互换，平面镜的旋转引入倾斜，而第二块分光镜的旋转产生横向剪切。当使用有厚度的真实元件时，需要相应插入补偿板。

研究发现，基于马赫-泽德干涉仪的带有倾斜的横向剪切干涉仪是相当容易校准的（Paez and Strojnik，2000、2001）。但是有许多研究者认为，最少由两个分光镜和两个平面镜组成，且每个光学零件都各自独立固定在底座上并能进行各种调节，这样的一个等光程干涉仪是很难快速调整的。下面将给出一些基于马赫-泽德干涉仪结构的可预先调整、校准的横向剪切装置的例子。这些装置大多数采用实心玻璃棱镜来产生固定的横向剪切量。桑德尔（Saunders，1965）曾发明过一个几乎固化了的、如图4.27中所示的装置，如图4.28所示。分光镜和平面镜之间由玻璃填充，会聚波前聚焦到两个互相平行但并不平行于分光镜的表面上。制作这个紧靠在一起的部件，需要先将一个六边形棱镜切成90°角的两个棱镜，将两个切割面分别镀分光膜，然后胶合在一起。顶面和底面镀反射膜，并相对分光面有个微小倾斜，以产生固定的剪切量。胶合时稍带楔形，可以产生一个垂直于剪切方向的固定倾斜量。

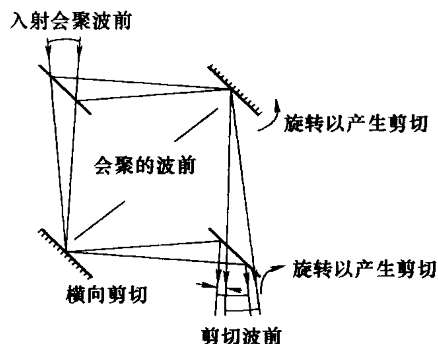


图4.27 由简易马赫-泽德干涉仪改造而成的会聚光横向剪切干涉仪（会聚波前聚焦到平面镜上，将任意一个平面镜旋转一个小角度来产生剪切。将第二个分光镜旋转一个小角度来引入倾斜。）

带镜面倾斜的马赫-泽德式横向剪切干涉仪可以

用来进行火焰可视化研究。菲利普等（Philipp et al.，1993）曾研究过利用立方分光镜和平行光束对火焰动态进行评价的技术。

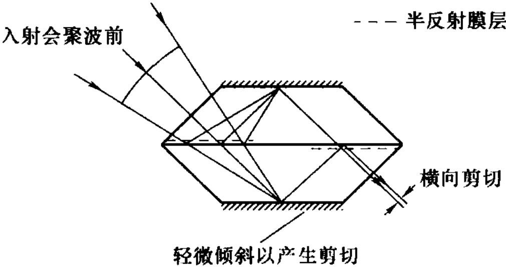


图 4.28 图 4.27 中横向剪切干涉仪的固化结构（分光镜和平面镜之间由玻璃填充，会聚波前聚焦到两个互相平行但并不平行于分光板的表面上。顶面和底面镀反射膜，并相对分光面有个微小倾斜，以产生固定的剪切量。胶合时稍带楔形，可以产生一个垂直于剪切方向的固定倾斜量。）

图 4.29 中对马赫-泽德结构的横向剪切干涉仪进行了改进，使之能够产生可变的剪切量。这里，两块菱形棱镜沿着半反射分光表面对称胶合在一起，顶面和底面各镀有反射膜。入射的会聚光束聚焦到第二个分光镜上，其作用如同立方分光镜一样。绕着穿过曲率中心的一个轴旋转第二个分光镜，可以引入一个有限的剪切量。入射角效应使得旋转量受到限制，旋转角度和立方棱镜的尺寸决定了剪切量的大小。适当倾斜两个反射面，可以在波前中引入一个固定的倾斜量。

这个结构也可以看做是图 4.28 中横向剪切干涉仪的另一个版本，其中立方分光镜是由六边形棱镜切割而来，并向右边稍作了平移。通过将光束会聚到第二块分光镜上，剪切功能和垂直方向上的倾斜功能相当于图 4.27 所介绍的第二种情形。

图 4.30 所示为对图 4.28 中八边棱镜的另一种改进形式，平面被部分球面代替。其中使用了两块完全相同的平-凸球面透镜，其中心厚度等于曲率半径的一半。每个透镜的一小块轴上部分被磨平、抛光并镀反射膜层。每个反射面相对半透射平面稍作倾斜，以引入一个固定的剪切量。两个半透射平面胶合在一起，起分光作用。入射面和出射面均为球面，因此可以在不引入自身误差的情况下进行大数值孔径光束检验。

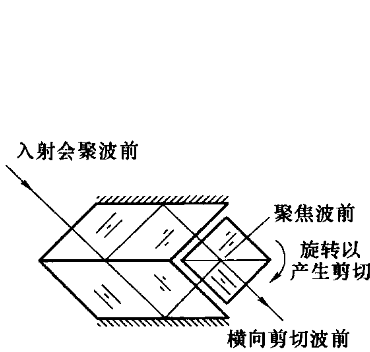


图 4.29 改进的马赫-泽德结构的横向剪切干涉仪（光束会聚到立方分光棱镜的半透射胶合对角面上。绕着穿过曲率中心的一个轴旋转立方分光棱镜，可以引入一个有限的剪切量。适当倾斜两个反射面，可以在波前中引入一个固定的倾斜量。）

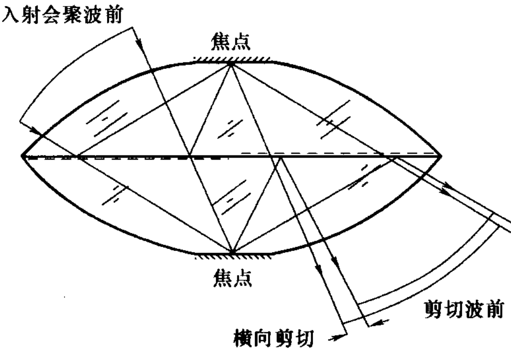


图 4.30 对图 4.28 中八边棱镜的另一种改进形式（平面被部分球面代替。两块完全相同的平-凸球面透镜，其中心厚度等于曲率半径的一半，每个透镜的一小块轴上部分被磨平、抛光并镀反射膜层。每个反射面相对半透射平面稍作倾斜，以引入一个固定的剪切量。）

桑德尔（Saunders，1964a）曾提出过另一个由马赫-泽德干涉仪改造而成的横向剪切干涉仪，如图 4.31 所示。主要元件包括两个相同的棱镜，两个棱镜由一个四边棱镜（风筝形状的）沿着主对角线以角度 $\alpha=120°$，$\beta=100°$，$\gamma=40°$切割而成。主对角线表面镀有膜层，

如分光镜一样将光分开成两束，波前聚焦到倾斜的反射镜面上。可以绕着两块棱镜上球面曲率中心的连线，向相反方向旋转两块（或一块）棱镜来产生横向剪切。产生固定剪切量时，可以将两块棱镜以适当角度胶合在一起，以简化结构。

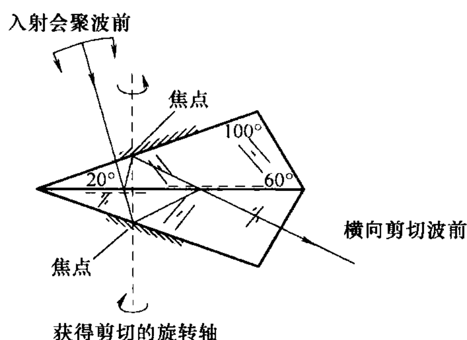


图4.31　另一个由马赫-泽德干涉仪改造而成的横向剪切干涉仪（用了两块钝角棱镜，主对角线表面镀有膜层，如分光镜一样将光分开成两束，波前聚焦到倾斜的反射镜面上。两块棱镜相对旋转来产生横向剪切。产生固定剪切量时，可以将两块棱镜以适当角度胶合在一起，以简化结构。）

将分别位于入射面上和出射面上、曲率半径合适的两块平凸透镜胶合在一起，这一装置固有的系统误差可以完全消除。（参见有关图4.30的内容。）可以适当控制胶合楔角，以及分光镜部分镀膜——每块棱镜主表面上仅一半面积镀膜，来产生倾斜量。

4.7　使用激光的横向剪切干涉仪

如前所述，任何一个白光补偿的横向剪切干涉仪都是可以使用激光光源的。不要求在白光下使用的话，是比较容易设计结构简单、使用方便的干涉仪的。最常用的（也是成本最低的）是波长为632.8nm、功率为几个毫瓦的He-Ne激光。

对实验室的大量工作而言，默迪（Murty，1964a）所设计的平行平板干涉仪，毫无疑问是最精巧和最简单的横向剪切干涉仪之一。图4.32为这种平行平板干涉仪的示意图。其中，相干激光由一个显微物镜聚焦到针孔上，针孔对光束进行滤波。与显微物镜具有相同f数的被检透镜（组）将发散光束准直为平行光。光束照射到一块倾斜的平行平板上，平行平板通常两面都没有镀膜。由菲涅耳反射定律，平板的前、后表面分别反射出一束光。平板的厚度使两束光之间发生位移，即产生了横向剪切。马拉卡拉（Malacara，1965a）给出了当平板厚度为t、折射率为N、入射角为i时的横向平移量S

$$\frac{S}{t}=\sin 2i(N^2-\sin^2 i)^{\frac{1}{2}} \tag{4.30}$$

图4.33所示为632.8nm波长下，玻璃折射率N为1.515时，横向平移量与平板厚度之比S/t相对入射角i的曲线图。入射角按照斯涅尔定律（Snell）在玻璃表面的法线方向上测量得到。最大S/t值接近0.8，出现在入射角为50°时。因此，在实际系统中，45°的入射角是很合适的。平板经常制作成带有一个小楔角，可以将不需要的反射光引出到主光束之外。

对平板前、后表面镀膜可以增加干涉图样的峰值强度，但不影响条纹的可见度。这样，

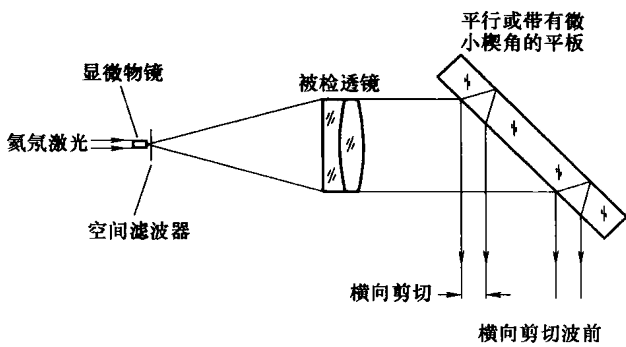


图 4. 32 使用激光光源和平行平板玻璃的横向剪切干涉仪示意图

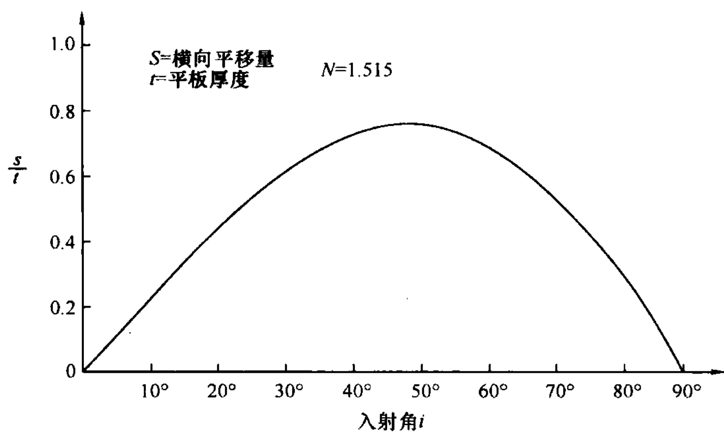


图 4. 33 横向平移量与平板厚度之比（S/t）相对入射角 i 的曲线图

内表面反射光束有了足够强度，会有微弱的二次剪切光束并产生模糊的干涉图样。因此，许多操作人员发现用不镀膜的平板会更好一些。

图 4. 34 所示为用平行平板对大口径凹面镜进行检验的方案示意图。当被检面不是球面时，可以插入一个合适的零补偿器。在剪切板上制作一个小楔角可以引入一个垂直于剪切方向的固定倾斜量，楔板两个面的交线平行于纸面。

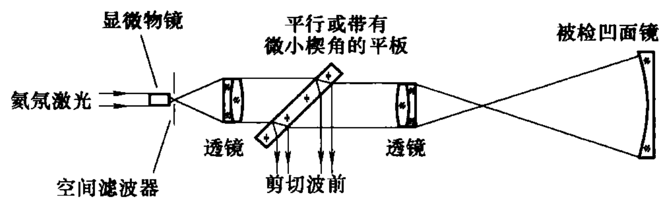


图 4. 34 用平行平板（干涉仪）对大口径凹面镜进行检验的方案示意图
（除相干光源之外，还需要两个优质透镜和一块好的平行平板。）

对基本的平行平板干涉仪的另外一种改型装置，使用了两块可以调整间隔的平板，以扩大剪切量（Hariharan，1975）。在图 4. 35 中，其中一块平板安装在可活动的平台上，这样，两块平板之间的空气隙是可变的，不用旋转平板就可以获得可变的剪切量。两块平板的内表面不镀膜，因此只有约 4% 的反射率。两块板的外表面镀有优质的增透膜，将反射降到最

低。平台的固定装置必须有足够的自由度，这样可以沿垂直方向旋转以引入倾斜量。由于两块平板是分开的，因此系统对扰动比较敏感，在操作过程中易受到损坏。干涉条纹的稳定性取决于机械固定装置设计、结构和环境条件等因素。

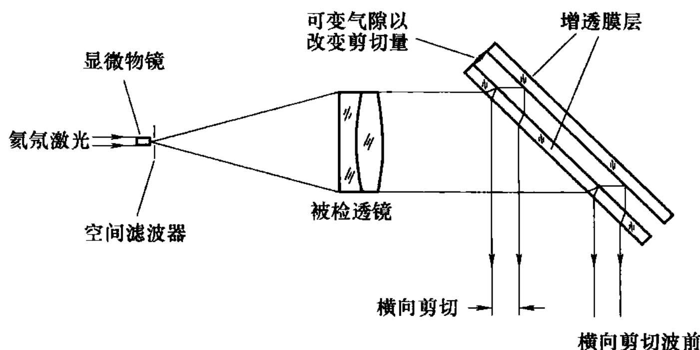


图4.35　用两块相隔开的玻璃平板改造的平行平板干涉仪（内表面的反射用来产生更大的剪切量。移动后面的平板使空气隙宽度发生改变，可以调节剪切量的大小。）

图4.4～图4.11中的各种横向剪切干涉图样都可以用图4.32所示的激光剪切干涉仪获得。在照明较暗的房间里，使用不镀膜的平板和激光光源，即可观察到投影在毛玻璃上的足够强度的干涉条纹。只需几分之一秒的曝光时间就可以拍摄这些条纹的照片。现在可以使用CCD探测器阵列，实验工作变得更加简单了。

平行平板干涉仪最常见的用途之一是检验光束的准直性。在图4.32中，我们注意到：如果针孔没有位于透镜的焦点处，出射波前将稍稍发散或会聚。这样，一块高质量的准直透镜将形成如图4.4a和图4.4c所给出的直条纹干涉图样，而不是像图4.4b中那样没有条纹。

如图4.4b中给出的，当针孔落在准直透镜的焦点上时，两个剪切波前的重叠区域是没有条纹的。透镜沿着光轴微微移动，当干涉图样由图4.4a变成图4.4b，最后变成图4.4c时，即可以得到最好的准直结果。

用一块楔形平板来进行准直调整，可以更精确地获得准直光束。楔形平板先垂直于准直透镜出射的光束，反射图样显示的是指示楔角方向的菲佐条纹。在这个位置，剪切量为零，所以光束稍不准直也没有关系。然后，将平行平板在其自身平面内转动。菲佐条纹也会转动，始终指示着楔板的方向。最后一个步骤是使平行平板相对入射光束倾斜一个角度，使入射角约为45°。如果针孔稍微离开焦点位置，将会出现倾斜条纹。使高质量的透镜沿着光轴方向水平移动，当出现水平条纹时，针孔将恰好位于透镜焦点上。图4.5a～c分别显示了针孔穿过焦点时的一系列图样。由楔板引入的额外倾斜使实验人员可以追踪条纹的旋转，而不用去识别很难精确判读的无条纹域。

平行平板或楔板干涉仪的另一个用途是测定固体透射材料的不均匀性。试样做成平行板块，使用光学接触方法夹在两块高质量的平板之间。这一组合在图4.36中以一个固体模块代表，将其置于准直透镜和剪切板之间。这一设计让人想起由雅明干涉仪改造的剪切干涉装置（参见图4.14和图4.15）。一个高质量的平面波前穿过不均匀的试样时，波前中即引入了畸变。横向剪切波前产生出与折射率变化相关的干涉图样。整个光束内（沿着剪切方向）试样块的折射率变化可通过积分获得，沿光轴方向的折射率变化被作了平均。需要对试样块进行重复定位，以确定三个方向上的变化。

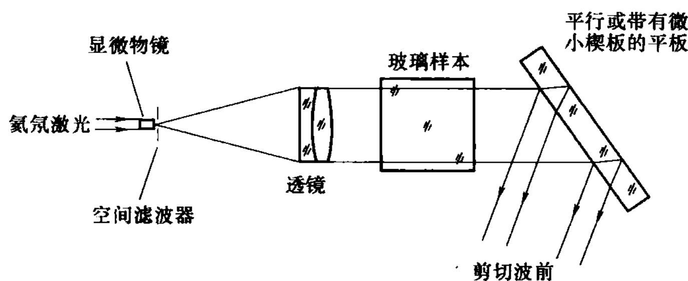


图 4.36 检验透射（玻璃）试样不均匀性的平行平板干涉仪示意图

同样，高质量准直透镜和剪切板之间的这一区域还可以用到流体研究、传输研究及其他涉及位置和时间变化现象的研究当中。

自迪克和哈德（Dickey and Harder，1978）、格林德尔（Grindel，1986）及瑟荣和科斯亚尔（Sirohi and Kothiyal，1987a、1987b）开始，有许多研究人员曾就如何应用平行平板进行调校和准直进行了研究。焦距和折射率等透镜参数，也可以在这个装置中测量得到（Kasana and Rosenbruch，1983a、1983b；Murty and Shukla，1983）。

用这种干涉仪还进行过红外材料的检验。万科塔和朱亚尔（Venkata and Juyal，1987）将平板干涉仪用到了红外波段检验中，在检验中使用了 CO_2 激光光源和一块硫化锌（ZnS）材料的平行平板，并用一块荧光板来观察条纹。其中，制作高平面度要求的硫化锌平板本身就是一个巨大的成就。

大口径凹面镜的表面缺陷也可以用图 4.37 所示的平行平板来检验，可以用也可以不用楔板（Malacara 1965a）。两块校正良好的透镜中的第一块对激光束进行准直。在平行光束中剪切板大约倾斜 45°。

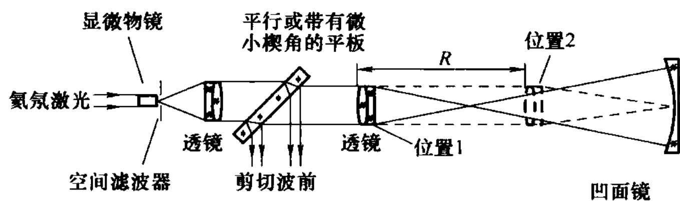


图 4.37 测量凹球面曲率半径的平行（楔形）平板干涉仪示意图

这一设计还可以用来测量球面的曲率半径。在位置 2 上，校正良好的透镜将光束会聚到凹球面的顶点上。然后，透镜沿着光轴向左移动到位置 1 上，此时透镜的焦点与凹面镜的曲率中心重合。在这两个位置上，入射到平板（楔板）上的波前均为平面。看到的干涉场是暗场或是有水平条纹，取决于剪切装置中是否存在倾斜（如用的是平板还是楔板）。透镜沿光轴方向在两个位置（位置 1 和位置 2）之间产生的位移量，即等于凹面镜的曲率半径 R。必须使用其他方法对该位移进行测量，避免不在焦点时所产生的条纹。

图 4.38 给出了测量凸球面曲率半径的平行（楔形）平板干涉仪。在这种情形下，能够测量的最大曲率半径稍小于第二块透镜的焦距。干涉装置中的所有元件必须是高质量的，以免将自身误差引入到测量结果中。同样，用到的两块准直透镜也必须是非常好的。计算机在光学检测系统中的使用，使得能够对干涉仪的设计方案进行分析和优化。马拉卡拉（Maracala，1965b）及其他一些研究人员，曾提出过几个早期设计方案。

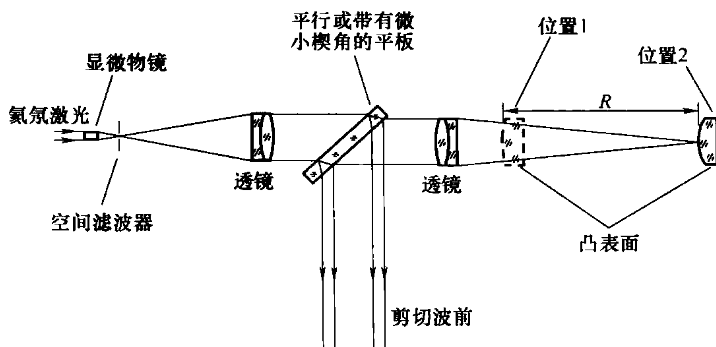


图4.38　测量凸球面曲率半径的平行（楔形）平板干涉仪

这种干涉仪的另一个用途是测量近似平板的玻璃或者包在两边互相平行的腔体中的液体折射率。基本装置与图4.34中类似，其中使用了两块校正良好的透镜来得到质量很好的焦点。调整第二块透镜使其焦点先后位于平板的前后两个面上令光线原路返回，如图4.39所示。两个位置之间的差值为 t/N，其中 t 是平板厚度，N 是其折射率。单独测量出平板厚度，则很容易确定折射率。折射率测量可以精确到5位有效数字。但平板像差或者折射率受温度的影响可能会导致测量误差增加。

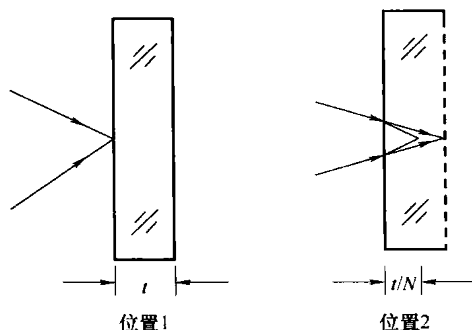


图4.39　平行平板折射率测量原理示意图

如图4.40所示，可以在系统焦点上使用一个非常小的薄平行平板（Tanner，1965）。激光由第一个透镜进行准直，通过足够长的准直区后又被第二个透镜聚焦。在非常接近焦点的位置上，以45°入射角插入一个薄的平板。从图4.41中可以很容易地看出，由于光束从薄板的两个面反射，两个反射像之间产生纵向分离，因此不能获得单纯的横向剪切。即使对校正良好的光学系统，其横向剪切条纹也稍有弯曲，如图4.42所示。理论上，系统需要一个极薄的、两个面之间带有楔角的平板。另一种选择是利用空气隙作为平板。即便这样，也仅能产生非常有限的剪切量。该系统在大口径风洞研究、均匀性测试及诸如此类研究中常被选用，如图4.43所示。

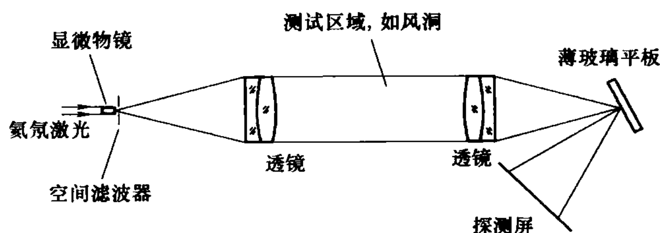


图4.40　在光束会聚点使用薄平行平板的横向剪切干涉仪

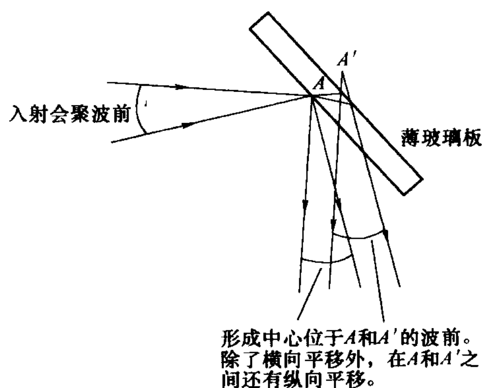


图4.41　薄玻璃板位于焦点位置时的光路图，此时无法获得纯横向剪切

格林菲（Griffin，2001）曾建议在平板结构中用液晶来填充两块平板之间的间隙。这样引入的是一个比较容易控制的相移剪切。常等人（Chang et al.，2002），认为相移量实际上是不能被完全重复的，在引入未知的相移时可能成为误差源。

苏哈拉（Suhara，2002）曾使用一个带间隙的楔板通过计算机断层摄影术，来测量塑料透镜的折射率分布。带有楔板的横向剪切干涉仪还有一个重要应用，即对人眼晶状体和人造晶体进行活体测量，勒科拉等（Lechna-Marczynska et al.，1999）是最早利用简单楔板来进行这一测量的研究者。德罗巴等（Dubra et al.，2004、2005）最近继续开展了这项研究工作，他们使用双横向剪切干涉仪，也可以称为三维剪切干涉仪，来描绘晶状体表面轮廓。

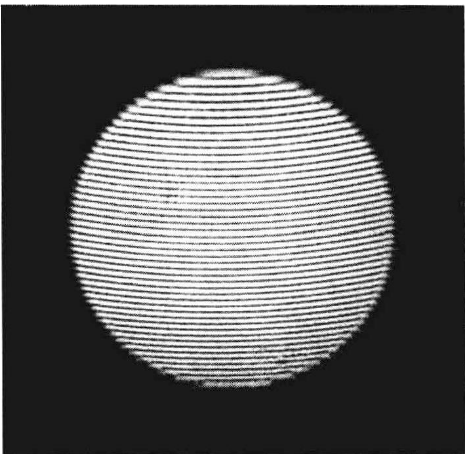


图 4.42 用图 4.40 所示干涉仪得到的典型横向剪切干涉图

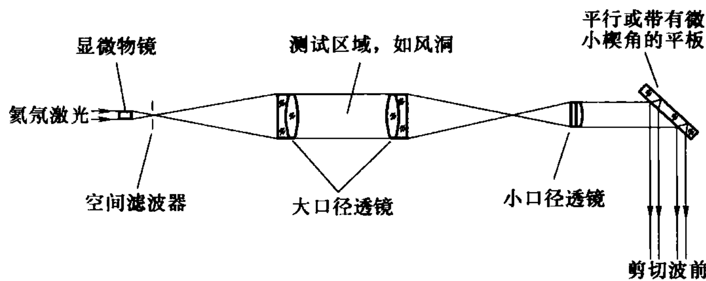


图 4.43 用于大口径风洞研究的平行平板干涉装置示意图。

当楔板沿着它的一个棱镜表面移动时，入射光束的光程将发生改变，这就意味着对光线来说楔板的厚度发生了变化。利用这一特点，可以移动楔板使波前中引入相位变化。引入可以控制的相位改变，在不需要昂贵的压电控制镜的情况下，就可以实现波前重构。李等人（Lee et al.，2003）在纵向剪切干涉仪中，将一块棱镜沿着两棱镜的共同对角线相对另一块移动，给棱镜加了一个额外的自由度。宋等人（Song et al.，2004a、2004b）简化了这一结构，通过移动一个楔板镜来引入大小可以控制的相位。

近来，默哈特等（Mehta et al.，2005a）提出一种采用微小楔角平板的横向剪切干涉仪，来设计一种能够扩展测量范围、改善分辨率的通用系统。默塔等（Mehta et al.，2005b）曾利用双波长图样投影在上述楔板装置上建立了三维轮廓仪。

对平行平板干涉仪进行改造，可以在发散光或会聚光中产生横向剪切（Malacara et al.，1975）。如图 4.44 所示，一块离轴发散透镜取代了平行平板。除了所需要的横向剪切之外，这种改造会同时引入一定量的径向剪切，因此其应用也受到限制。

斯克维德（Schwider，1980）对平行平板干涉仪进行了改造，使之可以在白光下产生条纹。他的方法称为条纹重叠法，主要是基于色差补偿，将法布里-帕罗干涉仪置于剪切平板前面的平行光束中。如图 4.35 所示，这块剪切板实际上是由两块板所组成。

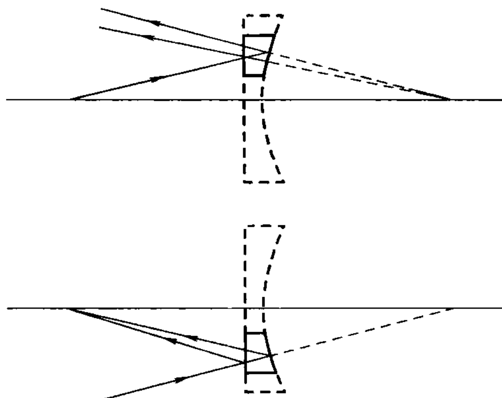


图4.44 在经改装用于会聚波前或发散波前的平行平板干涉仪
（一块离轴平-凹发散透镜代替了平行平板。）

4.8 其他类型的横向剪切干涉仪

至此，我们只研究了将反射面作为分光镜产生振幅分割的干涉仪。这种振幅分割是由表面镀半反射膜层或者靠空气-玻璃边界上的反射来实现的。还有若干应用其他光学原理来产生横向剪切的干涉仪类型。有趣的是，第一种横向剪切干涉仪正是基于这种替代技术。在这里仅简要介绍一下，其中有一些内容在其他章节里还会详细介绍。

4.8.1 基于衍射原理的横向剪切干涉仪

假定有一束会聚光正入射到一个周期为 d 的透射式衍射光栅上，光束聚焦点位于光栅面上。设会聚光束的半锥顶角为 α。利用衍射光栅公式，可以给出一级衍射光束中心光线的方向 θ，也称为衍射角

$$\sin\theta=\frac{\lambda}{d} \tag{4.31}$$

如图4.45所示，适当选择与其他试验参数相关的光栅周期 d 值，零级和一级衍射光束将发生重叠。对于零级和一级透射模式的衍射光栅，还存在更高级次的衍射。级次越高，衍射光束的峰值强度越弱，干涉图样将越难以分辨。

改变透射模式，可以制作出只透射零级和一级光束的光栅。在合适的衍射角下，原始波前的误差将会包含在零级和一级衍射光束中。通常认为，两个级次的光束宜保持分离，这样仅有两条光束（而不是三条或四条）产生干涉图样。为达到上述要求，必须满足下面的条件

$$\theta\geqslant\alpha \tag{4.32}$$

这一表达式可以用光栅周期 d 改写为

$$d\leqslant 2\lambda f\text{数} \tag{4.33}$$

理想情况下，如图4.45所示，各光束圆周几乎不相接触。该干涉图样以其发明者的名字命名，称为朗奇条纹，这种经过优化的干涉仪结构也称为朗奇干涉仪。这时，即可以采用式(4.33)中的等式。选择多大的光栅周期取决于光学系统的 f 数。例如，设系统的 f 数 =5，

波长 $\lambda=0.5\mu m$，则光栅周期 d 为 $5\mu m$。因此，这时必须用每毫米 200 条线对的光栅。

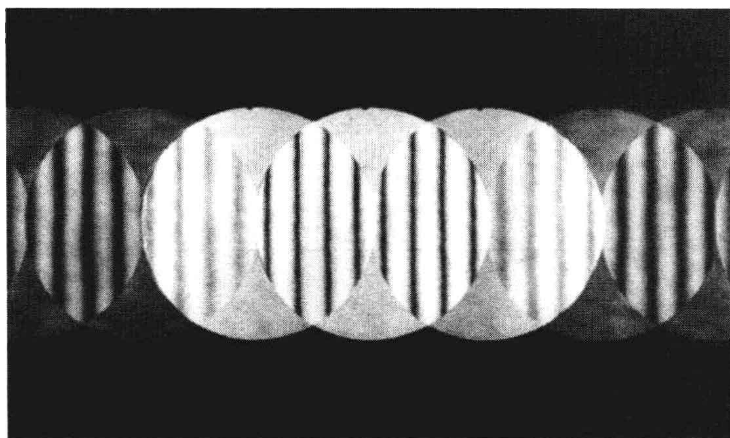


图 4.45 当选择合适的朗奇“光栅”周期时典型的朗奇条纹
（两个一级衍射光束恰好相接并穿过零级光束的中心。）

光栅干涉仪同样也是白光补偿的。如果用合适尺寸的针孔来限制光源大小，原则上也可以采用普通光源。当然，在光栅干涉仪中使用激光光源还是相当方便的。

使用激光光源可以制作出不同周期的光栅。通过记录不同方向入射的两平面波之间的干涉条纹，可以实现这一目的。改变两平面波前之间的角度，可以得到数个不同的光栅周期。这种干涉仪是朗奇提出的（Ronchi，1923）。在他的许多出版物中有大量相关的论述，很好地总结了这项工作。

带有两块光栅的横向剪切干涉仪可以用来对空间光调制器作光学寻址，空间光调制器进而对 Nd: YAG 连续激光的输出光束进行整形（Scholl，1980）。维特莱尔等（Wattelier et al.，2002）曾介绍过一种在空间频率面上对激光光束进行测量和整形的设备。

为避免产生多光束干涉，宜采用的横向剪切量约为光束口径的一半左右。对其他所有应用剪切的场合而言，这实际上是一个相当大的剪切量。但是，不可能用单个光栅得到较小的剪切量，同时又避免空间域内因三光束重叠和干涉而导致的紊乱。

这可能仅在空间域内会成为限制。随着傅里叶技术在光学方面的广泛应用，尤其是采用空间滤波技术时，空间域内相互重叠的光束在频域内是很容易分开的。虽然多光束干涉中的噪声多少会对计算造成影响，但维尔格等（Velghe et al.，2005a、2005b、2005c）曾演示过，在剪切干涉装置中是允许多光束重叠的。

怀扬特（Wyant，1973）曾发明一种双频光栅来产生一个很小量的剪切。其中使用了一块带有两个不同的频率的光栅。选择较低的频率使得零级和一级光束相互分开，较高的频率使得相互剪切的两束一级光相对其他一级光分开。多光束的几何位置和重叠情况如图 4.46 所示。

插入两块完全相同并相互垂直的光栅，可以同时产生子午和弧矢两个方向上的剪切。图 4.47 所示为由 8 个一级光束包围的中心零级的几何布局，8 个一级光束两两互相剪切。图 4.48 所示为用两个完全相同的彼此垂直并相互接触的双频光栅得到的典型会聚波前横向剪切干涉图。其中包含一个均匀的零级和四个剪切干涉图样。水平的一级光束在水平方向发生剪切，垂直光束则沿着垂直方向发生剪切。两个相互垂直的双频光栅可以制作在同一块照相底板上。

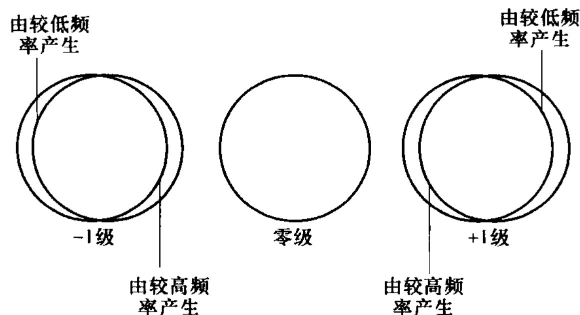


图4.46 多光束的几何位置和重叠情况

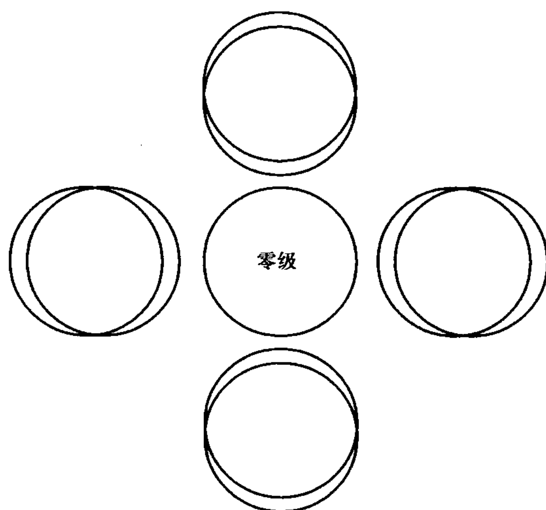


图4.47 8个一级光束包围的中心零级的几何布局（一级光束的横向剪切同时发生在弧矢和子午方向上。零级光束不参加干涉。）

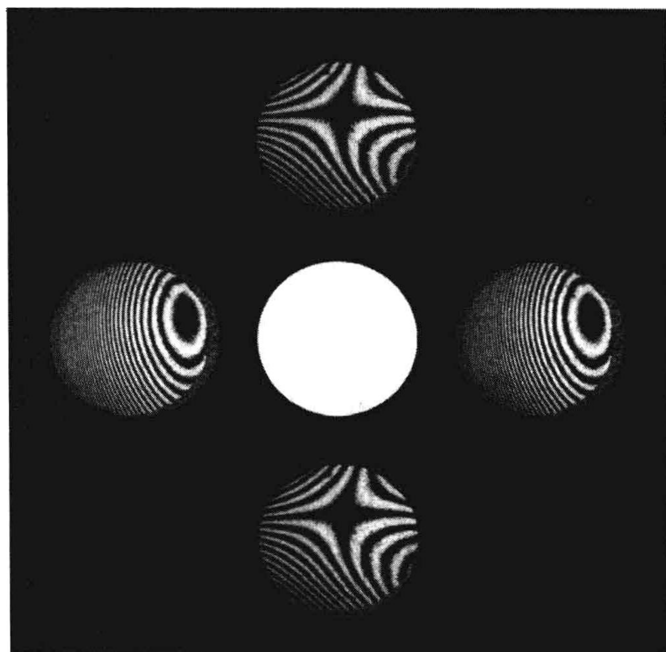


图4.48 用两个完全相同的彼此垂直并相互接触的双频光栅得到的典型会聚波前横向剪切干涉图（零级光束表现为一个均匀场，有两个图样是重复的。）（Wyant，1973）

里默和怀扬特（Rimmer and Wyant，1975）提出了一项利用两个相互交叉的同频率光栅来获得可变剪切量的技术。其中一块光栅的微小旋转会使得剪切量随着旋转角度和旋转半径而增大。这是对旋转剪切干涉仪的一阶近似（也可参见 Scholl，1996；Strojnik and Paez，2003）。图4.49给出了可与图4.47进行对比的光束分布。该系统有助于实现可变的剪切量。这一方法可以用来对非球面进行零条纹补偿检验。

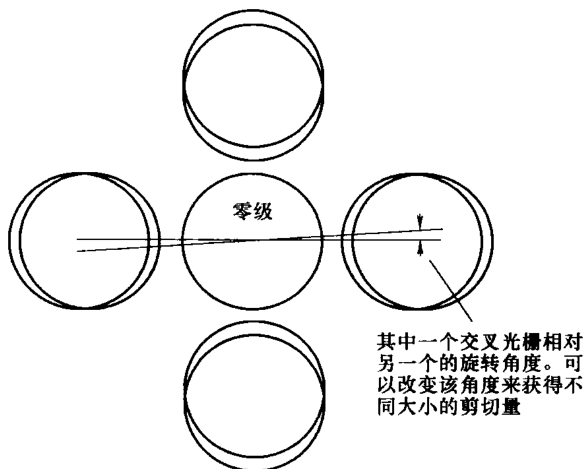


图4.49 两个相互交叉的同频率光栅在干涉定域面上的光束分布和叠加（光束两两相互叠加，在子午方向和弧矢方向同时产生横向剪切。一个光栅可以相对另一个旋转来改变剪切量。）（来自怀扬特，1973）

乔纳森等（Joenathan et al.，1984）曾提出一种双频光栅干涉仪的改进形式，其中使用了两块稍稍错开的离轴环形板。

斯克维德（Schwider，1984）介绍过另一种具有连续可变剪切量的横向剪切干涉仪。由两块依次放置于平行光束中并相互成一定角度的衍射光栅来产生剪切。第一块光栅的零级和第二块光栅的一级发生干涉，第一块光栅的一级和第二块光栅的零级发生干涉。

自20世纪90年代以来，由于光刻尺寸在不断缩小，以及在193nm深紫外区域缺少足够的检测设备，光刻掩模板的尺寸和其强度分布已经达到了一个极限。带有朗奇光栅的横向剪切干涉仪已经被证明在这个波段仍具有良好表现。哈格曼等（Hegeman et al.，2001）描述过一种改进型的朗奇干涉装置，带有可产生更高级次光束的光栅。福特尔等（Futterer et al.，2002）建立了一种工作在197nm用于相移掩模板测量的双光栅干涉仪。几年之后，福特尔和斯克维德（Fütteret and Schwider，2005）对之作了详细的误差分析，进一步确认了这种仪器的性能。

几乎与此同时，日本的一个小组应用这项技术对极紫外（EUV）投影物镜进行了质量评价。朱等（Zhu et al.，2004）估计，13.5nm波长下的测量精度为0.1nm RMS。一年以后，他们（Zhu et al.，2005）估计，带有光栅的横向剪切干涉仪将达到与点衍射干涉仪同样的性能水平。刘等（Liu et al.，2005）还开发了一项新颖的技术，用来校准用于极紫外（EUV）光学测量的双光栅横向剪切干涉仪。

4.8.2 基于偏振原理的横向剪切干涉仪

当一束非偏振光入射到双折射材料上时，会产生两束偏振方向相互垂直的偏振光。这两个偏振方向相互垂直的光束并不产生干涉，因为它们是非相干的。但是，如果入射光是偏振光，则出射的两束偏振方向相互垂直的光束是相干的，发生干涉时会产生可探测的条纹。

有许多类型的偏振棱镜，利用这种棱镜可以由一束平面偏振的入射光获得两束偏振方向相互垂直的光束。渥拉斯顿棱镜是横向剪切干涉仪中最常用到的棱镜之一（带有双像棱镜的干涉仪在本书第3章中已有详细介绍）。默迪和舒克拉（Murty and Shukla，1980）、科米萨如克和蒙德（Komissaruk and Mende，1980）给出了一些用一块液晶楔板作为偏振元件的干涉仪的例子。

萨克泽纳（Saxena，1979）描述了一种有趣的用到一块巴比涅补偿板的干涉仪，如图4.50所示。这种干涉仪类似于第3章中所介绍的共光路干涉仪，在双光路中使用一块渥拉斯顿补偿板。这里，一块巴比涅补偿板所引入的横向剪切量S为

$$S=2R(N_e-N_o)\tan\alpha \tag{4.34}$$

式中，R为被测凹面的曲率半径；N_e和N_o分别为非常光和寻常光折射率；α为补偿板的楔

角角度。

典型的巴比涅补偿板由石英制成（$N_c=1.553305$，$N_o=1.544195$），楔角角度为 $\alpha=7.5°$。

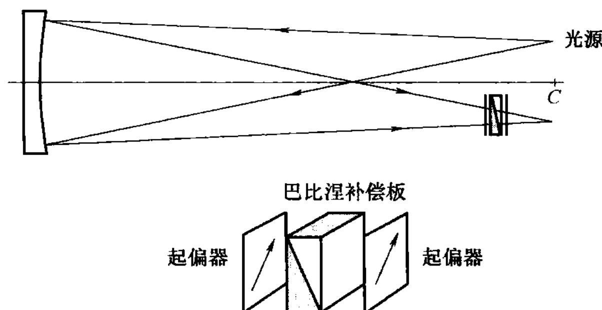


图4.50　用巴比涅补偿板产生剪切光束的干涉仪

如果用显微镜来观察两块偏振板之间的巴比涅补偿板，可以观察到一组相互平行并等间距的直条纹，形成一组朗奇线。该朗奇线的两个重要的特征在于：①图样的轮廓线成正弦曲线；②任意两条相邻亮线之间的相位差为180°。朗奇线组中的条形间隔会产生同样的干涉图样，并且该间隔与等相位的两条线之间间隔相等。对于上面列出的补偿板参数，所形成的条形间隔为每英尺110条线。

萨克泽纳和杰尔拉简（Saxena and Jayarajan，1981）、萨克泽纳和兰斯洛特（Saxena and Lancelot，1982）改进了这种干涉仪，采用两块相互交叉的巴比涅补偿板，使其灵敏度提高了一倍，同时降低了干涉仪对补偿板定位时方位角变化的敏感度。

两个相互交叉的巴比涅补偿板如图4.51所示。两块补偿板产生互相垂直的横向剪切。因此，条纹峰值（白色条纹）出现的条件为

$$\frac{\partial W}{\partial x}S+\frac{\partial W}{\partial y}T=n\lambda \tag{4.35}$$

式中，W 为波前畸变，包含离焦和倾斜；S 和 T 分别为两个相互垂直方向上的剪切量。

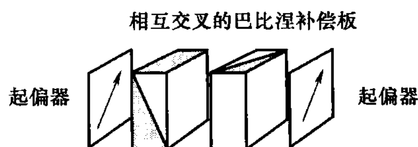


图4.51　两个相互交叉的巴比涅补偿板
（两个补偿板产生相互垂直的横向剪切。）

两块补偿板可以相互紧挨着，也可以间隔一个小距离 d。在这种情形下，对两个相互垂直的剪切方向来说，离焦项将是不同的。那么，如果是指两块补偿板之间中点位置上的离焦，条纹的表达式即为

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{2d}{2R^2}x\right)S+\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{d}{2R^2}y\right)T=n\lambda \tag{4.36}$$

这时，球差条纹变成 S 形，与图4.7中的类似。

带有双折射平行平板的偏振相移板可以用来检验非球面。维杰尔斯等（Weijers et al.，1998）对光线在单轴晶体和双折射元件中的传输作了简单的计算，剔除了其中的固有误差。在需要估计干涉图样和进行波前重构的时候，这种方法可以用来直接显示相移干涉图样。

贝格贝尔等（Begbie et al.，2001）利用缪勒（Mueller）矩阵组进行了严格的分析，证明消除条纹紊乱必须满足偏振态要求。

4.9 矢量剪切干涉仪

矢量剪切干涉仪是一种可以将剪切选在最有利方向上的横向剪切干涉仪。它产生直接的波前偏导，使用线性积分方法很容易积分得到波前。这种方法由帕尔兹和斯特尼克（Paez and Strojnik，1997、1998）提出并进行了优化，可以用于检验和重建条纹密度非常大的离轴波前。（Paez and Strojnik，1999；Paez and Scholl，2000）。

检验时所用的装置可以在马赫-泽德干涉仪基础上结合使用横向剪切系统。在最初的装置中，曾用一对楔角棱镜来修正剪切波前相对参考波前的光程差和倾斜量。选择合适的平移量 Δx 和 Δy，可以在任意方向上获得可变的剪切量和倾斜量，利用剪切方向和剪切量大小可以控制条纹的数目和方向。在 x 和 y 方向平移量已知的情况下，可以获得相位函数在任意方向上的梯度。

4.9.1 剪切干涉计量

近年来，人们在探测微弱目标和分辨微小细节方面的兴趣催生了大口径光学系统的发展，包括那些拼接主镜和稀疏主镜。这些装置通常需要加工相当大口径的离轴光学元件并进行检验。这时，因为常用的干涉检验技术一般都需要一个质量很高的参考元件，检验因而变得非常困难。因此，需要为光学设计和加工提供合适可用的检测元件和设备。

在剪切干涉仪中，被测波前的振幅分为两个部分：一部分未发生变化，另一部分中一个关键参数则变了。剪切干涉仪的最显著特点是不需要参考波前，因为被测波前是与其自身进行比较。保留有相同偏振态的那部分波前在探测平面上重新组合在一起，并形成干涉条纹。有三种基本的剪切干涉仪类型：横向剪切、径向剪切和旋转剪切干涉仪。波前反转干涉仪可以看做是旋转剪切干涉仪的一个特例——剪切角度为180°。

最近提出了一种干涉图样积分方法，可以由密度非常大的条纹图样来进行波前重构。这种算法的输入为相位函数的矢量偏导，这样，在记录输入强度数据方面，剪切干涉计量是一个特别有用的方法，在对含有噪声的数据取偏导时，可以避免噪声上升。在剪切干涉仪中，被测量是沿着剪切方向上的相位偏导。这种剪切干涉仪的一个突出特征便是仅在一个方向上取偏导。我们建立了一种新型的干涉仪，可以由操作者控制，在任意方向上取偏导。根据在两个相互垂直方向上的平移增加量 Δx 和 Δy，可以确定相位函数沿着这个方向上的二维偏导。波前和其沿着矢量 Δr 方向的剪切波前，以及彗差的典型干涉图样，如图4.52所示。

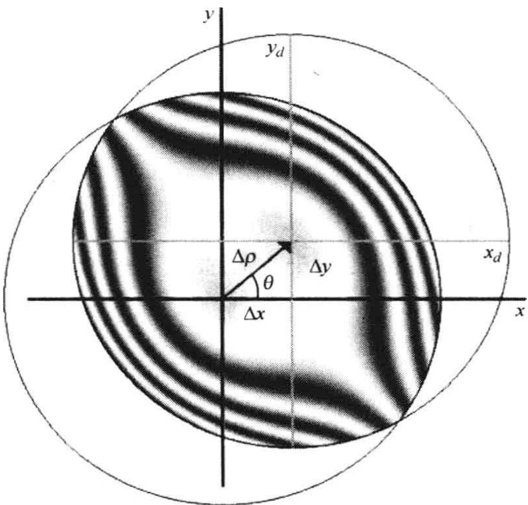


图4.52 原始波前和剪切波前及平移或剪切发生在任意方向时的矢量剪切干涉图

当检验非对称元件时，如果一个方向上的条纹非常密集，形成无法记录相位的波纹图样时，能在特定方向上取偏导即是最有效的。当计算梯度线积分进行波前重构时，取偏导尤其

能够发挥作用。

因为可以选取线积分的路径，取偏导通常可以选择一个有利的方向。事实上，通过计算线积分，一个两维的问题就变成了一维问题。如后面将介绍的，矢量剪切干涉仪有一个突出特点，即随着剪切量的大小不同，条纹的密度是可以控制的。

一般情况下，波前可以由位于出瞳面上的一个坐标系来表示。测试对称光学系统时，应用相关的对称条件，极坐标形式的像差可以写成简单多项式，最多展开到半径坐标的四次方。在右边，用初级像差对波前误差函数中的对应项做了标识。

$$
\begin{aligned}
W(\rho, \phi) &= F && \text{位置项} \\
&+ E\rho(\sin\phi + \cos\phi) && \text{倾斜}(x, y) \\
&+ D\rho^2 && \text{离焦} \\
&+ C\rho^2(1 + 2\cos^2\phi) && \text{像散} \\
&+ B\rho^3\cos\phi && \text{彗差} \\
&+ A\rho^4 && \text{球差}
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

矢量剪切干涉仪实际上是一个沿着探测器像素坐标系上任意方向上的普通平移（位置）或线性剪切干涉仪。剪切量的大小和方向均可由操作者控制。类似地，由棱镜的旋转在一条干涉臂上引入的倾斜量也可以由操作者控制。然而，在早期的结构中，这两个量是相互影响的。

4.9.2 定向剪切干涉仪

在横向剪切干涉仪中，波前的平移或剪切是沿着一个单一的 x 或者 y 方向来产生的。波前重叠区域随着剪切距离的增大而减小。通过改造一台马赫-泽德干涉装置，我们建立了自己的矢量剪切干涉仪。我们并不能确定这样做是唯一的还是最好的方法。帕尔兹等（Paez et al.，2000）曾设计和实现过这样的干涉仪。后来，加西亚托雷斯等（Garcia-Torales et al.，2001）对之作了分析。最近，加西亚托雷斯等（García-Torales et al.，2006）和拉米雷斯等（Ramirez et al.，2007）已经将这种干涉仪用于球面的非球面度检验。

由图4.52中可以看出，干涉区域是两个波前的重叠部分。图4.52同时还给出了平移矢量 $\Delta\rho$，$\Delta\rho$ 为剪切波前中心相对原始波前位置中心的定向净平移量。平移矢量 $\Delta\rho$ 包含相对 x 轴的一个角度 θ。可以在剪切矢量中适当增加平移量 Δx 或 Δy，来选择两波前重叠区域的最优大小。

图4.53所示为在马赫-泽德结构基础上建立的矢量剪切干涉仪实验装置，装置包括剪切系统和补偿系统。该装置可以用来对透镜进行透射式检验，透镜置于光路中，恰好位于第一块分光镜之前。由两块薄棱镜组成的剪切系统，按照每一块棱镜的旋转方向将波前平移（Strojnik et al.，2000，Garcia-Torales et al.，2002）。在探测器平面上对形成干涉图样的两束光进行探测。

一对固定棱镜组成的补偿系统，其中棱镜与旋转系统中的棱镜相同，可以插入到参考臂中。由于在参考臂中使用补偿系统，因此该干涉仪是白光补偿的。

平移波前中心的新位置是每一块独立旋转棱镜引入的单个平移量的矢量和。波前方向保持不变。如果两块棱镜由相同材料制成并且可在空气中旋转，则两棱镜旋转产生相同的角度偏移。在像平面上，光束的角度偏移转化成了距离。穿过剪切系统的总光线偏移是单个角度偏移的函数（Sandoval et al.，2001）。

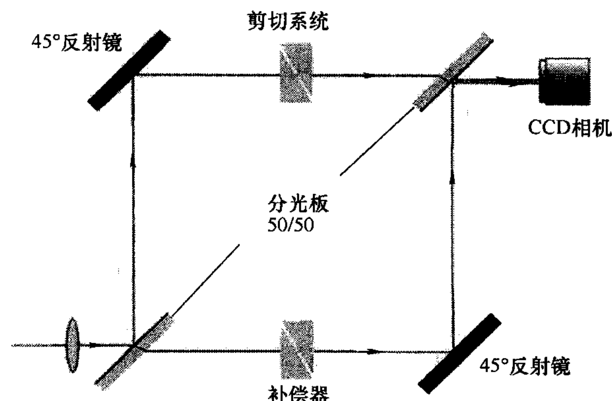


图 4.53 对正透镜进行透射式检验的矢量剪切干涉仪实验装置

另外，剪切系统在波前中引入了对 y-z 平面、x-z 平面或者 y-z、x-z 两个平面的倾斜。一旦选定棱镜材料和光学参数，就可以通过棱镜的旋转量和方向来控制倾斜量。改变倾斜量的时候，剪切量也发生改变，两个量都受光束旋转器件的控制。只有当改变棱镜间隔而不改变它们的相对角度的情况下，才可以改变任意一个方向上的横向剪切量而不引入倾斜。研究已经证明，在火焰特征研究中，这种结构是最有利的（Paez and Strojnik，2006）。

弧矢方向上的偏移可以对应于 x 方向上的平移，子午方向上的偏移则对应于 y 方向的平移。可以将光程差 ΔOPD 用波前误差多项式的差来表示

$$\Delta OPD = W(\rho+\Delta\rho,\theta+\Delta\theta) - W(\rho,\theta) \tag{4.38}$$

通过坐标系变换可以得到剪切径向平移矢量 $\Delta\rho$ 和剪切角度 θ

$$\Delta\rho = (\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{1}{2}} \quad \theta = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \tag{4.39}$$

下面将模拟给出矢量剪切干涉仪的干涉图样，并将它们与我们所熟悉的传统干涉仪上得到的图样进行比对。

4.9.3 模拟干涉图样

利用式（4.37）和式（4.38）来模拟给出存在初级像差时的干涉图样。每种情况均加入了 4 个波长的离焦。图 4.54 所示为 2.5 个波长的球差所形成的模拟图样，图 4.55 所示为 3 个波长的像散干涉图样，图 4.56 所示为 7 个波长的彗差干涉图样。图 4.57 所示为混合像差。我们对这些结果进行了汇总，以便与实验结果相互比较。

图 4.54 ~ 图 4.57 中的模拟结果分别列成四行三列。强度分布在一个角坐标为 ±1 的归一化方块中给出，其中心与原始波前的中心点相重合。

图 4.54 ~ 图 4.57 仅给出了必要信息，（有限）光瞳不重叠的部分没有给出。图4.54 ~ 图 4.57 中的每一列给出了下列位置上的模拟图样，从左到右依次为：①焦点内（4 个波长的负离焦）；②焦点上；③焦点外（4 个波长的正离焦）。图 4.54 ~ 图 4.57 中的第一行给出的是马赫-泽德干涉仪的模拟干涉图样，便于我们回顾熟悉的条纹形状。第二行给出的是 x 方向线性剪切干涉仪的模拟图样，便于同常见的结果相比较，其剪切径向矢量为 $\rho=0.3$，剪切角为 $\theta=\pi$。最后两行给出的为剪切径向矢量为 $\rho=0.632$，剪切角为 $\theta=0.322$rad（第三

行）和径向矢量$\rho=0.361$，剪切角为$\theta=0.595\mathrm{rad}$（第四行）时的模拟结果。相对原来方形孔径的中心，将剪切波前的中心沿角度θ方向作了大小为剪切径向矢量ρ的移动。下面我们对每一幅图进行详细介绍。

图4.54给出的是存在4个波长的正离焦、负离焦和不存在离焦时，2.5个波长的球差干涉图样。第二行给出的横向剪切干涉图与本章一开始给出的图样相同，证明我们的模拟结果总体上是可靠的。焦点外得到的条纹看起来很像马赫-泽德干涉仪上彗差产生的图样。除了相对一维剪切图样出现倾斜和中心移动之外，焦点外得到的球差条纹与线性干涉仪上得到的类似。

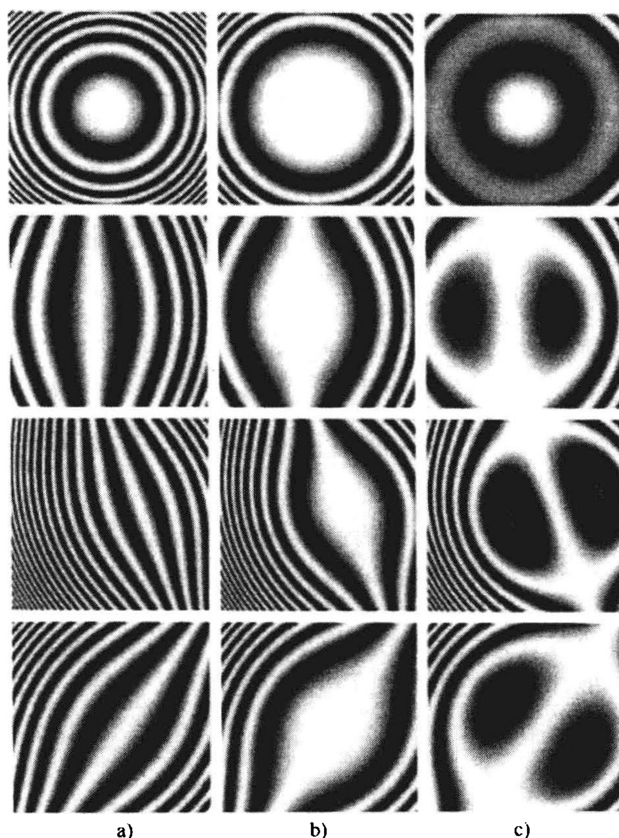


图4.54　球差（2.5个波长）和离焦在各种干涉仪上形成的模拟干涉图样
a）4个波长的负离焦　b）焦点上　c）4个波长的正离焦）

剪切装置产生的彗差图样变平，是因为在各种剪切中离焦量都减小了。此外，随着剪切径向量的增大条纹密度也在增大。利用这一特点，可以调整棱镜的旋转角度来调节仪器的灵敏度。在第二行中，可以定义一个垂直于线性剪切干涉图样的对称轴，将矢量剪切干涉仪的条纹图样或者对称线绕这条对称轴旋转，旋转量与剪切角度θ相关。条纹中心位置也可以由操作者控制：条纹移动的方向与剪切径向平径矢量$\Delta\rho$的方向相反。当x方向和y方向的增量为相同比例时，即使净剪切径向平径矢量$\Delta\rho$发生改变，角度θ也保持不变。

图4.55所示为存在4个波长的正离焦、负离焦和不存在离焦时，3个波长的像散干涉图样。在线性剪切干涉仪中，出现垂直于剪切方向的直条纹即证明存在像散。

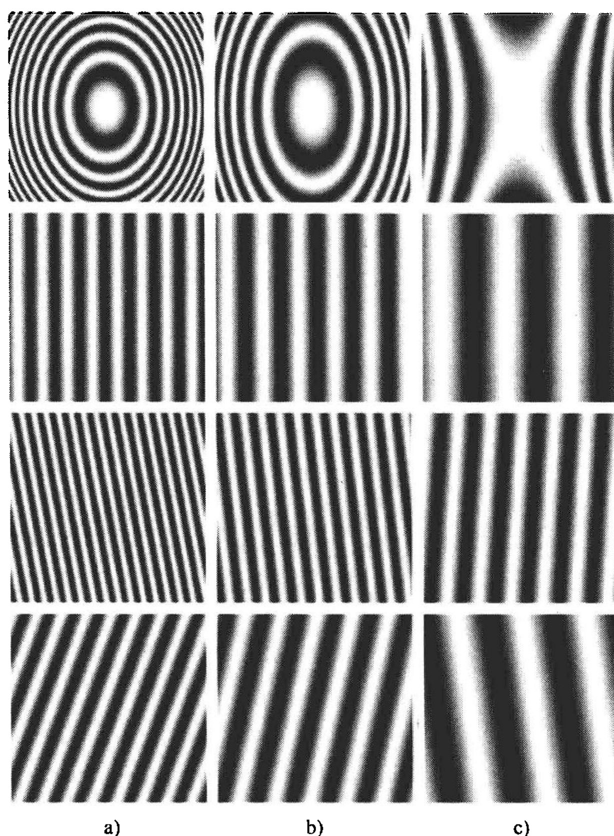


图 4.55 像散（3 个波长）和离焦在各种干涉仪上形成的模拟干涉图样
a）4 个波长的负离焦 b）焦点上的 c）4 个波长的正离焦

相对于线性剪切得到的条纹，矢量剪切所产生的干涉条纹会有倾斜。当然，它们的倾斜大小取决于离焦量的大小。当离焦和像散互相补偿时，对一个特定的焦点外的位置，条纹方向会呈现反转。随着离焦量的增大条纹数会减少。在任意一个离焦位置，剪切径向矢量的增大都会导致条纹数增多。

图 4.56 所示为存在 4 个波长的正离焦、负离焦和不存在离焦时，7 个波长的彗差干涉图样。第二行中类似像散的图样形状与线性剪切干涉仪记录的图样相对应。离焦使得这种类似像散的图样垂直于剪切方向有上移或下移。

对于图 4.56 中最后两行给出的一般剪切情形，可以观察到变形的类像散图样，可以与两种常见的像散图样相对应：*X* 形像散和 *O* 形像散。可以得到多种图样形式，其优势在于，可以从中选择一种更有利于波前重构的强度分布。由焦点内移动到焦点外的位置上，图样将会沿着两条对角线方向移动。

图 4.57 所示为球差、像散、彗差和离焦（4 个波长的正离焦、负离焦）等综合产生的模拟干涉图样。在矢量剪切干涉仪上产生的所有干涉图样均呈现出条纹离开参考光束中心向外移动的趋势。条纹图样同时呈现沿着与剪切矢量相反方向旋转的趋势。随着剪切矢量幅值的增大条纹密度也变大。

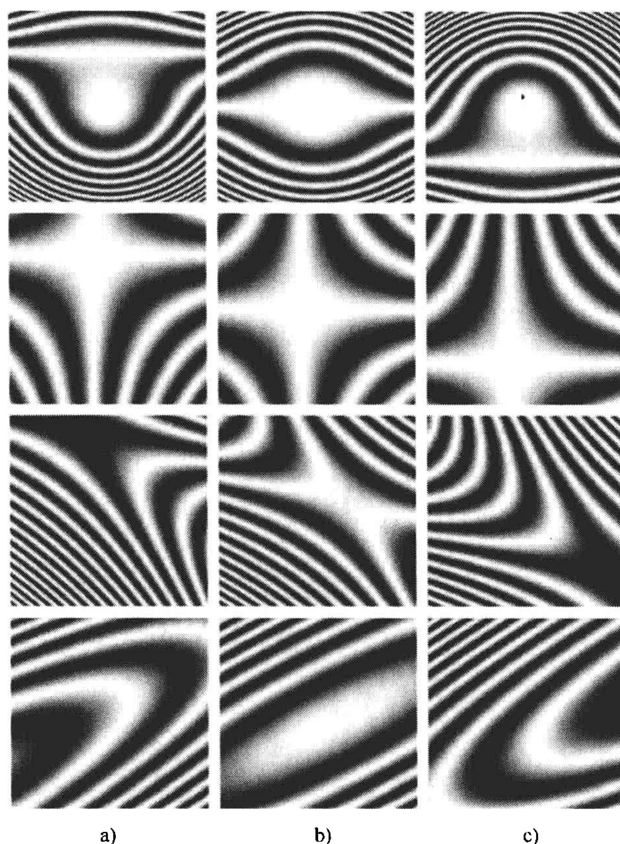


图4.56　彗差（7个波长）和离焦时在各种干涉仪上形成的模拟干涉图样
a）4个波长的负离焦　b）焦点上的　c）4个波长的正离焦

4.9.4　实验结果

下面演示如何识别像差类型和像差大小。有许多常用的实验装置，可以在马赫-泽德结构改成的矢量剪切干涉仪上记录干涉图样。图4.53和图4.58给出了其中的两种。第一种用来对波前进行透射式检验，第二种是反射式的。即使在实验室环境下，还是可能实现一个非常小的微分化的平移量，同时也可以实现一个非常小但有限的移动量。

图4.59所示为一对光束导向棱镜的照片。将很薄的两个棱镜固定在可旋转的卡具中，来控制每块棱镜的方向和间隔。图4.60所示为一个紧凑型矢量剪切干涉仪的基本部件，其中有位于一支光臂中的波前导向器和位于另一支光臂中的光程补偿装置。光源可由左边的光臂中水平入射，条纹形成在图中右边（参见图4.53和图4.58），在右边有一个高分辨率CCD记录图像。

图4.53为一个对正透镜进行透射式检验的矢量剪切干涉仪实验装置示例。图4.61中分别给出了在小剪切距离下和大剪切距离下实验得到的透镜干涉图样。尽管采用的是透射式元件，但该结构并未受到不需要的反射光的影响。剪切棱镜和补偿棱镜均将不需要的反射光偏出了被测波前光路。

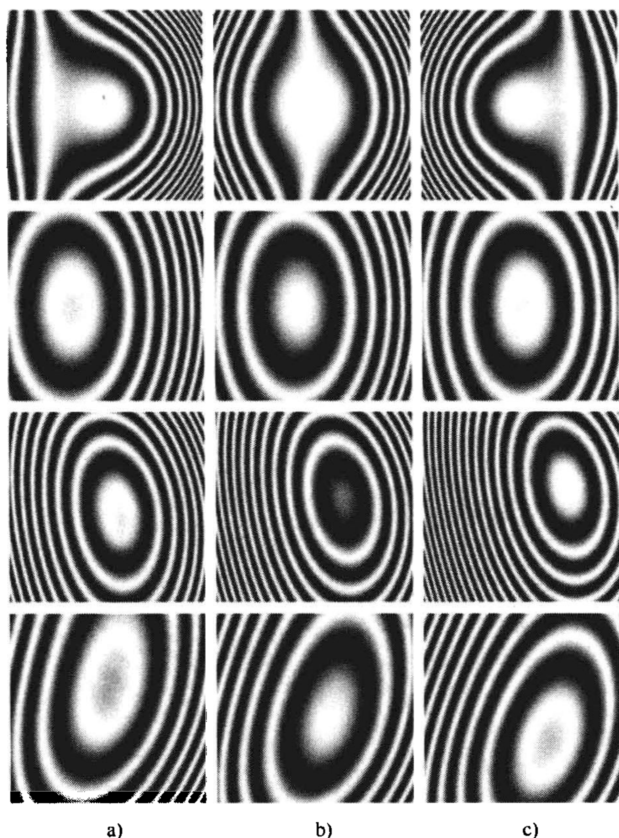


图 4.57　球差、像散、彗差和离焦等组合像差在各种干涉仪上形成的模拟干涉图样
a）4 个波长的负离焦　b）焦点上的　c）4 个波长的正离焦

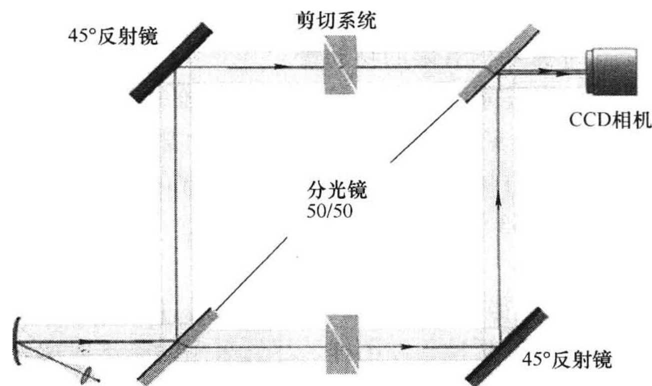


图 4.58　对抛物面镜进行反射式检验的矢量剪切干涉仪实验装置

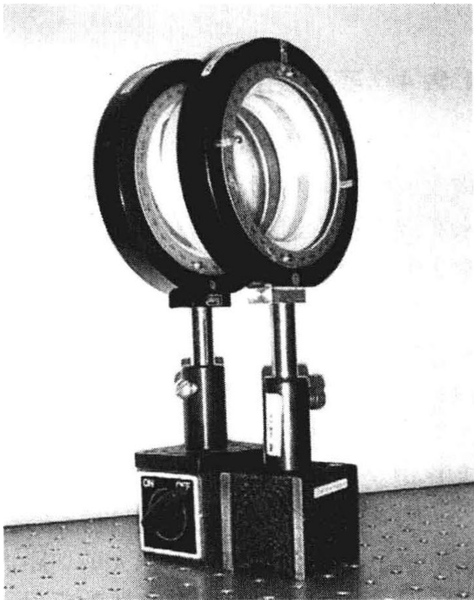


图 4.59　一对光束导向棱镜的照片（将很薄的两个棱镜固定在可旋转的卡具中，来控制每块棱镜的方向和间隔。）

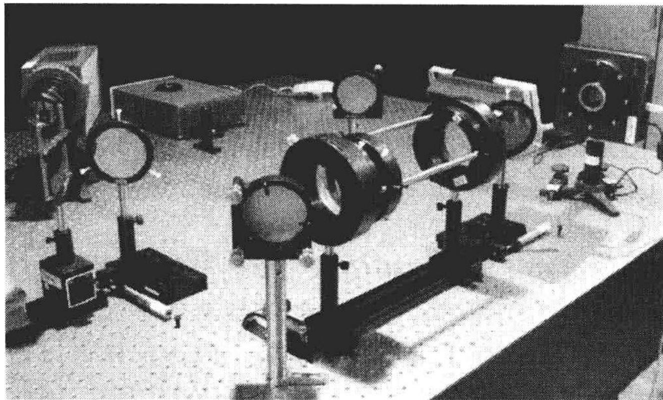
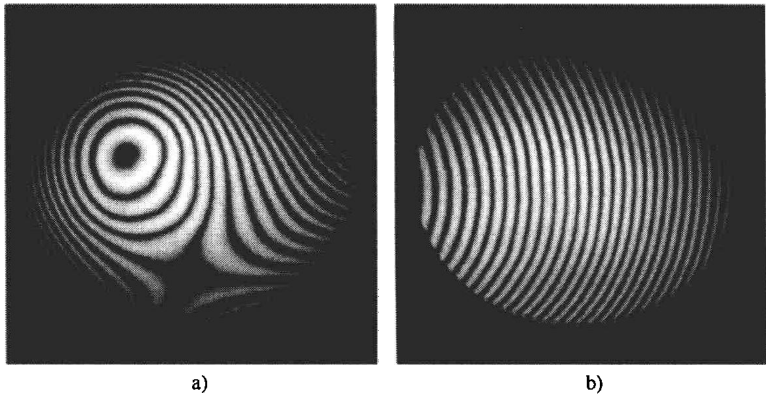


图4.60　紧凑型矢量剪切干涉仪的基本部件照片（一支光臂中有波前导向器。光源可由左边的光臂中水平入射，条纹形成在分光镜的右边（和上边），由一个高分辨率CCD记录条纹。

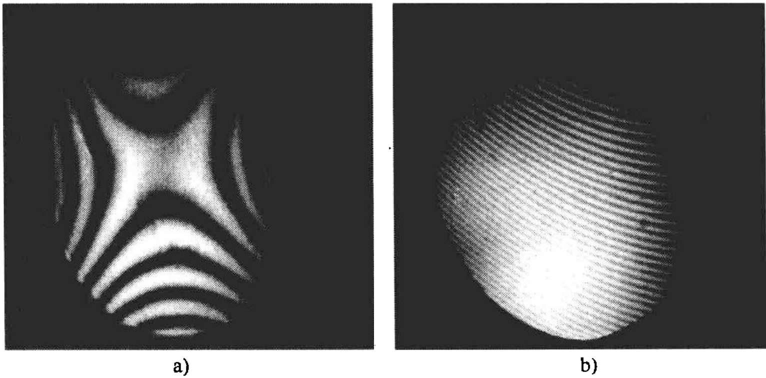


a)　b)

图4.61　采用矢量剪切干涉仪在无限小剪切距离下和有限的大剪切距离下，对透镜进行透射式检验实验得到的干涉图样

a）无限小剪切距离下　b）有限的大剪切距离下

图4.58给出的是一个用矢量剪切干涉仪对抛物面镜进行反射式检验的实验装置。图4.62中分别给出了在小剪切距离下和大剪切距离下实验得到的抛物面镜干涉图样。



a)　b)

图4.62　采用矢量剪切干涉仪在无限小剪切距离下和有限的大剪切距离下，对透镜进行反射式检验实验得到的干涉图样

a）无限小剪切距离下　b）有限的大剪切距离下

4.9.5 矢量剪切干涉仪和其他干涉仪的相似点和差别

通过建立概念、说明并演示了一种新型剪切干涉仪的性能，这种干涉仪具有一个重要的性能，即能够控制平移剪切的大小和方向。矢量剪切干涉仪能够建立在带有平移剪切系统的马赫-泽德结构基础上，剪切系统则由一对楔角棱镜组成，该楔角棱镜能够以很高的精度修正剪切波前和参考波前之间的光程差和倾斜。

使用小顶角的棱镜，减少了干涉仪中的不需要的反射光线的数目，也减少了直射到探测器面上的光能量。尽管人们相信，在通常的线性剪切干涉仪的一些受限制的形式中可以用一个单棱镜，但我们仍倾向于采用两个棱镜，因为这样可以增强对波前方向的控制并扩大波前范围。由于平移增量是沿着两个相互垂直的轴向，因此被测量实际上是相位函数的定向微分，这样就可以在二维方向上进行完整的相位复原。可以沿着任意其他的方向施加可变的剪切量和倾斜量，这样做的好处在于，条纹数目和方向可以由剪切量和剪切方向来控制。

徐等人（Xu et al.，2005）曾提出过一项紧凑型矢量剪切干涉仪的实施方案，其中，可以沿着光束法线方向移动棱镜来产生相移。这意味着干涉仪在设计上有了很大的简化。仅使用四个很薄的棱镜，沿着任意一个方向施加剪切，不使用压电式移动镜就可以实现相位步进，所产生的平移范围也很大。

矢量剪切干涉仪上形成的所有干涉图样均呈现出条纹移出参考光束中心的趋势。可以将条纹图样的旋转角度定义为：当剪切角 θ 为零时和剪切角 θ 为某一个有限值时，条纹法线之间的夹角，其代数符号和剪切角 θ 的符号相反。当剪切矢量的幅值增大时，条纹密度随之上升。

由图 4.63 可见，条纹方向可以由操作者控制。同时改变两块棱镜的方向而不改变它们的间隔和相对方向，可以实现这一点。假设图 4.63a 为参考图样，使用折射率 $n=1.517$ 和顶角 $\varepsilon=5°$的一对棱镜时，条纹产生平移，图 4.63b 为向上，图 4.63c 为向下，图 4.63d 为向左，图 4.63e 为向右。

图 4.64 给出的是条纹密度和棱镜相对方向之间关系的研究结果。随着棱镜之间的方向角增大，条纹密度随之上升。同样，使用的是折射率 $n=1.517$ 和顶角 $\varepsilon=5°$ 的一对棱镜。

就剪切量和倾斜量可变的矢量剪切干涉仪的多功能性和适应性，图 4.65 中给出的实验结果可以作为最好的说明。用商用干涉仪（WYKO）和矢量剪切干涉仪对一个校正良好的凸透镜所得到的透射干涉图样，分别如图 4.65a 中左边和右边。在图 4.65b，对一个焦距 $f=25\text{cm}$、口径 $D=7\text{cm}$ 的低质量透镜所得到的干涉图样之间的差异，使得右边的结果更为突出。在以上两种情况下，右边矢量剪切干涉仪上记录的均是条纹密度适宜的干涉图样。

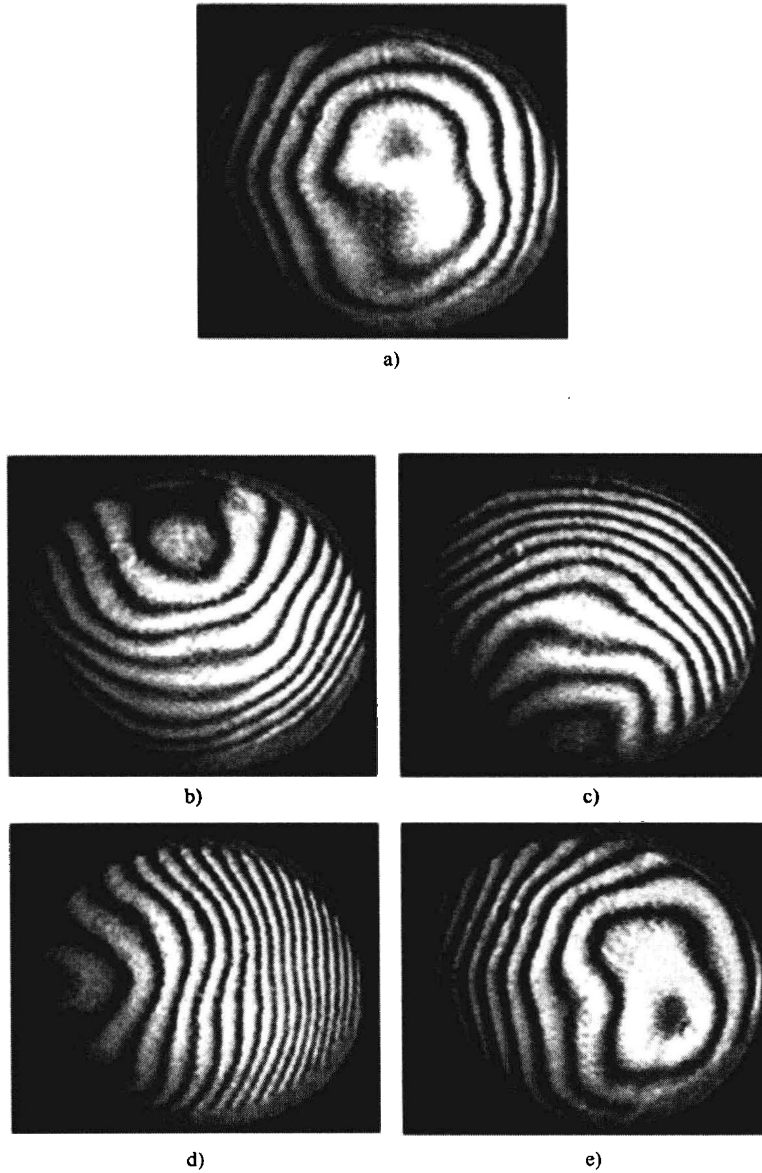

a)
b)　c)
d)　e)

图4.63　同时改变两块棱镜的方向而不改变它们的间隔和相对方向，可以改变条纹的方向（使用的是折射率 $n=1.517$ 和顶角 $\varepsilon=5°$ 的一对棱镜。）

a）参考图样　b）向上　c）向下　d）向左　e）向右

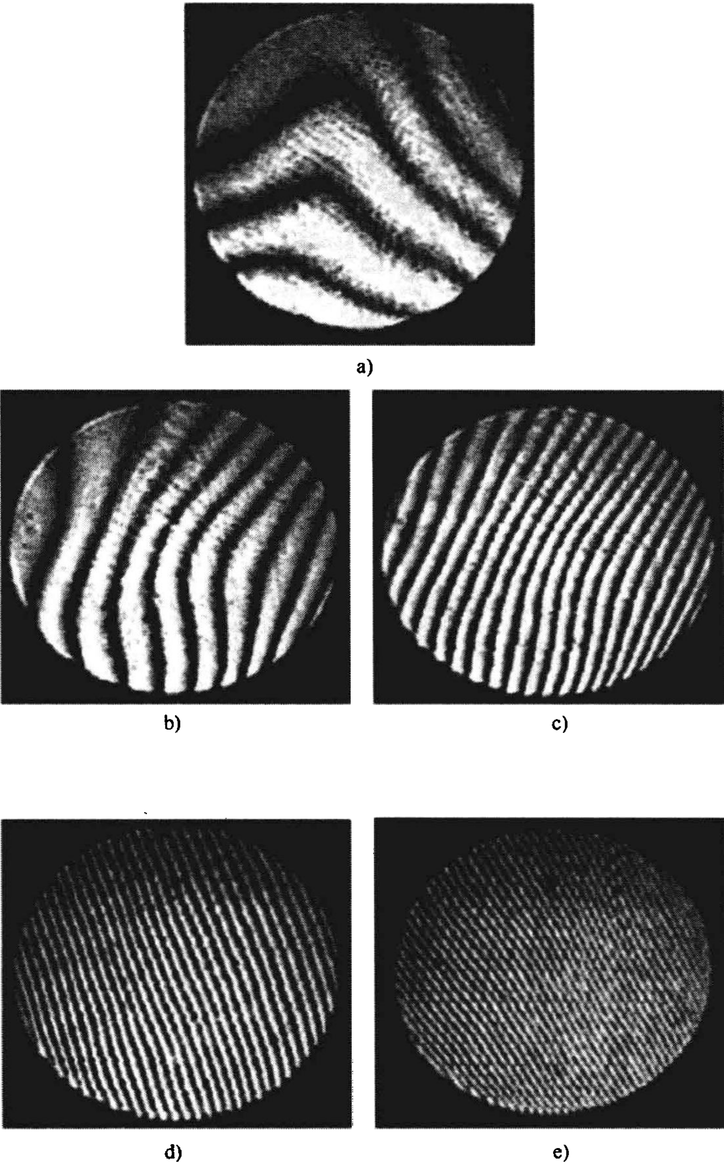


图 4.64 条纹随棱镜之间方向角增大而变密（使用的同样是折射率 $n=1.517$ 和顶角 $\varepsilon=5°$ 的一对棱镜。）

a) 0.5° b) 0.7° c) 1.3° d) 1.5° e) 1.6°

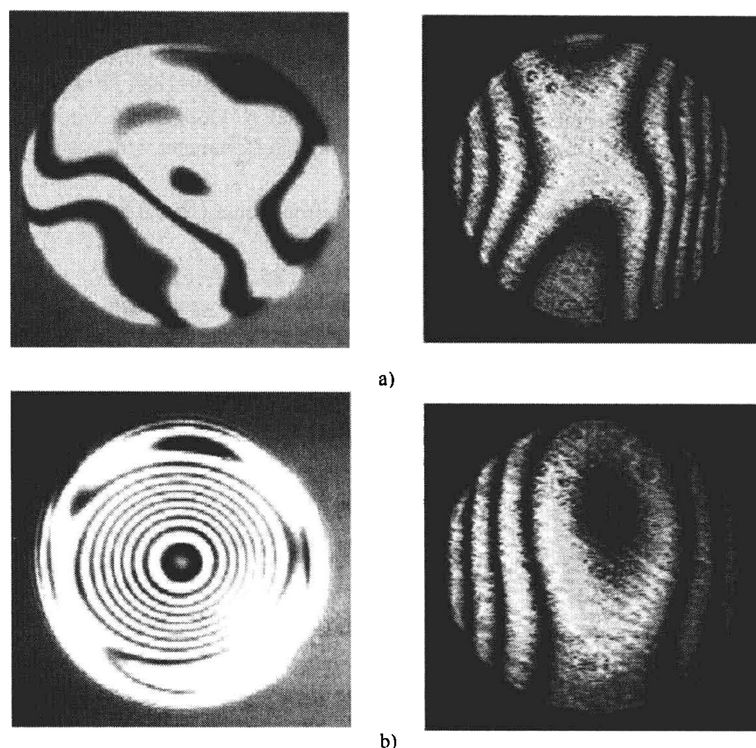


图4.65 分别采用商用干涉仪（WYKO）（左边）和矢量剪切干涉仪（右边），得到的透射干涉图样

a）对一个校正良好的焦距$f=30\text{cm}$、口径$D=5\text{cm}$的凸透镜 b）对一个未经良好校正焦距$f=25\text{cm}$、口径$D=7\text{cm}$的透镜

参考文献

Albertazzi A., Jr. and A V. Fantin, "Digital Complex Holography Using a Shearing Interferometer: Principles and Early Results," *Proc. SPIE.*, **4777**, 57–68 (2002).

Begbie M. L., W. Sibbett, and M. J. Padgett, "Mueller Matrix Error Correction for a Fringe-Free Interferometry System," *Appl. Opt.*, **40**, 3205–3210 (2001).

Chang K.-H., A.-C. Hsu, and J. L. Chern, "Comment on Phase-Shifting Shearing Interferometer," *Opt. Lett.*, **27**, 509–510 (2002).

Dickey F. M. and T. M. Harder, "Shearing Plate Optical Alignment," *Opt. Eng.*, **17**, 295–298 (1978).

Dubra A., C. Paterson, and C. Dainty, "Study of the Tear Topography Dynamics Using a Lateral Shearing Interferometer," *Opt. Exp.*, **12**, 6278–6288 (2004).

Dubra A., C. Paterson, and C. Dainty, "Double Lateral Shearing Interferometer for the Quantitative Measurement of Tear Film Topography," *Appl. Opt.*, **44**, 1191–1199 (2005).

Dutton D., A. Cornejo, and M. Latta, "Semiautomatic Method for Interpreting Shearing Interferograms," *Appl. Opt.*, **7**, 125–132 (1968).

Fütterer G., M. Lano, N. Lindlein, and J. Schwider, "Lateral Shearing Interferometer for Phase-Shift Mask Measurement at 193 nm," *Proc. SPIE*, **4691**, 541–551 (2002).

Fütterer G. and J. Schwider, "Uncertainty Analysis for Phase Measurement on Psm with a 193 Nm Common-path Shearing Interferometer," *Proc. SPIE*, **5858**, 321–333 (2005).

García-Torales G., G. Paez, and M. Strojnik, "Simulations and Experimental Results with a

Vectorial Shearing Interferometer," *Opt. Eng.*, **40** (5) 767–773 (2001).

García-Torales G., M. Strojnik, and G. Paez, "Risley Prisms to Control Wavefront Tilt and Displacement in a Vectorial Shearing Interferometer," *Appl. Opt*, **41**, 1380–1384 (2002).

García-Torales G., G. Paez., M. Strojnik, J. Villa, J. L. Flores, and A. González-Alvarez, "Experimental Intensity Patterns-Obtained from a 2D Shearing Interferometer with Adaptable Sensitivity," *Opt. Comm.*, **257**, 16–26 (2006).

Gorshkov V. A. and V. G. Lysenko, "Study of Aspherical Wavefronts on a Lateral Shearing Interferometer," *Sov. J. Opt. Technol.*, **47**, 689 (1980).

Griffin D. W., "Phase-Shifting Shearing Interferometer," *Opt. Lett.*, **26**, 140–141 (2001).

Grindel M. W., "Testing Collimation Using Shearing Interferometry," *Proc. SPIE*, **680**, 44–46 (1986).

Hariharan P., "Simple Laser Interferometer with Variable Shear and Tilt," *Appl. Opt.*, **14**, 1056–1056 (1975).

Hariharan P., "Lateral and Radial Shearing Interferometers: A Comparison," *Appl. Opt.*, **27**, 3594–3596 (1975).

Hariharan P. and D. Sen, "Cylic Shearing Interferometer," *J. Sci. Instrum.*, **37**, 374 (1960).

Hegeman P., X. Christmann, M. Visser, and J. Braat, "Experimental Study of a Shearing Interferometer Concept for At-Wavelength Characterization of Extreme-Ultraviolet Optics," *Appl. Opt.*, **40**, 4526–4533 (2001).

Joenathan C., R. K. Mohanty, and R. S. Sirohi, "Lateral Shear Interferometry with Holo Shear Lens," *Opt. Commun.*, **52**, 153–156 (1984).

Kanjilal A. K., P. N. Puntambekar, and D. Sen, "Compact Cyclic Shearing Interferometer: Part One," *Opt. Laser Technol.*, **16**, 261–264 (1984).

Kanjilal A. K. and P. N. Puntambekar, "Compact Cyclic Shearing Interferometer: Part Two," *Opt. Laser Technol.*, **16**, 311–314 (1984).

Kasana R. S. and K. J. Rosenbruch, "Determination of the Refractive Index of a Lens Using the Murty Shearing Interferometer," *Appl. Opt.*, **22**, 3526–3531 (1983a).

Kasana R. S. and K. J. Rosenbruch, "The Use of a Plane Parallel Glass Plate for Determining the Lens Parameters," *Opt. Commun.*, **46**, 69–73 (1983b).

Kelsal D., Thesis, *University of London*, 1959, *Proc. Phys. Soc.*, **73**, 465 (1959).

Komissaruk V. A. and N. P. Mende, "A Polarization Interferometer with Simplified Double-Refracting Prisms," *Opt. Laser Technol.*, **13**, 151–154 (1981).

Korwan D., "Lateral Shearing Interferogram Analysis," *Proc. SPIE*, **429**, 194–198 (1983).

Lechna M. M., T. J. Licznerski, and H. T. Kasprzak, "Interferometry for In-vivo Testing of Artificial Tears on the Surface of the Cornea," *Proc. SPIE*, **3820**, 386–389 (1999).

Lee Y. W., H. M. Cho, D. J. Shin, and I. W. Lee, "Concollimated Bidirectional Shearing Interferometer for Measuring a Long Radius of Curvature," *Appl. Opt.*, **36**, 5317–5320 (1997).

Lee H.-H., J.-H. You and S.-H. Park, "Phase-Shifting Lateral Shearing Interferometer with Two Pairs of Wedge Plates," *Opt. Lett.*, **28**, 2243–2245 (2003).

Leibbrandt G. W. R., G. Harbers, and P. J. Kunst, "Wavefront Analysis with High Accuracy by Use of a Double-Grating Lateral Shearing Interferometer," *Appl. Opt.*, **35**, 6151–6161 (1996).

Liang P., J. Ding, Z. Jin, C.-S. Guo, and H.-T. Wang, "Two-Dimensional Wavefront Reconstruction from Lateral Shearing Interferograms," *Opt. Exp.*, **14**, 625–634 (2006a).

Liang P., J. Ding, J. Zhou, and Hui-Tian Wang, "Wavefront Reconstruction for Lateral Shearing Interferometers with Big Shear," *Proc. SPIE*, **6027**, 60270Q (2006b).

Liu Z., M. Okada, K. Sugisaki, M. Ishii, Y. Zhu, K. Ohtaki, J. Saito, A. Suzuki, M. Hasegawa, C. Ouchi, S. Kato, M. Niibe, and K. Murakami, "Double-Grating Lateral Shearing Interferometer for EUV Optics at-Wavelength Measurement," *Proc. SPIE*, **5752**, 663–672 (2005).

Lonouvel L. and F. Lonouvel, "Etude des Faisceau Convergents (A study on convergent beams)," *Rev. Opt. Theor. Instrum.*, **17**, 350 (1938).

Malacara D., *Testing of Optical Surfaces*, Ph. D. Thesis, Institute of Optics, University of Rochester, New York, 1965a.

Malacara D., "Two Lenses to Collimate Red Laser Light," *Appl. Opt.*, 4, 1652–1654 (1965b).

Malacara D. and M. Mende, "Lateral Shearing Interferometry of Wavefronts Having Rotational Symmetry," *Opt. Acta.*, **15**, 59–63 (1968).

Malacara D. A. Cornejo, and M. V. R. K. Murty, "A Shearing Interferometer for Convergent or Divergent Beams," *Bol. Inst. Tonantzintla*, **1**, 233–239 (1975).

Malacara D. and M. Servin, "Frequency Analysis of Lateral Shearing Interferometers," *Proc. SPIE*, **2544**, 218–222 (1995).

Malacara-Hernández D., G. Paez, D. Malacara-Doblado, and J. García-Márquez, "Wavefront Retrieval from Lateral Shearing Interferograms with Fourier Techniques," *Proc. SPIE*, **2744**, 290–294 (1999).

Mehta D. S., M. D. Singh, P. Singh, M. S. Faridi, S Mirza, and Ch. Shakher, "Distance Measurement with Extended Range Using Lateral Shearing Interferometry and Fourier Transform Fringe Analysis," *Opt. Eng.*, **44**, 063602–10 (2005a).

Mehta D. S., S. K. Dubey, M. M. Hossain, and Ch. Shakher, "Simple Multifrequency and Phase-Shifting Fringe-Projection System Based on Two-Wavelength Lateral Shearing Interferometry for Three-Dimensional Profilometry," *Appl. Opt.*, **44**, 7515–7521 (2005b).

Murty M. V. R. K., The Use of a Single Plane Parallel Plate as a Lateral Shearing Interferometer with a Visible Gas Laser Source," *Appl. Opt.*, **3**, 531–534 (1964a).

Murty M. V. R. K., "Some Modifications of the Jamin Interferometer Useful in Optical Testing," *Appl. Opt.*, **3**, 535–538 (1964b).

Murty M. V. R. K., "Fabrication of Fixed Shear Cube Type Shearing Interferometer," *Bull. Opt. Soc. India*, **3**, 55 (1969).

Murty M. V. R. K., "A Compact Lateral Shearing Interferometer Based on the Michelson Interferometer," *Appl. Opt.*, **9**, 1146–1148 (1970).

Murty M. V. R. K. and D. Malacara, "Some Applications of the Gas Laser as a Source of Light for the Testing of Optical Sytems," Proceedings of the Conference on Photographic and Spectroscopic Optics, Tokyo and Kyoto, 1964, *Jpn. J. Appl. Phys.*, **4**, Suppl. 1, 106–111 (1965).

Murty M. V. R. K. and R. P. Shukla, "Liquid Crystal Wedge as a Polarizing Element and its Use in Shearing Interferometry," *Opt. Eng.*, **19**, 113–115 (1980).

Murty M. V. R. K. and R. P. Shukla, "Parallel Plate Interferometer for the Precise Measurement of Radius of Curvature of a Test Plate & Focal Length of a Lens Systems," *Ind. J. Pure Appl, Phys.*, **21**, 587 (1983).

Nyssonen D. and J. M. Jerke, "Lens Testing with a Simple Wavefront Shearing Interferometer," *Appl. Opt.*, **12**, 2061–2082 (1973).

Philipp H., H. Fuchs, E. Winklhoffer, and Georg Pretzler, "Flame Diagnostics by Light Sheet Imaging and by Shearing Interferometry," *Opt. Eng.*, **32,** 1025–1032 (1993).

Paez G. and M. Strojnik, "Fringe Analysis and Phase Reconstruction from Modulated Intensity Patterns," *Opt. Lett.*, **22**(22), 1669–1971 (1997).

Paez G. and M. Strojnik, "Convergent, Recursive Phase Reconstruction from Noisy, Modulated Intensity Patterns Using Synthetic Interferograms," *Opt. Lett.*, **23**, 406–408 (1998).

Paez G. and M. S. Scholl, "Phase-Shifted Interferometry Without Phase Unwrapping: Reconstruction of a Decentered Wavefront," *J. Opt. Soc. Am. A*, **16**, 475–480 (1999).

Paez G. and M. Strojnik, "Phase Reconstruction from Underdetected Intensity Pattern(s)," *J. Opt. Soc. Am. A*, **16**, 46–52 (2000).

Paez G. and M. S. Scholl, "Features of the Vectorial Shearing Interferometer," *Proc. SPIE*, **4231**, 328–339 (2000).

Paez G., M. Strojnik, and G. García -Torales, "Vectorial Shearing Interferometer," *Appl. Opt.*, **39**(28), 5172–5178 (2000).

Paez G. and M. Strojnik, "Applications of Vectorial Shearing Interferometer," Fringe 91, *The*

4th international Workshop on Automatic Processing of Fringe Patterns, W. Osten, Ed., Bremen, Germany, September 17–19, 2001, p.97.

Paez G. and M. Strojnik, "Flame Characterization with Vectorial Shearing Interferometer," *Unusual Optical Systems II*, Proc. SPIE 6719, International Society for Optical Engineering, Bellingham, Washington, USA, 2006.

Pfeil A. V., B. Messerschmidt, V. Blmel, U. Possner, and T. Possner, "Making Fast Cylindrical Gradient-Index Lenses Diffraction Limited by Using a Wavefront-Correction Element," *Appl. Opt.*, **37**, 5211–5215 (1998).

Rimmer M. P., *Method for Evaluating Lateral Shearing Interferograms*, Itek Corp. Internal Report No. 725802-1, 1972.

Rimmer M. P. and J. C. Wyant, "Evaluation of Large Aberrations Using a Lateral-Shear Interferometer Having Variable Shear," *Appl. Opt.*, **14**, 142–150 (1975).

Ronchi V., *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa*, **15**(1923).

Ronchi V., "Forty Years of History of a Grating Interferometer," *Appl. Opt.*, **3**, 437–451 (1964).

Sandoval J., G. Paez, and M. Strojnik, "Opto-Mechanical Design of a Prism Rotator," *Proc. SPIE*, **4486**, 170–180 (2001).

Saunders J. B., "Measurement of Wavefronts Without a Reference Standard I: The Wavefront Shearing Interferometer," *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **65B**, 239 (1961).

Saunders J. B., "Wavefront Shearing Prism Interferometer," *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **68C**, 155 (1964a).

Saunders J. B., "Interferometer Test of the 26-Inch Refractor at Leander McCormick Observatory," *Astron. J.*, **69**, 449 (1964b).

Saunders J. B., "Some Applications of the Wavefront Shearing Interferometer," Proceeding of the Conference on Photographic and Spectroscopic Optics, Tokyo and Kyoto, 1964, *Jpn. J. Appl. Phys.*, **4**, Suppl. 1, 99 (1965).

Saunders J. B., "A Simple Interferometric Method for Workshop Testing of Optics," *Appl. Opt.*, **9**, 1623–1629 (1970).

Saunders J. B. and J. Bruning, New Interferometric Test and its Applications to the 84-Inch Reflecting Telescope at Kitt Peak National Observatory, *Astron. J.*, **73**, 415 (1968).

Saxena A. K., "Quantitative Test for Concave Aspheric Surfaces Using a Babinet Compensator," *Appl. Opt.*, **18**, 2897–2895 (1979).

Saxena A. K. and A. P. Jayarajan, "Testing Concave Aspheric Surfaces: Use of Two Crossed Babinet Compensators," *Appl. Opt.*, **20**, 724–725 (1981).

Saxena A. K. and J. P. Lancelot, "Theoretical Fringe Profile with Crossed Babinet Compensators in Testing Concave Aspheric Surfaces," *Appl. Opt.*, **21**, 4030–4032 (1982).

Scholl M. S., "Ray Trace Through a Corner Cube Retro reflector with Complex Reflection Coefficients," *J. Opt. Soc. Am. A*, **12** (7), 1589–1592 (1995).

Scholl M. S., "Measured Spatial Properties of the CW Nd-YAG Laser Beam," *Appl. Opt.*, **19** (21), 3655–3659 (1980).

Scholl M. S., "Signal Detection by an Extra-Solar-System Planet Detected by a Rotating Rotationally-Shearing Interferometer," *J. Opt. Soc. Am. A*, **13**, 1584–1592 (1996).

Schreiber H., "Measuring Wavefront Tilt Using Shearing Interferometry," *Proc. SPIE*, **5965**, 596–607 (2005).

Schwider J., "Superposition Fringe Shear Interferometry," *Appl. Opt.*, **19**, 4233–4240 (1980).

Schwider J., "Continuous Lateral Shearing Interferometer," *Appl. Opt.*, **23**, 4403–4409 (1984).

Shen W., M.-W. Cheng, D.-S. Wan, "Zernike Polynomial Fitting of Lateral Shearing Interferometry," *Opt. Eng.*, **36**, 905–913 (1997).

Sirohi R. S. and M. P. Kothiyal, "Double Wedge Plate Shearing Interferometer for Collimations Test," *Appl. Opt.*, **26**, 4054–4055 (1987a).

Sirohi R. S. and M. P. Kothiyal, "On Collimation of a Laser Beam," *Proc. SPIE*, **813**, 205 (1987b).

Song J. B., Y. W. Lee, I. W. Lee, and J. Lee, "Simple Phase Shifting Method in a Wedge Lateral Shearing Interferometer," *Appl. Opt.*, **43**, 3989–3992 (2004).

Strojnik M., G. García-Torales, and G. Paez, "Fabricación de Prismas de Cuña para su Aplicación en el Sistema Director del Frente de Onda del Interferómetro de Desplazamiento Vectorial" (Fabrication of Thin Prisms for the Wavefront Director in the Rotational Shearing Interferometer), Informe Técnico 12, Centro de Investigaciones en Optica, León, México, 2000.

Strojnik M. and G. Paez, "Comparison of Linear and Rotationally Shearing Interferometric Layouts for Extra Solar Planet Detection from Space," *Appl. Opt.*, **42**, 5897–5905 (2003).

Suhara H., "Interferometric Measurement of the Refractive-Index Distribution in Plastic Lenses by Use of Computed Tomography," *Appl. Opt.*, **41**, 5317–5325 (2002).

Tanner L. H., "Some Laser Interferometers for Use in Fluid Mechanics," *K. Sci. Instrum.*, **42**, 834 (1965).

Tarvin J. A., R. D. Sigler, and G. E. Busch., "Wavefront Shearing Interferometer for Cryogenic Laser-Fusion Targets," *Appl. Opt.*, **18**, 2971 (1979).

Weijers A. L., H. Van Brug, and H. J. Frankena, "Polarization Phase Stepping with a Savart Element," *Appl. Opt.*, **37**, 5150–5155 (1998).

Velghe S., J. Primot, N. Guineau, R. Haidar, M. Cohen, and B. Wattellier, "Accurate and Highly Resolving Quadric-Wave Lateral Shearing Interferometer, from Visible to IR," *Proc. SPIE*, **5776**, 134–143 (2005).

Velghe S., J. Primot, N. Guineau, M. Cohen, and B. Wattellier, "Visible and Infrared Wavefront Metrology by Quadric-Wave Lateral Shearing Interferometry," *Proc. SPIE*, **5965**, 596–512 (2005).

Velghe S., J. Primot, N. Guineau, M. Cohen, and B. Wattellier, "Wavefront Reconstruction from Multidirectional Phase Derivatives Generated by Multilateral Shearing Interferometers," *Opt. Lett.*, **30**, 245–247 (2005).

Venkata B. and D. P. Juyal, "A 10-mm CO2 Laser Interferometer Using Shearing Technique," *J. Optics (India)*, **16**, 31 (1987).

Waddell P., M. Stickland, S. McKay, and L. S. Mair, "Checking the Symmetry of Stretchable Plastic Membrane Concave Mirrors Using a Lateral Shearing Interferometer," *Proc. SPIE*, **2248**, 141 (1994).

Wattellier B., C. Sauteret, J.-C. Chanteloup, and A. Migus, "Beam-Focus Shaping by Use of Programmable Phase-Only Filters: Application to an Ultra long Focal Line," *Opt. Lett.*, **27**, 213–215 (2002).

Wyant J. C., "Double Frequency Grating Lateral Shear Interferometer," *Appl. Opt.*, **12**, 2057 (1973).

Xu X., Q. Lu, and Z. Liu, "Optical Phase Retrieval by Lateral Shear Interferometer Based on Wavelet Transform," *Proc. SPIE*, **4929**, 532–537 (2002).

Xu R., H. Liu, Z. Luan, and L. Liu, "A Phase-Shifting Vectorial-Shearing Interferometer with Wedge Plate Phase-Shifter," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **7**, 617-23 (2005).

Zhu Y., K. Sugisaki, C. Ouchi, M. Hasegawa, M. Niibe, A. Suzuki, and K. Murakami, "Lateral Shearing Interferometer for EUVL: Theoretical Analysis and Experiment," *Proc. SPIE*, **5374**, 824–832 (2004).

Zhu Y., K. Sugisaki, M. Okada, K. Ohtaki, Z. Liu, M. Ishii, J. Kawakami, J. Saito, K. Murakami, C. Ouchi, M. Hasegawa, S. Kato, T. Hasegawa, A. Suzuki, and M. Niibe, "Experimental Comparison of Absolute PDI and Lateral Shearing Interferometer," *Proc. SPIE*, **5752**, 1192–1199 (2005).

Xu R., H. Liu, Z. Luan, and L. Liu, "A Phase-Shifting Vectorial-Shearing Interferometer with Wedge Plate Phase-Shifter," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **7**, 617 23 (2005).

第5章 径向、旋转和反转剪切干涉仪

5.1 引言

在许多不同结构中，双光束干涉仪中的两束相干波前可有数种相对方向和尺寸。如斯迪尔（Steel，1983）、沃姆斯雷和马拉卡拉（Walmsley and Malacara，1995）等所指出的，可以将这些双光束干涉仪最重要的特性完整描述为：

1）光源的位置和所处方位，在探测面上观察到的光源的两个像的尺寸。

2）像平面的位置和所处方位，在光源位置上观察到的像平面的尺寸。

3）两条光路上的光程差。

这些参数完整定义了横向剪切、倾斜和弧矢。剪切是两束相干波前之间的横向平移，移动量则是它们之间的径向间隔。倾斜是光源的两个像之间的横向间隔，弧矢则是它们之间的径向间隔。第四个独立参数是光程差，光程差是透射折射率的函数。这些参数如图5.1所示。所有剪切干涉仪的主要性能都可以根据这些参数进行分析。

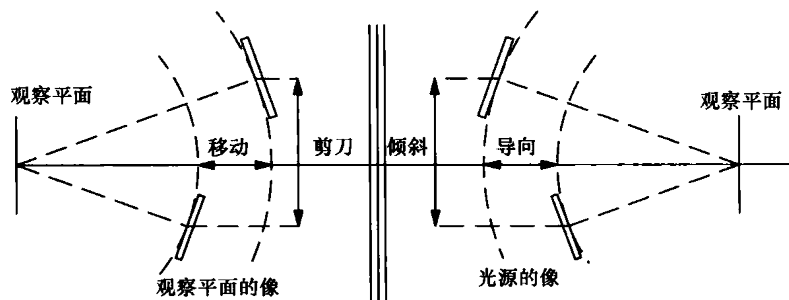


图5.1 任意一个干涉仪的第一级参数示意图

虽然最常用的剪切干涉仪是横向剪切干涉仪，其他形式的剪切干涉仪也是同样有用的。本章将研究径向剪切干涉仪、旋转剪切干涉仪和反转剪切干涉仪，它们的波前剪切基本形式如图5.2所示。有许多全面阐述这些干涉仪的文章（Murty，1967；Briers，1972；Fouéré and Malacara，1975）和书籍（Bryngdahl，1965；Steel，1966；Baird and Hanes，1967）。径向剪切干涉仪产生两个相干波前，这两个波前的畸变相同，但其中一个波前相对另一个有收缩或者放大。旋转剪切干涉仪产生两个完全相同的波前，其中一个波前相对于另一个产生了旋转。反转剪切干涉仪产生两个波前，以直径为对称轴，一个波前上的畸变与另一波前上的畸变相对称。

为了对这些剪切干涉进行分析，假定波前函数的一般形式为

$$W(\rho,\theta) = \sum_{n=0}^{k} \sum_{l=0}^{n} \rho^{n}(a_{nl}\cos l\theta + b_{nl}\sin l\theta) \tag{5.1}$$

其中，n 和 l 是给定的（n 和 l 具有相同的奇偶性），通常 $l \leqslant n$。

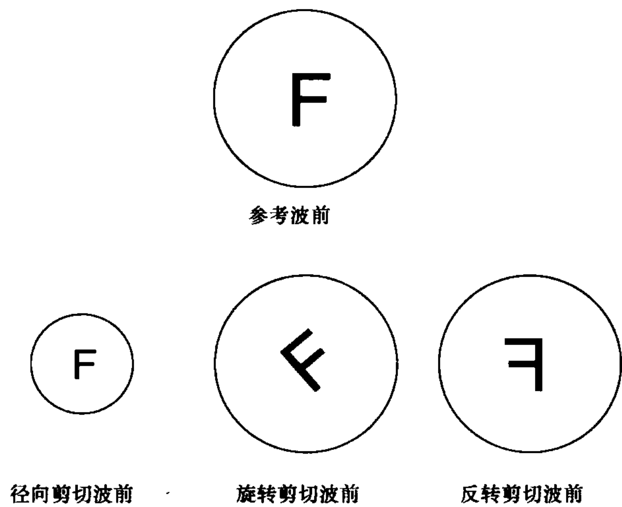


图5.2 两个波前之间三种可能的剪切方式

5.2 径向剪切干涉仪

径向剪切干涉仪的基本剪切形式如图5.3所示。一个波前相对另一个波前有收缩或者放大。干涉仪可以想象成一个光学系统，该光学系统对位于A的物体在A'位置成了两个放大率不同的像。如果能够避免出现离焦的话，两个像是重合在A位置的。

在第2章中关于泰曼-格林干涉仪中讨论过，所分析的干涉图样必须是被测系统出瞳的像，尤其当波前相对于球面形状偏离很大的时候。如果波前是近似球面的，这个条件则不必要。在径向剪切干涉仪中，两个波前均是畸变波前。这样，干涉图样中的两个波前均必须是瞳面的像。当剪切量很大的时候，仅较小的那个波前需要是系统出瞳的像。幸运的是，这个条件经常可以满足，因为如斯迪尔（Steel，1984）所描述的，径向剪切干涉仪原理示意图如图5.3中所示，所有的径向剪切干涉仪都有第二对共轭点B和B'，并且与像A和A'具有相同的剪切比率。这样，理论上被测系统的出瞳必须位于B，而干涉图样必须在B'位置分析。

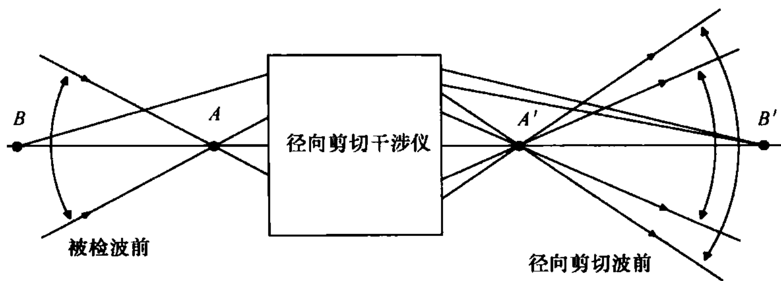


图5.3 径向剪切干涉仪原理示意图

斯迪尔（Steel，1984）还证明过，将光束方向反转，还可以得到一个相同剪切量的径向剪切干涉仪。这样，任何一个系统均可以在四种方式下产生相同的剪切量。

当剪切量很大时，这些干涉仪能够直接给出波前畸变。但即使剪切量很小时，这些干涉

仪的数据也比横向剪切干涉仪易于理解，并且，相比横向剪切干涉仪，它们能够提供所有方向上的信息，而不只是一个方向上的。这样，只需要一个干涉图样就够了。哈瑞哈兰（Hariharan，1988）曾经将径向剪切干涉仪和横向剪切干涉仪进行了详细的对比。

径向剪切干涉仪由于在检验较高非球面度的波前时，条纹数目较少、灵敏度较低，而成为长波长或者双波长干涉测量的一种替代方法。

当被测表面有中心孔时，剪切量必须小一些，否则两个波前中较小的那个将会落在较大的那个波前的中心孔上。较小的剪切量降低了灵敏度，但可以采用相移技术来补偿这一不足（Hariharan et al.，1986）。

假定一个波前被放大，则两个波前的直径之比 R 为

$$R=\frac{\rho}{\rho_e} \tag{5.2}$$

式中，ρ 为干涉图中某点的径向距离与未放大（或较小的）波前的最大半径之比；ρ_e 为同一径向距离与被放大（或较大的）波前的最大半径之比。

这样，较大的（未收缩的或者经放大了的）那个波前的畸变由式（5.1）表示，较小的（未放大的或者经收缩了的）波前的畸变为

$$W(\rho,\theta)=\sum_{n=0}^{k}\sum_{l=0}^{n}R^n\rho^n(a_{nl}\cos l\theta+b_{nl}\sin l\theta) \tag{5.3}$$

这样，干涉图方程可以由光程差 OPD 表示

$$OPD(\rho,\theta)=W(\rho,\theta)-W(R\rho,\theta)=\sum_{n=0}^{k}\sum_{l=0}^{n}\rho^n(1-R^n)(a_{nl}\cos l\theta+b_{nl}\sin l\theta) \tag{5.4}$$

径向剪切干涉仪与泰曼-格林干涉仪的灵敏度之比由式（5.5）给出

$$\sigma=\frac{\mathrm{d}OPD(\rho,\theta)/\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}W(\rho,\theta)/\mathrm{d}\rho}=\frac{\sum_{n=0}^{k}\sum_{l=0}^{n}n\rho^{n-1}(1-R^n)(a_{nl}\cos l\theta+b_{nl}\sin l\theta)}{\sum_{n=0}^{k}\sum_{l=0}^{n}n\rho^{n-1}(a_{nl}\cos l\theta+b_{nl}\sin l\theta)} \tag{5.5}$$

但是如果只有一种像差（n，l），则相对灵敏度可表示为

$$\sigma_{n,l}=1-R^n \tag{5.6}$$

与某些像差对应的相对灵敏度曲线如图5.4中所示。可以看出，一个适中的等于0.5的有效径向剪切量 R，会给出非常高的相对灵敏度。当检验只有初级球差的非球面波前时，径向剪切干涉仪的灵敏度降低而动态范围增大，就等效于使用长波长光源。

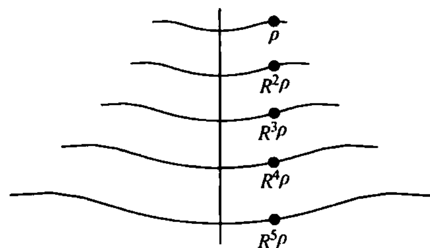


图5.4 波前迭代计算中的径向剪切波前示意图

如果两个波前中的一个是无限扩展的（$\rho_e\to\infty$ 和 $\rho\to0$），则会出现一种“爆发剪切”的径向剪切干涉仪。这个问题在共光路干涉仪的章节中已经做了研究。

5.2.1 径向剪切干涉图样的波前评估

径向剪切干涉图样基本上与第2章中研究的泰曼-格林干涉图样相同，尤其当仅存在纯初级像差时。我们特别感兴趣的是旋转对称波前，因为在检验天文反射镜这样的旋转对称非球面

时会得到旋转对称波前。马拉卡拉（Malacara，1974）和霍达等（Honda et al.，1987）介绍了在上述条件下由径向剪切干涉图样计算波前的流程。但是一般情况下，波前不是旋转对称的，甚至还会出现一些横向剪切。这样，可以采用以下三种可能方法中的一种来计算波前：

（1）第一种方法　假定波前足够平滑因而可以由多项式表示，则将 $OPD(\rho,\theta)$ 通过最小二乘拟合到径向剪切干涉图样，计算得出式（5.4）的 a_{nl}、b_{nl} 系数。

（2）另一种方法　这种方法是由科勒和加米兹（Kohlor and Gamiz，1986）所介绍的连续迭代方法。在第一次迭代中，参考波前（较大的那个波前）被认为是相当平的，对干涉图样进行采样并拟合到多项式。随着更好地评估参考波前，这个结果被用到第二次迭代过程中。这一流程会产生非常精确的结果，结果仅仅受限于采样间隔、读出噪声和波前拟合程度。

（3）第三种方法　第三种方法是基于一个迭代过程，由科勒等人（Kohno et al.，2000）提出，后来李等人（Li et al.，2002）也介绍了类似方法。由式（5.4）可以得到

$$
\begin{aligned}
OPD(\rho,\theta) &= W(\rho,\theta) - W(R\rho,\theta) \\
OPD(R\rho,\theta) &= W(R\rho,\theta) - W(R^2\rho,\theta) \\
&\cdots \\
OPD(R^n\rho,\theta) &= W(R^{n-1}\rho,\theta) - W(R^n\rho,\theta)
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

如果将所有这些项加在一起，可以写成

$$
W(\rho,\theta) = \sum_{i=1}^{n} OPD(R^i\rho,\theta) - W(R^n\rho,\theta) \tag{5.8}
$$

如果迭代次数足够多，则最后一项会变成一个非常小的平面波前，其畸变可以当成零，如图5.5所示。图5.5为相对灵敏度 σ 对径向剪切量 R 的曲线图。这样，最后得到

$$
W(\rho,\theta) = \sum_{i=1}^{n} OPD(R^i\rho,\theta) \tag{5.9}
$$

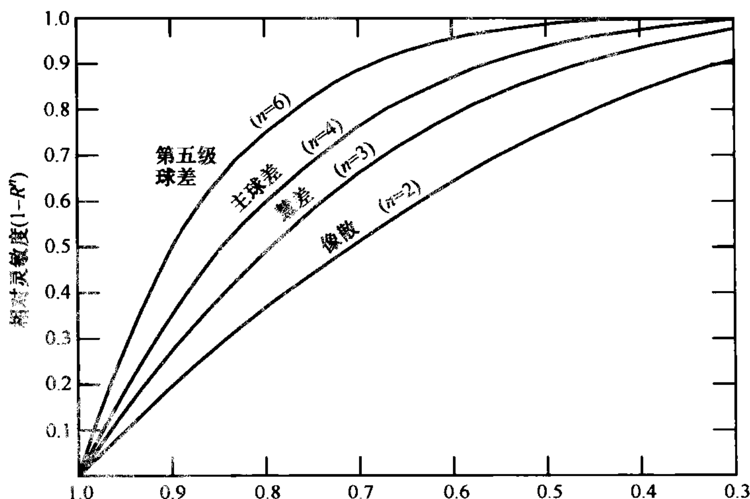


图5.5　相对灵敏度 σ 对径向剪切量 R 的曲线图

5.2.2　单光程径向剪切干涉仪

在这种干涉仪中，光线只通过仪器一次并产生两个径向剪切的干涉波前，如图5.3所示。如果干涉仪照明用的是小的圆形扩展光源，则波前上任意两点间的相干度 g_{12} 由式

(5.10) 给出 (Hariharan and Sen, 1961a; Murty, 1964b)

$$g_{12}=\frac{2J_1[(2\pi/\lambda)\alpha d]}{(2\pi/\lambda)\alpha d} \tag{5.10}$$

式中，2α 为由被测波前处看到的光源角直径；d 为同一波前上两点间的距离。

在径向剪切干涉仪中，在干涉图上某点产生干涉的波前上两点间的距离 d 可证明为

$$d=\rho'-\rho''=\rho'(1-R) \tag{5.11}$$

由此得到这些点对的相干度 (Hariharan and Sen, 1961a)

$$g_{12}=\frac{2J_1[(2\pi/\lambda)(1-R)\rho'\alpha]}{(2\pi/\lambda)(1-R)\rho'\alpha} \tag{5.12}$$

因为干涉条纹的可见度正比于 g_{12}，所以得到的是如图 5.6 所示的干涉条纹。当 $J_1(x)$ 的自变量 x 等于 1.22π 时，出现第一个可见度最小的值。因此，为了在整个干涉图上得到好的可见度，从波前处（干涉仪的入瞳处）看到的圆形光源的角半径 α 必须小于式 (5.13) 所给定的值

$$\alpha\leqslant\frac{1.22\lambda}{(1-R)D} \tag{5.13}$$

式中，D 为入瞳直径。

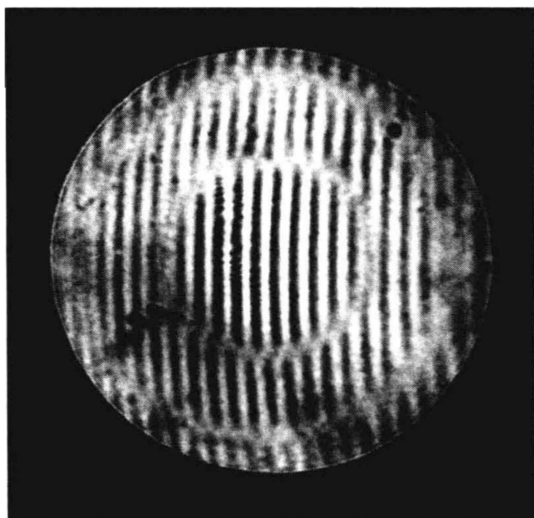


图 5.6　径向剪切干涉仪中用大尺寸光源时干涉条纹可见度的变化情况
（哈瑞哈兰和森 (Hariharan and Sen, 1961a)）

在径向剪切干涉仪中，如果两支相干光路的光程中涉及相同的光学零件和空气程时，则可以说该干涉仪对光源的非单色性（宽带波长）是补偿的。本节要讨论的就是这种干涉仪。

布朗 (Brown, 1959) 首先对径向剪切干涉仪进行了研究，他描述了如图 5.7 所示的仪器 (Brown, 1962)。这个仪器基本上是一个雅明干涉仪，但用的是会聚光，并在其中的一支光路中放了一块小弯月透镜，在另一支光路中放了一块平行补偿板。

另一种早期的径向剪切干涉仪由哈瑞哈兰和森 (Hariharan and Sen, 1961b) 设计，如图 5.8 所示。它由一块平行平面分光镜 P 和两块平面镜 M_1 和 M_2 组成。径向剪切是由透镜 L_1 和 L_2 产生的，这两个透镜安装在使它们的焦点与分光镜的分光面重合的位置上。当两个透镜的焦距 f_1 和 f_2 不同时 ($f_2>f_1$)，就产生径向剪切，剪切量由式 (5.14) 给定

$$R=\frac{f_1}{f_2} \tag{5.14}$$

这两个透镜可用一个透镜代替，但使用两个透镜有利于消除透镜产生的像差。

只有当两束光的辐照度相同时，可见度才等于 1。但由于两束光的扩展程度不同，所以只有在分光镜的反射系数 R 与透射系数 F 之比满足下面的条件时才可能实现

$$\frac{R}{F}=\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 \tag{5.15}$$

哈瑞哈兰和森 (Hariharan and Sen 1962) 曾成功地应用这种干涉仪检验过显微物镜。

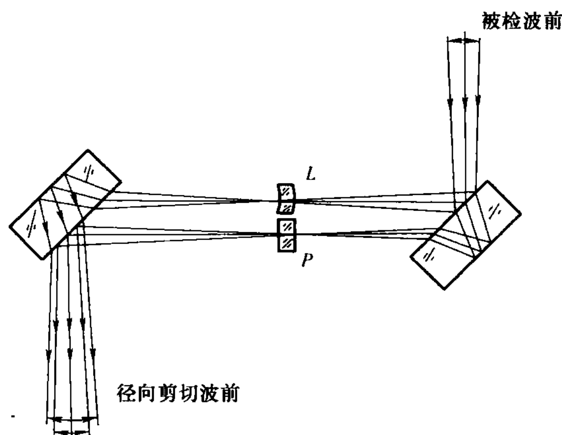


图 5.7　布朗设计的径向剪切干涉仪

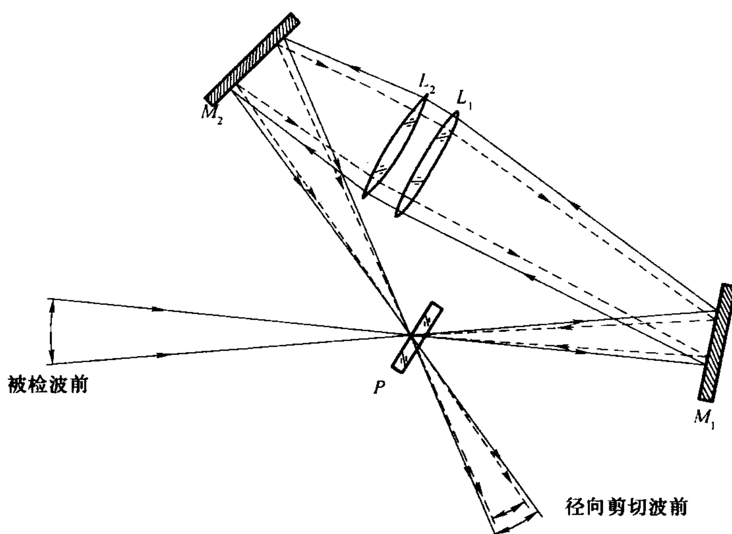


图 5.8　哈瑞哈兰和森设计的径向剪切干涉仪

默迪（Murty，1964a）曾提出过几种用来产生径向剪切的装置。其中一个是在马赫-泽德干涉仪的基础上，在每支光臂中分别加入了一个望远系统 S_1 和 S_2，如图 5.9 所示。这时有效径向剪切量 F 为 $1/M^2$，M 是单个望远镜的放大率。

另一种装置是循环式径向剪切干涉仪，如图 5.10 所示。它与哈里哈兰和森设计的干涉仪相似，但是进入干涉仪的光束必须是准直光束。

默迪（Murty，1964a）提出过一种很实用、很有趣的干涉仪，利用一个半球形的透镜使数值孔径缩小或扩大，如图 5.11 所示。利用这个原理和基本的循环光路形式，他设计了如图 5.12 和图 5.13 所示的干涉仪。第二个干涉仪中的半球形腔体可以是抽空的，也可以是充入折射液的，以获得所需的径向剪切量。布兰达尔（Bryngdahl，1970、1971）还提出过若干很不寻常的、带有阶梯形不连续波前的径向剪切干涉仪。

5.2.3　双光程径向剪切干涉仪

双光程径向剪切干涉仪的原理框图如图 5.14 所示。我们需要回顾一下图 5.3 所示的单光

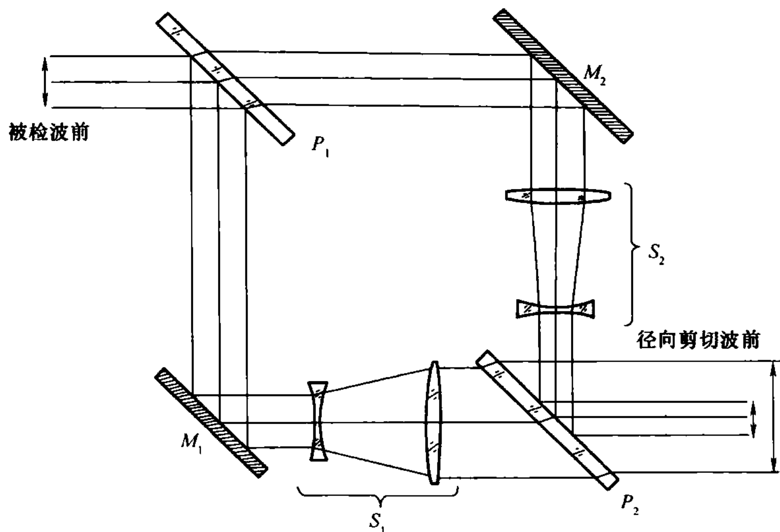


图 5.9 马赫-泽德干涉仪中用两个望远系统来产生径向剪切

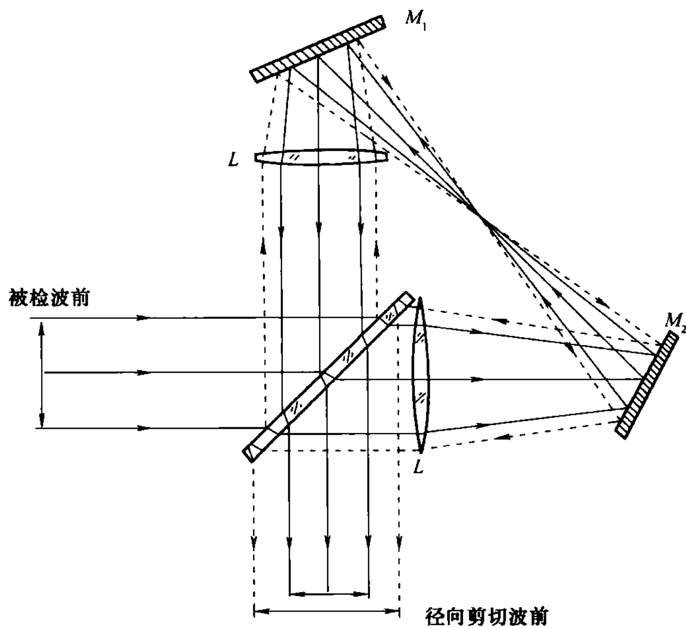


图 5.10 平行光循环式径向剪切干涉仪

程干涉仪，这种干涉仪产生两个干涉图样，其中一个干涉图样是由穿过干涉仪的光束形成的，另一个则是由干涉仪反射光束形成，这样可保持总能量不变。如果在双光程干涉仪中出现反射干涉图样，则观察到的干涉图样会非常复杂，因为这时会是四支反射光束而不是两支光束相互干涉。如果照明被检系统的两个剪切干涉波前在第一次通过仪器后互不干涉，就可以避免这一麻烦。如果这两个波前是由正交偏振光产生但仍然是彼此相干的话，则可以实现这一点。如布朗（Brown，1959）和斯迪尔（Steel，1965）所指出，在双光程干涉仪中对空间相干性的要求大大降低了，因为基本上可以由光源尺寸进行补偿。虽然光源表面不能做得太大——只是单光程干涉仪中的三倍左右（Brown，1959）——但这就能多提供约十倍的光。

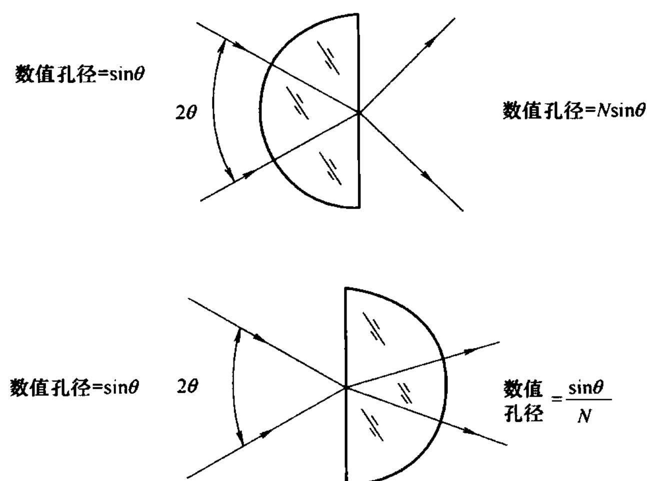


图 5.11 半球形透镜使数值孔径缩小或扩大

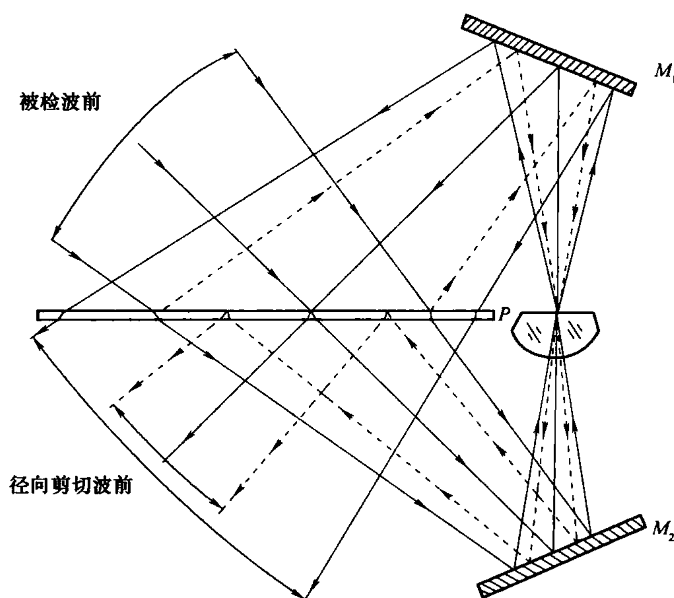


图 5.12 默迪设计的循环径向剪切干涉仪

斯迪尔（Steel，1965）设计了这种类型的两个干涉仪用于检验显微物镜，其中一个如图 5.15 所示。在这种干涉仪中，径向剪切由两个双折射系统产生，每个双折射系统都是由两块方解石透镜组成，它们位于两块玻璃透镜之间。玻璃选用肖特 Lak Ⅱ，与方解石的寻常光折射率相匹配，并校正透镜的色差。方解石透镜被设计成偏心差很小、曲率半径相等的双凹透镜，用从中间平切为两半。这两半透镜的晶轴成 90°。在两半透镜之间用一个半波片将偏振面转过 90°，使前一半透镜中的寻常光在后一半透镜中仍为寻常光。为两个双折射系统选择适当的相对方向，使一个系统中的寻常光在第二个系统中变为非常光，反之亦然。

两个双折射系统应调整到满足下列条件：①两个径向剪切波前的表面曲率中心位于距显微物镜适当距离（16cm）处；②整个双折射系统的焦平面与显微物镜的出瞳重合，

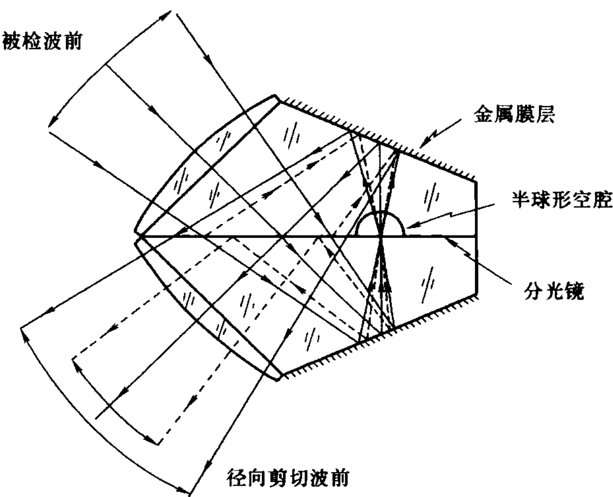


图 5.13 默迪设计的实心径向剪切干涉仪

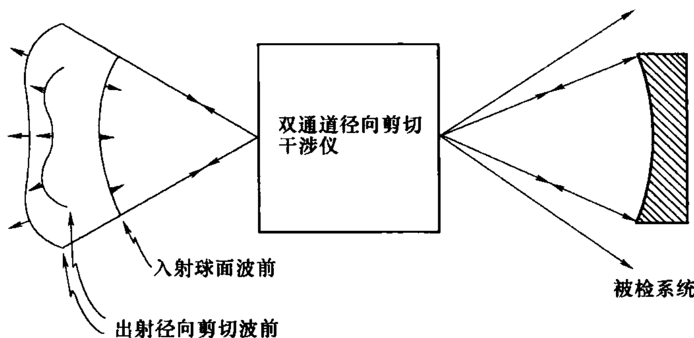


图 5.14 双光程径向剪切干涉仪

显微物镜的出瞳也同时与其后焦面重合。由于第 2 章中所述的理由，在显微物镜前面用了一个戴森（Dyson）系统。由于干涉条纹必须是在物镜出瞳处探测，因此用了一个望远镜来观察条纹。

斯迪尔（Steel，1966）设计的第二种双光程径向剪切干涉仪如图 5.16 所示，除了用一个低倍显微物镜中的单透镜代替两个透镜外，其他与哈瑞哈兰和森设计的干涉仪类似。

偏振分光镜 1 和 $\lambda/4$ 波片组成一个圆偏振光源。当光线在被检系统上反射并由仪器返回时，圆偏振光的旋转方向倒转了（假定是个理想系统）。反射光通过棱镜到达照相机，如果被检系统不理想，则两束偏振方向互相垂直并存在径向剪切的光束间将产生光程差。这样，返回的光束将不再是圆偏振光而是椭圆偏振光，在照相机上将产生暗带（条纹）。

5.2.4 激光径向剪切干涉仪

迄今为止我们所讨论的径向剪切干涉仪都是具有白光补偿并且是等光程的。在使用普通光源时，这是必要的，但在使用激光光源时，两支光束则不必有相同的光程。

激光的使用使得干涉仪的设计大大简化，但也引入了一些新的问题。主要问题是，在预期的干涉图上出现了许多由透镜和玻璃表面反射而产生的杂乱条纹。由于激光的相干长度长，所以所有反射光都产生干涉条纹。

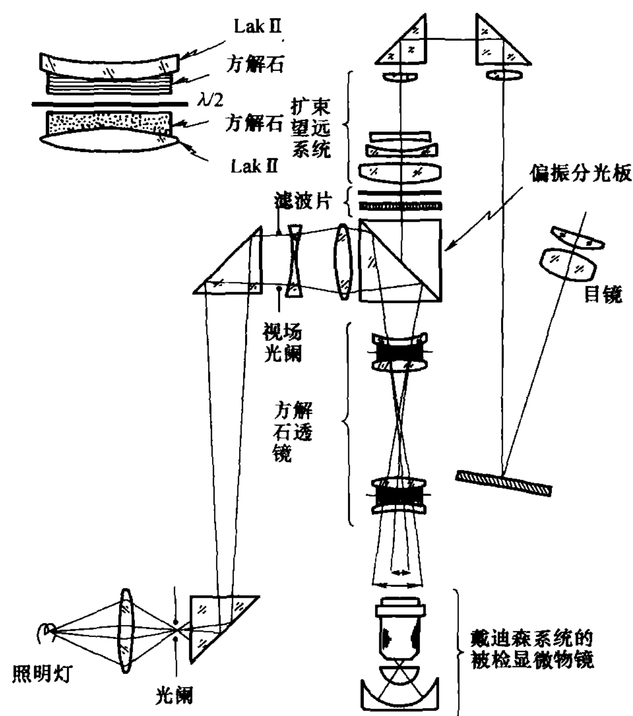


图5.15　斯迪尔设计用来检验显微物镜的双光程径向剪切干涉仪

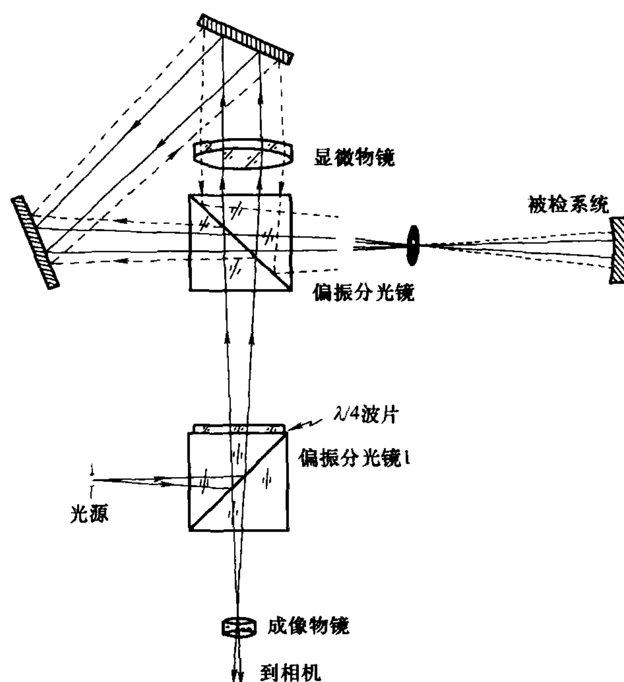


图5.16　斯迪尔设计的双光程径向剪切干涉仪

第一台激光径向剪切干涉仪可能是由桑姆（Som，1970）设计的，如图5.17所示。但是，正如默迪和舒克拉（Murty and Shukla，1973）指出的，由于两个波前的虚发光点 P_1 和 P_2 不重合，使这个设计存在很大的问题。因为，一个理想的系统将产生一组类似牛顿环的同心圆条纹，而用这样的条纹作为基准来分析干涉图是很困难的。默迪指出，为了便于分析，理想的被检光学系统应当产生一个无条纹的或有一组直条纹的干涉图样。

为了解决这一问题，默迪和舒克拉（Murty and Shukla，1973）改进了索姆的设计，提出了如图5.18所示的干涉仪方案，其中一个反射面是球面。如果 a 和 b 分别为凹面镜和平面镜到分光面中心的距离，则反射面的曲率半径 r 为

$$r=\frac{(2b-a)a}{b-a} \tag{5.16}$$

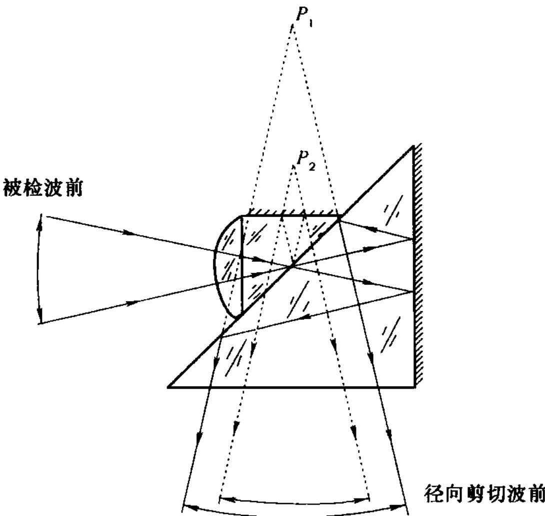


图5.17 桑姆设计的激光径向剪切干涉仪

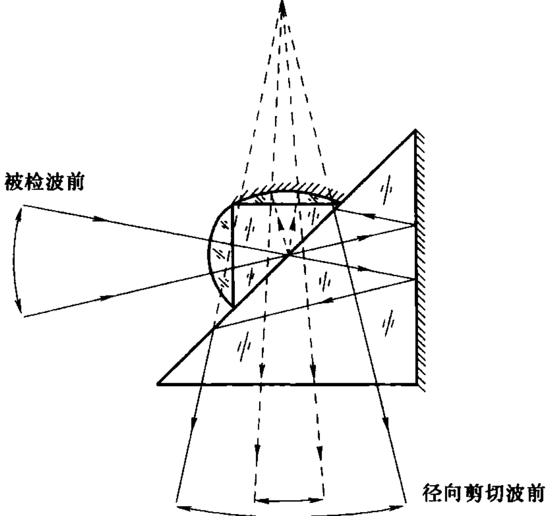


图5.18 默迪设计的激光径向剪切干涉仪

有效径向剪切量 R 为

$$R=\frac{a}{2b-a} \tag{5.17}$$

这个干涉仪可以很容易用一个实心的立方分光棱镜制成。反射面最好是旋转抛物面，因为球面会引入小量的球差。默迪等（Murty et al.，1975）指出，波前球差由式（5.18）给出

$$OPD=\frac{-Na^4b^2\alpha^4}{(b-a)^2r^3} \tag{5.18}$$

式中，N 为玻璃的折射率；α 为数值孔径。

因此必须尽可能减小 α 值。如果数值孔径很小，可以得到很高的精度。

马拉卡拉等（Malacara et al.，1975）设计了一个激光径向剪切干涉仪来会聚或发散光束的，其中用了一个平凹棱镜玻璃板。与刚才讨论的干涉仪类似，这种干涉仪在产生一定的径向剪切量时，也会同时产生一些横向剪切量。

哈瑞哈兰（Hariharan，1984a、1984b）等曾使用以默迪和舒克拉（Murty and Shukla，1973）设计的干涉仪为基础的仪器，来进行相移干涉检验。

另一种早期的激光径向剪切干涉仪由斯迪尔（Steel，1970）设计，如图5.19所示。其中，两支光束在一个棱镜的两个不同面上被分开并重新合在一起，这样就消除了分光镜第二面上产生多余干涉条纹的可能性。其中一支光束的直径用一个5.5倍的望远镜缩小。玻璃球带来的好处是无需相对光束作调整，缺点是会产生球差。必须指出，这种干涉仪在产生径向剪切的同时，由于一个波前相对另一个波前反转，因此也会产生反转剪切量。

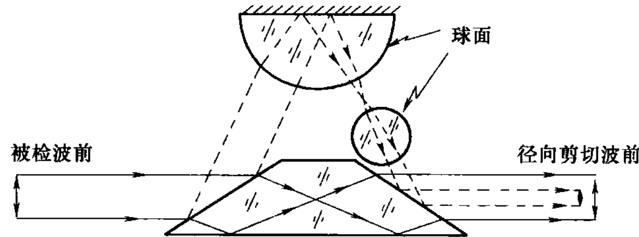


图5.19 斯迪尔设计的激光径向剪切干涉仪

舒克拉等（Shukla et al.，1992）描述过另外一种激光轴上径向剪切干涉仪，如图5.20所示。它由一个立方分光棱镜构成，该分光棱镜的两个端面上或者经研磨、抛光成两个平凸透镜，或者是由两个平凸透镜胶合上去。这两个凸面分别位于距分光面的中心不同距离处，以保证它们的曲率中心均位于这一中心点上。很容易可以看出，径向剪切量即等于两个曲率半径之比。因为表面为球面，因此会有一些球差被引入，但其大小可以控制在一个合理的限度之内。有意思的是，两支光束中的一支在分光镜上反射两次并透射一次，而另一支光束则只透射一次。这样，两支光束的强度将会大大不同。但是，因为较弱的那支光束口径较小，其强度差异因此而得到部分补偿。舒克拉等（Shukla et al.，1992）还曾描述过其他几种工作原理相同的径向剪切干涉仪。

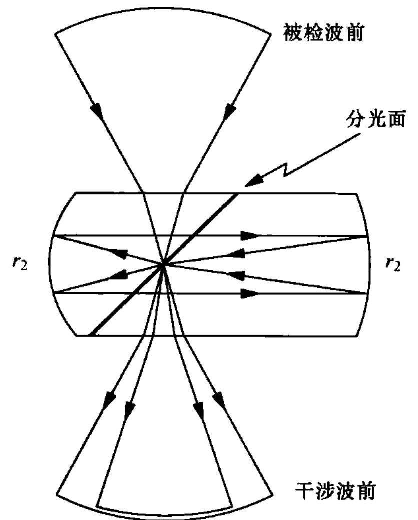


图5.20 激光轴上径向剪切干涉仪

图5.21所示为一种非常简单的全息径向剪切干涉仪，是由福尔和马拉卡拉（Fouéré and Malacara，1974）及福尔（Fouéré，1974）设计。制作这种干涉仪，第一步是通过拍摄会聚波前与平面波前的干涉图来制作一个盖伯（Gabor）波带片。这个波带片的数值孔径即为干涉仪所接收的数值孔径。第二步是用一束会聚波前照明盖伯波带片。如果波前的会聚中心恰好与波带片的焦点重合，则出射的+1级衍射光束为平行光束。在波带片后面放一个照相底片并进行曝光，将照相底片显影后得到全息图。会聚光束（0级）可作为参考光，衍射平行光束（+1级）可当作物光。

现在看一下图5.21。如果将全息图精确地放回到原来的位置上，通过再现将得到一束平行光束（0，1）。入射的平行光束通过全息图后将变为平行光束（1，0）。因此，这两束光线平行出射，但具有不同的放大率，这样就构成了一个径向剪切干涉仪。用一个透镜和位于透镜焦点处的针孔滤掉所有多余的衍射光束。可以证明，玻璃板上的所有缺陷都自动消除掉了。在这种干涉仪中，分别横向和纵向微微移动盖伯波带片，很容易就可以产生倾斜和离焦。图5.22所示为用这种干涉仪得到的一幅干涉图样。

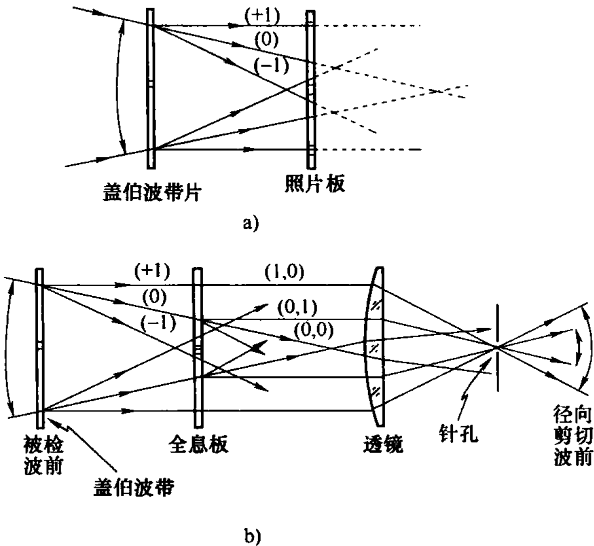


图 5.21 全息径向剪切干涉仪

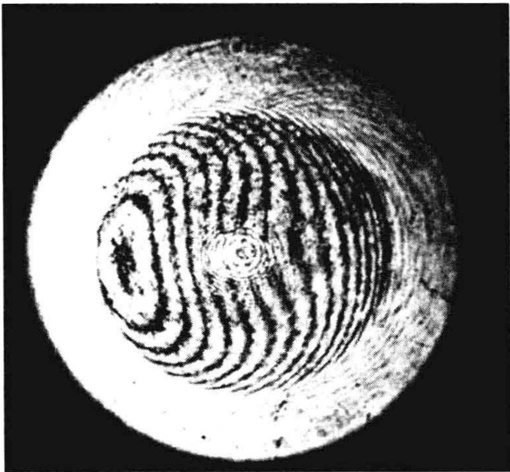


图 5.22 全息干涉仪上得到的干涉图样（Fouéré and Malacara，1974）

为了在产生旋转剪切的同时形成球面出射波前，而不是原来的平面波前，还有人提出了对该双波带片基本结构的几种改进方案。

5.2.5 厚透镜径向剪切干涉仪

斯迪尔（1975）及万志（Wanzhi，1984）描述了一种有趣的干涉仪，称为厚透镜径向剪切干涉仪。图 5.23 给出了几种厚透镜激光径向剪切干涉仪的设计方案。一支光束为穿过厚透镜的直接透射光束。另一支光束由两次内部反射得到，第一次反射是在透镜的第二表面上，第二次反射是在透镜的第一表面上。如果直接透射光束的辐照度为 I_1，则内部反射光束的辐照度 I_2 由式（5.19）给出

$$I_2 = \frac{R_1 R_2}{S^2} I_1 \tag{5.19}$$

其中，S 是由内部反射光束直径和直接透射光束直径之比所确定的径向剪切量。当$R_1R_2 = S^2$时，可以得到最大的条纹对比度。只有当 $S<1$ 时，或者说只有当直接透射光束口径最小时，这才是可能的。斯迪尔和万志建议将条纹对比度控制在较低的0.8量级上，以减少因二次内部反射而造成的高次鬼像干扰。不幸的是，这些反射光束会到达同一个焦点，因而无法用空间滤波器来予以消除。

图5.23给出了几种厚透镜干涉仪的设计方案。第一种如图5.23a所示，既是径向剪切干涉仪，也是旋转剪切干涉仪；其余的则为纯径向剪切干涉仪。图5.23b中的干涉仪可以用来检验大口径平行光束。在图5.23b中的干涉仪中，直接透射光束的口径比反射光束要小。这样，条纹的对比度是无法控制的。图5.23e中出瞳位于远处的系统可以用在会聚光束中。

由万志（Wanzhi，1984）所描述的反射式径向剪切干涉仪，是厚透镜干涉仪的一个特例，它工作在反射模式下，如图5.24a和b所示。条纹对比度比透射系统中的要高得多。该玻璃间隔系统的唯一问题是剪切量是固定的。另一种选择方案是万志（Wanzhi，1985）所描述的空气间隔系统，如图5.24c所示。

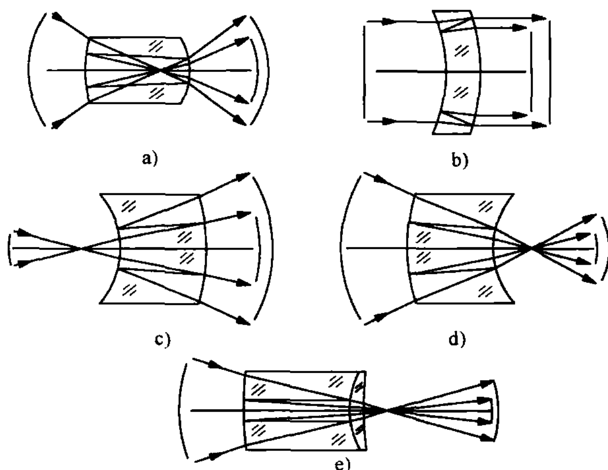


图5.23 几种厚透镜激光径向剪切干涉仪的设计方案

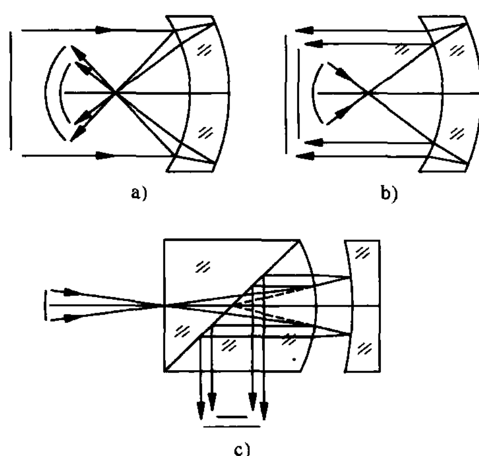


图5.24 几种反射式激光径向剪切干涉仪的设计方案

5.3 旋转剪切干涉仪

在旋转剪切干涉仪中，相同的波前相互干涉，但其中一个波前相对另一个波前绕着它们的共同光轴有一定角度的旋转。旋转剪切干涉仪对于检验和评价非对称像差（如彗差和像散等）非常有用。关于旋转剪切干涉图样的解读已经开发出了许多程序。例如，科里克夫等人（Golikov et al.，1981）就曾经介绍过一种使用柱坐标的方法。

设波前以 $W(\rho,\ \theta)$ 表示。旋转剪切干涉是一个波前相对另一个进行旋转，所产生的干涉图样由式（5.20）定义

$$OPD(\rho,\theta) = W\left(\rho,\theta-\frac{\phi}{2}\right) - W\left(\rho,\theta+\frac{\phi}{2}\right) \tag{5.20}$$

其中，ϕ 是一个波前相对另一个波前的旋转角度。如果以通用表达式（5.1）给出波前，则

得到

$$OPD(\rho,\theta) = \sum_{n=0}^{k}\sum_{l=0}^{n}\rho^n\left\{a_{nl}\left[\cos l\left(\theta-\frac{\phi}{2}\right)\right]-\cos l\left(\theta+\frac{\phi}{2}\right)+ b_{nl}\left[\sin l\left(\theta-\frac{\phi}{2}\right)-\sin l\left(\theta+\frac{\phi}{2}\right)\right]\right\} \tag{5.21}$$

其中，n 和 l 有相同的奇偶性。有意思的是，$l=0$ 时，所有项都消掉了，正如所料，旋转剪切干涉仪对旋转对称波前不敏感。这样，式（5.21）求和可以从 $n=l=1$ 开始。现在，假定像差是由一个轴对称光学系统产生，则得到的是关于 yz 子午平面对称的波前，因而所有的系数 b_{nl} 为零。于是

$$\begin{aligned} OPD(\rho,\theta) &= \sum_{n=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}\rho^n a_{nl}\left[\cos l\left(\theta-\frac{\phi}{2}\right)-\cos l\left(\theta+\frac{\phi}{2}\right)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}2\rho^n a_{nl}\sin l\theta\sin\frac{l\phi}{2} \end{aligned} \tag{5.22}$$

除了可以忽略的关于 x 轴的波前倾斜（$n=1$，$l=1$）之外，上述表达式中仅包含像散（$n=2$，$l=2$）和彗差（$n=3$，$l=1$）这两种初级像差，这样得到

$$OPD(\rho,\theta) = 2a_{22}\rho^2\sin 2\theta\sin\phi + 2a_{31}\rho^3\sin\theta\sin\frac{\phi}{2} \tag{5.23}$$

式（5.23）也可以写成

$$OPD(\rho,\theta) = 2a_{22}\rho^2\cos 2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\sin\phi + 2a_{31}\rho^3\cos 2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\phi}{2} \tag{5.24}$$

观察式（5.24）可以看出，旋转剪切干涉仪相对于泰曼-格林干涉仪的相对像散灵敏度 σ_{ast} 由式（5.25）给出（Murty and Hagerott，1966）

$$\sigma_{ast} = 2\sin\phi \tag{5.25}$$

同时，很重要的一点是，如图 5.25 所示，干涉图样相对泰曼-格林干涉图样有 45°的旋转，并且旋转剪切干涉仪对真正的离焦是不敏感的。当观察到的图样类似于泰曼-格林干涉仪在子午和弧矢焦点之间的中间焦点位置上所形成的干涉图样时，所处的位置即为所谓的焦点位置。

彗差的相对灵敏度 σ_{coma} 由式（5.26）给出（Murty and Hagerott，1966）

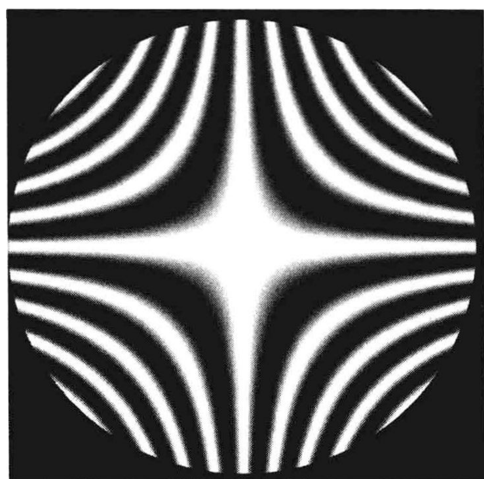
$$\sigma_{coma} = 2\sin\frac{\phi}{2} \tag{5.26}$$

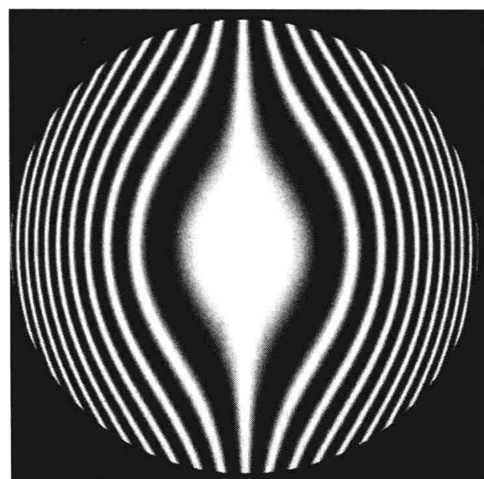
干涉图样相对泰曼-格林干涉仪旋转了 90°，如图 5.26 所示。此干涉图中没有离焦，也无法引入离焦。

像散和彗差的相对灵敏度如图 5.27 中所示。由图 5.27 可见，旋转剪切干涉仪对像散和彗差的探测能力取决于旋转剪切量 ϕ。由图 5.27 还可以看出，彗差可以在 $\phi=180°$处单独分离出来，而像散无论如何也无法单独分离出来。然而，用一个小平面镜使波前两次通过光学系统，就可以消除彗差而使像散加倍。这时，波前先到被检系统（凹面镜），然后到位于凹面镜曲率中心附近的小平面镜，再反射回去并穿过同一光路。

需要着重指出的是，当波前来回两次通过被检系统时，无论是波前的对称分量（$\cos\theta$ 的偶次方项）还是非对称分量（$\cos\theta$ 的奇次方项），其差值都是彼此独立的。为了分离出非对称分量，可使波前与其自身的像（完全相同，但有 180°的旋转）发生干涉，以得到两者之差。为了分离出对称分量，可将波前旋转 180°，然后使其再次通过被检光学系统，以使

对称型误差加倍而消除非对称型误差。这样就使得波前是与一个无像差波前发生干涉。哈瑞哈兰和森（Hariharan and Sen，1961c）曾在一个单独的装置中采用过这两个步骤，详细内容见本书第7章所述。


图5.25　最高灵敏度时旋转剪切干涉仪上的像散图样（$\phi=90°$，$a_{22}=2\lambda$）


图5.26　最高灵敏度时在旋转剪切干涉仪上的彗差图样（$\phi=180°$，$a_{31}=5\lambda$）

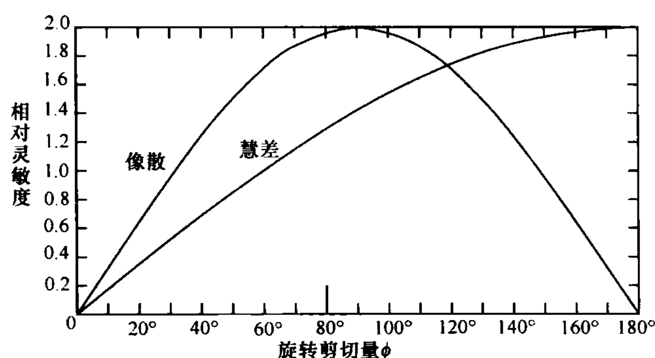


图5.27　旋转剪切干涉仪对像散和彗差的相对灵敏度

正如默迪和哈格罗特指出的，上述方法在检验带筋的轻质反射镜时是很有意义的。在抛光反射镜时，正对于筋上的表面总是低的，而筋与筋之间的表面则偏高。在旋转剪切干涉仪上，这种反射镜的像散（$n=2$，$l=m$）产生的光程差为

$$OPD=2\rho^{n}a_{nl}\sin m\theta\sin\frac{m\phi}{2} \tag{5.27}$$

其中，m 是支撑反射面的加强筋的条数。应当注意，n 和 m 都是奇数或都是偶数。最大相对灵敏度是2，出现在 $\phi=180°$ 的时候。图5.28所示为一块有四根加强筋的反射镜的干涉图。

5.3.1　光源大小未补偿的旋转剪切干涉仪

式（5.10）给出了角直径为 2α 的圆形均匀光源的相干度 g_{12}。这样，要得到好的条纹

对比度，旋转剪切干涉仪的针孔大小必须合适。如果波前上某点以角度 ϕ 发生剪切，则波前上两相干点之间的距离为

$$d = 2\rho\sin\frac{\phi}{2} \tag{5.28}$$

将此值代入式（5.10），得到

$$g_{12} = \frac{2J_1[(4\pi/\lambda)\alpha\rho\sin(\phi/2)]}{(4\pi/\lambda)\alpha\rho\sin(\phi/2)} \tag{5.29}$$

根据5.2.1节所述的理由，要在干涉图上得到好的对比度，针孔尺寸必须小于默迪和哈格罗特（1966）给出的值

$$\alpha \leqslant \frac{1.22\lambda}{2D\sin(\phi/2)} \tag{5.30}$$

其中，D 是干涉仪出瞳直径，光源的角直径 2α 正是从出瞳处量起的。

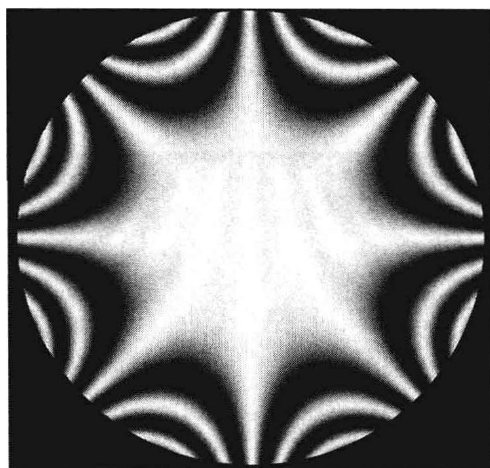


图5.28　一块有四根加强筋的反射镜的干涉图（$\phi = 45°$，$a_{24} = 4\lambda$）

默迪和哈格罗特也曾设计过图5.29所示的旋转剪切干涉仪。它是一个在两块玻璃板间装有两个完全相同的道威棱镜的雅明干涉仪。显微物镜 L_1 准直点光源发出的光，显微物镜 L_2 用来观察干涉图样。当其中一个道威棱镜转过 α 角时，一个波前就转过 2α 角。

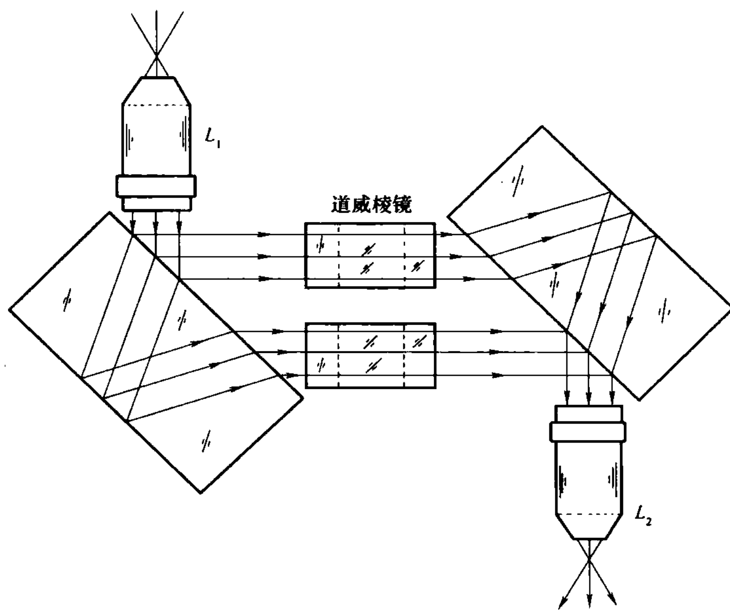


图5.29　默迪和哈格罗特设计的旋转剪切干涉仪

在采取某些措施之后，也可以将一个普通的泰曼-格林干涉仪改装成为旋转剪切干涉仪来检验发光波前。默迪（Murty，1964c）提出，在泰曼-格林干涉仪的一支光臂中用一个猫眼反射器或一个角锥棱镜代替反射镜，可以产生180°的旋转剪切量。阿米塔奇和洛曼（Armitage and Lohmann，1965）曾提出用两个屋脊棱镜作为转像棱镜来代替平面镜，当其中一个棱镜绕其光轴旋转 $\phi/2$ 时，旋转剪切量将改变 ϕ。阿米塔奇和洛曼设计的干涉仪如图

5.30所示。被检波前由透镜L_1准直，如果L_1是被检透镜，则使用一个针孔。透镜组L_2和L_3使位于L_1处的出瞳成像于观察屏上。为了得到好的相干性，两支光束的偏振状态必须完全相同，但当旋转的屋脊棱镜转过$\phi/2$时，偏振状态将随屋脊棱镜位置的改变而发生变化。为了解决这一问题，可以采用下述的偏振耦合法。在干涉仪的前后各放一个偏振方向都处在0°的偏振镜；两个1/4波片放在干涉仪主体和旋转的屋脊棱镜之间。其中一个1/4波片的光轴相对干涉仪主体固定成45°，另一个1/4波片的光轴相对屋脊棱镜的屋脊棱固定成45°。两个1/4波片之间的光线是圆偏振的，屋脊棱镜内的光线是线偏振的，并且偏振方向平行于屋脊棱。光线返回干涉仪主体时，仍恢复其原来的线偏振方向，与屋脊棱镜的旋转位置无关。

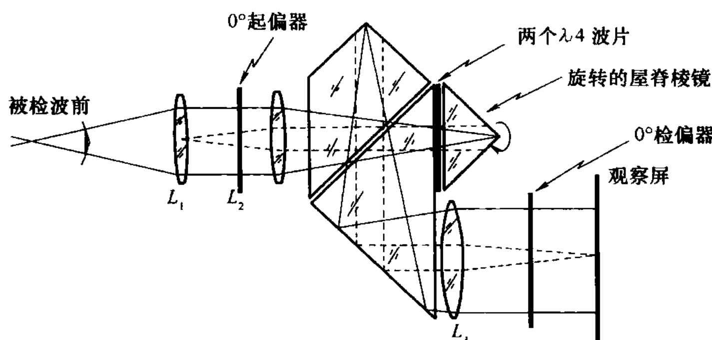


图5.30 阿米塔奇和洛曼设计的旋转剪切干涉仪

上面所描述的干涉仪存在一个问题，即因使用偏振片而导致了较大的光能量损失。罗迪尔等（Roddier et al.，1978、1989）在图5.31中所示的干涉仪上采取了一种替代方案。同阿米塔奇和洛曼的干涉仪一样，也使用两个屋脊棱镜，一个固定，另一个绕其光轴旋转。暂假定进入干涉仪的光线是线偏振的，其偏振平面平行于或垂直于固定屋脊棱镜的屋脊棱线。当旋转屋脊棱镜相对第一个棱镜转过一个角度时，可以将矢量分解为两个正交分量，一个分量平行、另一个分量则垂直于第二个棱镜的屋脊棱线。一般情况下，这两个分量因反射所导致的相移是不同的。因此，离开棱镜再合成时，将会形成与入射光不同的偏振态。保留入射偏振态的唯一方法是使两个分量产生的相移正好差180°。两次反射使垂直于棱镜的屋脊棱线的矢量自棱镜中反方向出来，所产生的最终效果是线偏振态和其方向均保持不变。

两个矢量分量因反射产生的总的相移为74°，因此还需要约106°的额外相移。可以在旋转棱镜的入瞳面上（斜面）胶合一个带有53°相位延迟的相位板来实现，相位板的主轴分别平行于和垂直于屋脊棱线。

一开始曾假定进入干涉仪的光线是线偏振的，偏振平面既可以垂直于、也可以平行于固定棱镜的屋脊棱。如果光线不存在偏振，与固定屋脊棱平行的分量和垂直的分量将会产生不同的干涉图样。只有当这两个分量自固定棱镜出来时与进入棱镜

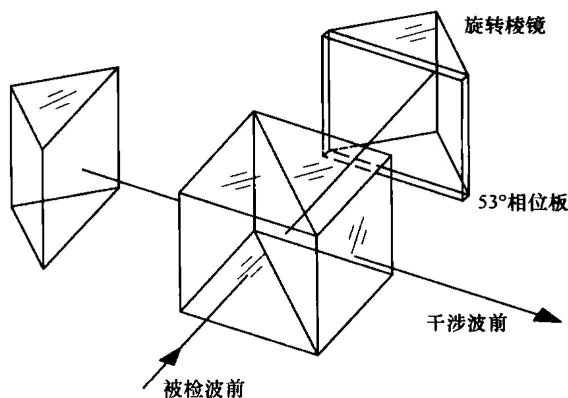


图5.31 带有相位补偿的旋转剪切干涉仪

时有相同的相位，才会产生相同的干涉图样。通过在固定棱镜上胶合另一个相位板可以实现这一点，这样就可以使用非偏振光了。

阿米塔奇和洛曼（Armitage and Lohmann，1965）提出的另一种干涉仪是以萨格纳克（Sagnac）或循环干涉仪为基础的。其中，旋转剪切角 ϕ 由位于干涉仪闭合光路中的道威棱镜旋转 $\phi/4$ 产生。

虽然并不是有意要作为旋转剪切干涉仪，但森和庞特姆贝克（Sen and Puntambekar，1965、1966）设计的反转式菲佐干涉仪还是产生了 180°的旋转剪切。这种干涉仪及其在球面检验中的应用森和庞特姆贝克（1971）将在第 7 章中介绍。

5.3.2　光源补偿的旋转剪切干涉仪

如上节所述，由于相干性方面的原因，一般是不能使用大尺寸光源的。要想在使用大尺寸光源的情况下得到好的条纹对比度，唯一的方法是使光源的两个像在位置和方向上都重合。同时，被检对象的两个像必须是相互剪切的。一个解决办法是使两个波前在到达被检对象时就发生剪切，并且与经过被检对象后产生的主剪切大小相等方向相反。这两个剪切就相干性而言彼此相消，只有第二个剪切才提供被检对象的信息。这些想法与之前对径向剪切干涉仪的想法一样，并且在阿米塔奇和洛曼（Armitage and Lohmann，1965）设计的某些补偿干涉仪中还得到了进一步的发展。他们设计的系统主要由两个完全相同的干涉仪组成，这两个干涉仪一个挨着另一个对称放置，被检对象就放在它们之间。

如前面所解释的，在双光路结构中旋转剪切干涉仪也能得到同样的补偿。

5.4　反转剪切干涉仪

如图 5.32 所示，将一波前相对于反转轴反转，其中从 P 点变为 P' 点，变换方程为

$$\rho'\sin\theta' = \rho\sin\theta \tag{5.31}$$

和

$$\rho'\cos\theta' = S - \rho\cos\theta \tag{5.32}$$

容易看出，关于一条任意轴的反转相当于对 x 轴的反转再加上一个 y 方向的横向剪切量。如果波前用式（5.1）表示，则反转剪切干涉仪中的干涉图由式（5.33）给出

$$OPD = W(\rho,\theta) - W(\rho',\theta') \tag{5.33}$$

考虑一个只含有下列初级像差的波前

$$W(\rho,\theta) = a_{20}\rho^2 + a_{40}\rho^4 + a_{31}\rho^3\cos\theta + a_{22}\rho^2\cos2\theta + a_{11}\rho\cos\theta \tag{5.34}$$

式中，各像差分别代表离焦、球差、彗差、像散和对 x 轴的倾斜。

由此可以看出，如果反转轴与 x 轴（$S=0$）重合，则反转剪切干涉仪对例如离焦（a_{20}）、球差（a_{40}）和像散（a_{22}）等对称像差是不起作用的。当反转轴移动 $S/2$ 时，如图 5.32 所示，这种干涉仪的干涉图和对称像差的灵敏度与剪切量为 S 的横向剪切干涉仪是完全相同的。

$$OPD = 2a_{31}\rho^3\cos\theta + 2a_{11}\rho\cos\theta \tag{5.35}$$

因此，不存在横向剪切时（$S=0$），反转剪切干涉仪对彗差和绕 x 轴的倾斜等非对称像差的相对灵敏度等于 2。

如果干涉仪对光源大小是未补偿的，即反转不仅影响被检对象而且还影响光源，则干涉条纹的对比度由式（5.10）给出（Murty，1964c）。任意两相干点的距离为（$2\rho\cos\theta - S$），

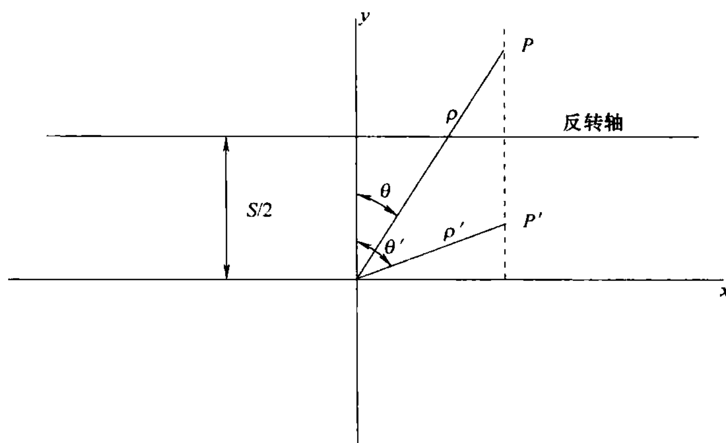


图 5.32 波前的反转

因此其最大值 d 为

$$d = D + S \tag{5.36}$$

式中，D 为波前直径。

于是，针孔的最大角直径 α 为

$$\alpha = \frac{1.22\lambda}{D + S} \tag{5.37}$$

这种类型的未补偿反转剪切干涉仪以泰曼-格林干涉仪为代表，其中一支光臂中的直角棱镜是作为屋脊棱镜使用。

下面将介绍三种不同的棱镜式反转剪切干涉仪。它们都是科斯特尔斯（Kosters，1934）发明的基本棱镜系统的变形。克斯特尔指出，把两个精确相似的棱镜按他所述的方法任意组合都可以组成干涉仪，只要棱镜公共面的邻角之一精确地等于公共面对角的一半即可。

盖茨（Gates，1955b）提出的两个系统之一如图 5.33 所示，它以克斯特尔棱（Kosters）镜为基础，使用了两个 30°-60°-90°棱镜。反转轴线由分光平面和光学系统的交线所决定。如果反转轴与被检光学系统的直径不重合，就产生横向剪切量 S。倾斜被检反射镜可以控制干涉条纹的疏密。如果在被检透镜后面加一块自准直平面镜，则可以检验透镜。

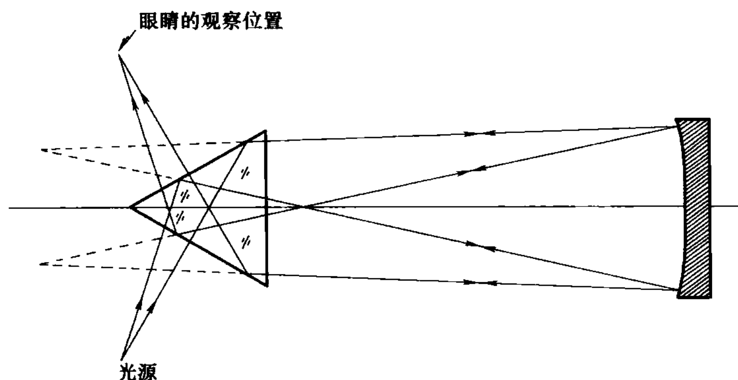


图 5.33 盖茨设计的反转剪切干涉仪（以克斯特尔棱镜为基础）

因为两支光程精确相等，这种干涉仪是白光补偿的。对光源大小也是补偿的，但正如盖茨指出的，事实上由于制作中的微小误差，光源的直径限于 0.5mm 左右。

利用相同的原理，盖茨（Gates，1955a）还建议使用常用的立方分光棱镜，如图 5.34 所示。但是这种干涉仪有个缺点，即只能检验小数值孔径的光学系统。

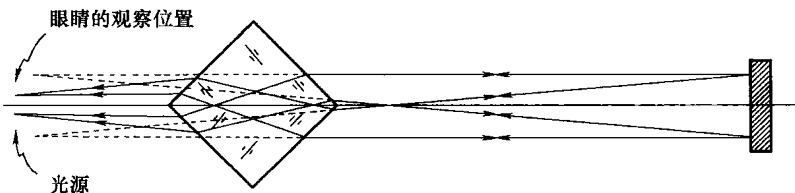


图 5.34　盖茨设计的反转剪切干涉仪（使用常用的立方分光棱镜）

上述盖茨提出的两种仪器有两个共同的缺点：①虚光源和像并不重合，而是有一个小的距离；②在棱镜的出射面上会引入某些像差。在图 5.35 所示的由桑德斯（Saunders，1955）设计的棱镜系统中，已不存在这些缺点。这种仪器在光学系统检验中的应用，桑德斯设计的反转剪切干涉仪如图 5.36 所示。此外，这种干涉仪在计量工作中还有广泛的用途（Saunders，1960；Strong，1958）。桑德斯（1957）曾详细介绍过这种干涉仪的设计方法。

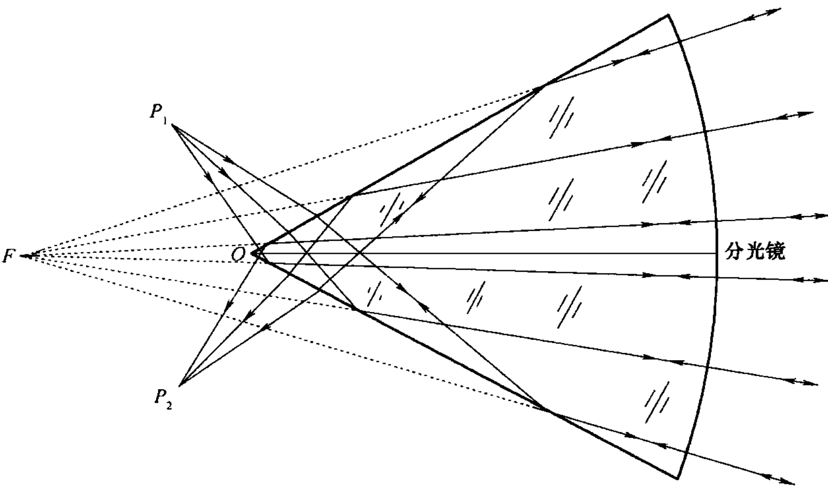


图 5.35　由桑德斯设计的棱镜系统

另一种用于检验透镜的有价值的反转剪切干涉仪是由瓦特兹曼（Waetzman，1912）及后来的默迪（Murty，1964b）提出的，如图 5.37 所示。它能产生反转剪切和横向剪切，默迪（Murty，1964b）、森和庞特姆贝克（Sen and Puntambekar，1966）还曾用这种仪器检验过直角棱镜和角锥棱镜。由于光束两次通过透镜，非对称像差被抵消掉了，反转干涉仪对对称像差也不起作用。既然对称像差只能用横向剪切方法检测，将这种干涉仪看做是横向剪切干涉仪可能更为适当。

帕迪曼等（Partiban et al.，1987、1988）曾证明过，利用全息技术也可以建立横向剪切干涉仪。

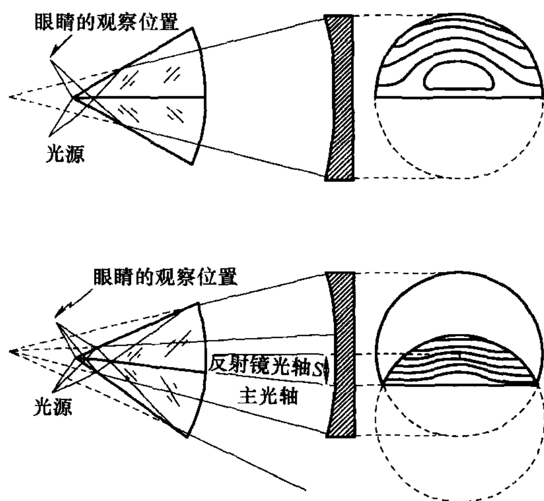


图 5.36 桑德斯设计的反转剪切干涉仪

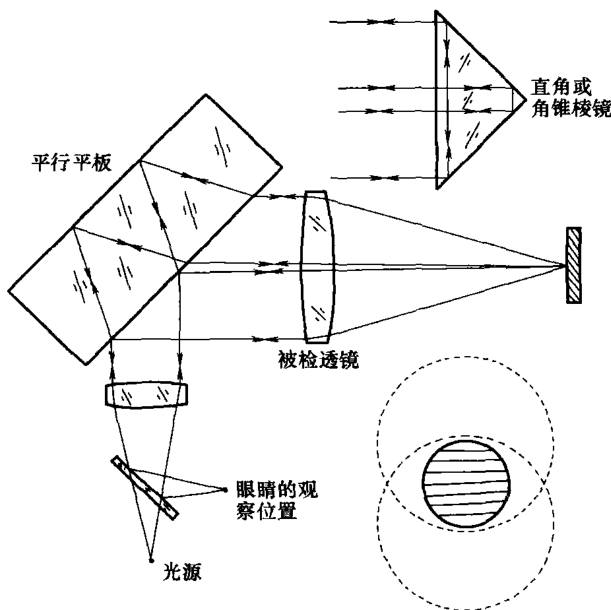


图 5.37 改装的用于检验透镜和棱镜的雅明干涉仪

参考文献

Armitage J. D. and A. Lohmann, "Rotary Shearing Interferometry," *Opt. Acta*, **12**, 185 (1965).

Baird K. M. and G. R. Hanes, in: *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. 4, R. Kingslake, Ed., Academic Press, New York, 1967, p. 336.

Briers J. D., "Interferometric Testing of Optical Systems and Components: A Review" *Opt. Laser Technol.*, **4**, 28(1972).

Brown D. S., "Radial Shear Interferograms," *Interferometry N.P.L. Symposium* No. 11, Her Majesty's Stationary Office, London, 1959, p. 253.

Brown D. S., "Radial Shear Interferometry," *J. Sci. Instrum.*, **39**, 71 (1962).

Bryngdahl O., in: *Progress in Optics*, Vol. IV, E. Wolf, Ed., North-Holland, Amsterdam, 1965, Chap. II.

Bryngdahl O., "Reversed-Radial Shearing Interferometry," *J. Opt. Soc. Am.*, **60**, 915 (1970).

Bryngdahl O., "Shearing Interferometry with Constant Radial Displacement," *J. Opt. Soc. Am.*, **61**, 169 (1971).

Fouéré J. C., "Holographic Interferometers for Optical Testing," *Opt. Laser Technol.*, **6**, 181 (1974).

Fouéré J. C. and D. Malacara, "Holographic Radial Shear Interferometer," *Appl. Opt.*, **13**, 2035 (1974).

Fouéré J. C. and D. Malacara, "Generalized Shearing Interferometry," *Bol. Inst. Tonantzintla*, **1**, 227 (1975).

Gates J. W., "Reverse Shearing Interferometry," *Nature*, **176**, 359 (1955a).

Gates J. W., "The Measurement of Comatic Aberrations by Interferometry," *Proc. Phys. Soc.*, **B68**, 1065 (1955b).

Golikov A. P. M., L. Gurari, and S. I. Prytkov, "Interpretation of Rotational-Shearing Interferograms," *Sov. J. Opt. Technol.*, **48**, 676 (1981).

Hariharan P. and D. Sen, "Effects of Partial Coherence in Two Beam Interference," *J. Opt. Soc. Am.*, **51**, 1307 (1961a).

Hariharan P. and D. Sen, "Radial Shearing Interferometer," *J. Sci. Instrum.*, **38**, 428 (1961b).

Hariharan P. and D. Sen, "The Separation of Symmetrical and Asymmetrical Wavefront Aberrations in the Twyman Interferometer," *Proc. Phys. Soc.*, **77**, 328 (1961c).

Hariharan P. and D. Sen, "Interferometric Measurements of the Aberrations of Microscope Objectives," *Opt. Acta*, **9**, 159 (1962).

Hariharan P., B. F. Oreb, and Z. Wanzhi, "A Digital Radial Shear Interferometer for Testing Aspheric Surfaces," *Proceedings of 13th Congr. ICO.*, Sapporo, Japan, 1984a, P.464.

Hariharan P., B. F. Oreb, and Z. Wanzhi, "Measurement of Aspheric Surfaces Using a Microcomputer-Controlled Digital Radial-Shear Interferometer," *Opt. Acta*, **31**, 989 (1984b).

Hariharan P., B. F. Oreb, and Z. Wanzhi, "Digital Radial Shearing Interferometry: Testing Mirrors with a Central Hole," *Opt. Acta*, **33**, 251 (1986).

Hariharan P., "Lateral and Radial Shearing Interferometers: A Comparison," *Appl. Opt.*, **27**, 3594 (1988).

Honda T., J. Huang, J. Tsujiuchi, and J. C. Wyant, "Shape Measurement of Deep Aspheric Optical Surfaces by Radial Shear Interferometry," *Proc. SPIE*, **813**, 351 (1987).

Horton R. F., "Design of a White Light Radial Shear Interferometer for Segmented Mirror Control," *Opt. Eng.*, **27**, 1063 (1988).

Kohler D. R. and V. L. Gamiz, "Interferogram Reduction for Radial-Shear and Local-Reference-Holographic Interferograms," *Appl. Opt.*, **25**, 10, (1986).

Kohno T., D. Matsumoto, T. Yazawa, and Y. Uda, "Radial Shearing Interferometer for In-Process Measurement of Diamond Turning," *Opt. Eng.*, **39**, 2696–2699 (2000).

Kösters W., "Interferenzdoppelprisma für Messwecke," German Patent 595211, 1934.

Li D., C. Huaixin, and Z. Chen, "Simple Algorithms of Wavefront Reconstruction for Cyclic Radial Shearing Interferometer," *Opt. Eng.*, **41**, 1893–1898 (2002).

Malacara D., "Mathematical Interpretation of Radial Shearing Interferometers," *Appl. Opt.*, **13**, 1781 (1974).

Malacara D., A. Cornejo, and M. V. R. K. Murty, "A Shearing Interferometer for Convergent or Divergent Beams," *Bol. Inst. Tonantzintla*, **1**, 233 (1975).

Murty M. V. R. K., "A Compact Radial Shearing Interferometer Based on the Law of Refraction," *Appl. Opt.*, **3**, 853, (1964a).

Murty M. V. R. K., "Some Modifications of the Jamin Interferometer Useful in Optical Testing," *Appl. Opt.*, **4**, 535 (1964b).

Murty M. V. R. K., "Interference between Wavefronts Rotated or Reversed with Respect to Each Other and Its Relation to Spatial Coherence," *J. Opt. Soc. Am*, **54**, 1187 (1964c).

Murty M. V. R. K., "Interferometry Applied to Testing to Optics," *Bull. Opt. Soc. India*, **1**, 29 (1967).

Murty M. V. R. K. and E. C. Hagerott, "Rotational Shearing Interferometry," *Appl. Opt.*, **5**, 615 (1966).

Murty M. V. R. K. and R. P. Shukla, "Radial Shearing Interferometers Using a Laser Source," *Appl. Opt.*, **12**, 2765 (1973).

Murty M. V. R. K., R. P. Shukla, and A. Cornejo, "Aberration in a Radial Shearing Interferometer Using a Laser Source," *Indian J. Pure Appl. Phys.*, **13**, 384 (1975).

Parthiban V., C. Joenathan, and R. S. Sirohi, "Inversion and Folding Shear Interferometers Using Holographic Optical Elements," *Proc. SPIE*, **813**, 211 (1987).

Parthiban V., C. Joenathan, and R. S. Sirohi, "Simple Inverting Interferometer With Holoelements," *Appl. Opt.*, **27**, 1913 (1988).

Puntambekar P. N. and D. Sen, "A Simple Inverting Interferometer," *Opt. Acta*, **18**, 719 (1971).

Roddier C., F. Roddier, and J. Demarcq, "Compact Rotational Shearing Interferometer for Astronomical Application," *Opt. Eng.*, **28**, 66 (1989).

Roddier F., C. Roddier, and J. Demarcq, "A Rotation Shearing Interferometer with Phase-Compensated Roof Prisms," *J. Optics (Paris)*, **9**, 145 (1978).

Saunders J. B., "Inverting Interferometer," *J. Opt. Soc. Am.*, **45**, 133 (1955).

Saunders, J. B., "Construction of a Kösters Double-Image Prism," *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **58**, 21 (1957).

Saunders J. B., in: *Optics in Metrology*, P. Mollet, Ed., Pergamon, Oxford, 1960, p. 227.

Saunders J. B., "Measurement of Wavefronts without a Reference Standard, 2: The Wavefront Reversing Interferometer," *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **66B**, 29 (1962).

Sen D. and P. N. Puntambekar, "An Inverting Fizeau Interferometer," *Opt. Acta*, **12**, 137 (1965).

Sen D. and P. N. Puntambekar, "Shearing Interferometers for Testing Corner Cubes and Right Angle Prisms," *Appl. Opt.*, **5**, 1009 (1966).

Shukla R. P., M. Moghbel, and P. Venkateswarlu, "Compact In-Line Laser Radial Shear Interferometer," *Appl. Opt.*, **31**, 4125–4131 (1992).

Smartt R. N. and W. H. Steel, "Zone-Plate Radial-Shear Interferometers. A Study of Possible Configurations," *Opt. Acta*, **32**, 1475 (1985).

Som S. C., "Theory of a Compact Radial Shearing Laser Interferometer," *Opt. Acta*, **17**, 107 (1970).

Steel W. H., "A Radial Shear Interferometer for Testing Microscope Objectives," *J. Sci. Instrum.*, **42**, 102 (1965).

Steel W. H., *Interferometry*, 2nd Ed., Cambridge University Press, New York, 1983, p. 90.

Steel W. H., in: *Progress in Optics*, Vol. V, E. Wolf, Ed., North-Holland, Amsterdam, 1966, Chap. III.

Steel W. H., "A Radial-Shear Interferometer for Use with a Laser Source," *Opt. Acta*, **17**, 721 (1970).

Steel W. H., "A Simple Radial Shear Interferometer," *Opt. Commun.*, **14**, 108 (1975).

Steel W. H. and Z. Wanzhi, "A Survey of Thick-Lens Radial-Shear Interferometers," *Opt. Acta*, **31**, 379, (1984).

Strong J., *Concepts of Classical Optics*. W. H. Freeman, San Francisco, 1958, Appendix C.

Waetzman E., "Interferenzmethode sur Untersuchung der Abbildungsfehler optischer Systeme," (Interference Method for Determination of Aberrations of Optical Systems). *Ann. Phys.*, **39**, 1042 (1912).

Walmsley I. A. and D. Malacara, "First-Order Parameters for a General Two-Beam Interferometer," *Appl. Opt.*, **34**, 3571–3575 (1995).

Wanzhi Z., "Reflecting Radial Shear Interferometer," *Opt. Commun.*, **49**, 83 (1984).

Wanzhi Z., "Reflecting Radial-Shear Interferometers with an Air-Spaced System," *Opt. Commun.*, **53**, 74 (1985).

第6章　多光束干涉仪

C. 罗丘多利（C. Roychoudhury）

6.1　发展简史

多光束干涉的历史起源可追溯到1836年，从爱里推导出由玻璃平板产生多光束干涉公式开始。由于当时还没有制作出高反射率膜层，因而没能使这个概念得到进一步发展。未镀反射膜的玻璃板的反射率只有0.04，用这样的玻璃板只能在反射方向上产生可见度较好的双光束型干涉条纹，在透射方向则看不到可识别的条纹[㊀]。后来，菲佐（Fizeau，1862a、1862b）设计出了著名的现在以他的名字命名的菲佐干涉仪（参阅第1章内容）。他的发明开创了用光干涉计量技术研究面形误差的新途径（Laurent，1883）。这种由两块未镀膜的玻璃板构成的干涉仪，在反射光路中能得到可以描绘出面形误差等值线的双光束（余弦）型干涉条纹。后来布洛奇（Boulouch，1893）重新推导了爱里（Airy，1836）的多光束干涉公式，并且证明了随着菲佐表面反射率的增大，不论是反射光路还是透射光路中的多光束干涉条纹都将变得越来越清晰。

几年之后，法布里和珀罗（Fabry and Perot，1897）认识到这种由两块镀有高反射率膜层而且间距可调的玻璃平板组成的干涉仪，也就是现在通称的法布里-珀罗干涉仪的潜力。这种干涉仪至今仍然是结构最紧凑、分辨能力最高的分光计之一（Cook，1971）。为了利用其高分辨力的特点，通常把两块法布里-珀罗板的间距做得较大，但这会大大影响这种仪器以非常高的定位精度测绘微观表面面形误差的巨大潜力。1913年，贝罗伊特、法布里和珀罗用表面镀膜的菲佐干涉仪测定了标准米尺。他们错过了获得可使这种多光束菲佐干涉仪用于精密表面检验的“最佳条件”。托兰斯基（Tolansky，1944）发现并证明了这些“最佳条件”，他自己也曾特别提到（Tolansky，1948a）从威廉斯与他的私人通信中得知英国的希尔格公司多年来一直在用多光束菲佐干涉仪检验光学平面。

在托兰斯基的著作（Tolansky，1948a、1948b、1948c、1960、1966、1968）中，他对多光束菲佐干涉仪的原理和应用作了透彻而详细的分析。本章6.3节将介绍多光束菲佐干涉仪的要点。

要想用多光束菲佐干涉仪得到清晰的条纹和很高的定位精度，托兰斯基特殊条件（参见6.2节内容）要求两反射镜的间距和楔角都很小。要达到这个目的，可以用一个检验过的高质量平面在整个视场中只给出很少几条间隔为$\lambda/2$的窄条纹[㊁]，而其他绝大部分表面不给出任何面形误差信息。次年，托兰斯基（Tolansky，1945a，1945b）发展了一种所谓等色序条纹（FECO）干涉计量技术，其中使用白光而不用准单色光照明，并且通过显示等色序

㊀ 前面三个反射光束的相对强度为0.04、0.037、0.000059，前面三个透射光束的相对强度为0.92、0.0015和0.0000024。

㊁ 在某些多通道干涉仪中，相邻条纹间的间隔小于$\lambda/2$。参阅第7章内容。

条纹的棱镜分光计逐个的观察检验表面的各个区域。与多光束菲佐干涉条纹相比，FECO 的优点是精度较高，而且能够根据彩色条纹的弯曲方向直接区分出“峰”和“谷”。关于这方面的内容在托兰斯基的著作中（Tolansky，1948a）已有很好的阐述。这里科勒的贡献（Koehler，1953、1955a、1955b；Koehler and Eberstein，1953；Koehler and white，1955）也值得一提。在6.4节中将扼要介绍FECO干涉计量技术，并且还要提到另一种稍有不同但却非常有用技术，即从两个标度不同的单色仪中选取两种不同波长的光源照明的菲佐干涉仪（Shaalan and Little，1975）。

后来，有不少人提出了各种缩小 $\lambda/2$ 条纹间隔值的技术，以便在用单色光或准单色光照明时，可以从无条纹区域中获得微观面形误差的信息。桑德斯（Saunders，1951）第一个实现了这类技术，他通过采用控制气体总量来改变气压和通过对各组条纹进行重复摄影曝光的办法，在由两个反射镜构成的干涉薄层中引入了不同的光程差。另一种减小等高线间隔值的办法是采用一组经过适当选择的离散波长的光源照明（Herriott，1961；Schwider，1968；Pilston and Steinberg，1969）。默迪（Murty，1962）提出的一种更为简单的办法是用通常的准单色光通过一组空间分开的针孔提供照明。这些缩小条纹间隔值的技术将在6.5节中进行简要介绍。

与此同时，利用普通的平行板的（而不是成楔形的）法布里-珀罗干涉仪在测定表明微观面形误差（Benedetti-Michclangeli，1968；Hodgkinson，1969）和高精度测量薄膜厚度（Schulz，1950a，1950b）方面的技术也得到了发展。法布里-珀罗干涉仪检验法请参阅6.6节内容。

托兰斯基（Tolansky，1943、1946）首先观察到托兰斯基条纹，它是由点光源照明法布里-珀罗板时形成的一组略有不同的多光束条纹，此时在法布里-珀罗板的后面并没有通常所用的条纹聚焦透镜（参见图6.2和图6.17）。这些“托兰斯基条纹”的作用将在6.7节中进行介绍。

球面法布里-珀罗干涉仪（Connes，1958）、普通曲面镜激光谐振腔（Boyd and Gordon，1961；Fox and Li，1961）及扫描球面法布里-珀罗干涉仪（Herroitt，1963）的发展，为利用具有高定位精度的多光束干涉条纹（Herroitt，1966）检验曲面的第一流技术创造了良好条件。

美国的珀金-埃尔默（Perkin-Elmer）公司（Heintze et al.，1967）和英国的科学仪器研究协会SIRA（1967）（Biddles，1969）也自主开发了类似的球面波干涉仪。这种用多光束干涉条纹相对单个或几个基准面来检验球面的强烈愿望，在已有的威廉斯干涉仪中的基本知识（Williams，1950）的指引下，为这类干涉仪的发展铺平了道路。在6.8节中将介绍这种用来检验曲面的多光束干涉仪。

在多光束干涉计量技术领域内值得提出的还有通常所称的双干涉计量技术和全息多光束干涉计量技术。前一种技术是在双干涉测量装置中将多光束干涉条纹与另一个波面相叠加，同时利用实时莫尔条纹技术或控制适宜的背景对比度进行干涉计量，尤其适用于使用多光束菲佐干涉条纹检验不透明反射表面（Langenbeck，1968；Pastor and Lee，1968）。有关这方面的内容将在6.9节中介绍。后一种技术的发展源于马特萨默托（Matsumoto，1969）和布兰达尔（Bryngdahl，1969），他们提出改进双光束干涉法向多光束干涉法发展，因此必须采用全息干涉计量技术。这在6.9节中将会简要的提到。关于莫尔条纹和全息干涉计量技术的详细阐述请参阅第12章内容。

有兴趣的读者可以参阅下面几篇干涉计量技术方面的评论文章（Kuhn，1951；Baird，1967；Baird and Hanes，1967；Koppelmann，1969；Briers，1972；Malacara et al.，1975；Vrabel and Brown，1975）。想回顾一下高精度干涉测试方法的发展，可以参阅斯库尔兹和斯克雷布（Schulz and Schwider，1976）和哈瑞哈兰（Hariharan，1991）发表的文章。对法布里-珀罗干涉仪可用作高分辨率分光计感兴趣的读者可以参阅哈兰德兹（Hernandez，1988），维格哈（Vaughan，1989）和希勒布兰德斯（Hillebrands，1999）出版的书籍。

6.2 多光束干涉计量技术的精度

本书前面各章讨论的光学元件的各种干涉检测法有一个共同点：最终干涉条纹图反映了被检表面或波面的轮廓，它是由两个波面之间的干涉形成的。其次，记录下来的干涉条纹的强度分布按图6.1a中所示的 $\cos 2\phi$ 或 $(1+\cos 2\phi)$ 形曲线变化。干涉条纹所谓的质量，即"精精细度"数定为2。这可以从精细度的定义理解，精细度是指条纹间隔与条纹半宽度的比值（图6.1）。一般情况，条纹间隔是 $\lambda/2$，双光束余弦条纹的目视估测精度很少高于 $\lambda/20$。

相反，多光束干涉条纹非常清晰，对商用法布里-珀罗干涉仪（FP）其条纹精细度就可达到200～300范围，而对专业的拥有高质量面形和超高反射率的平面反射镜构成的FP其条纹精细度可达到几万。目前，超高精细度的FP可用做示踪气体探测（O'Keefe and Deacon，1988）和重力波探测（LIGO，2005）。微型超高精细度的谐振腔用来研究腔内量子电气力学（Kimble，1994；Blais et al.，2004）。并且超高精细度的FP的反射镜只能单独的作为超高精细度的FP产品装置被分别测量（Herbelin et al.，1980；Itoh et al.，2001）。

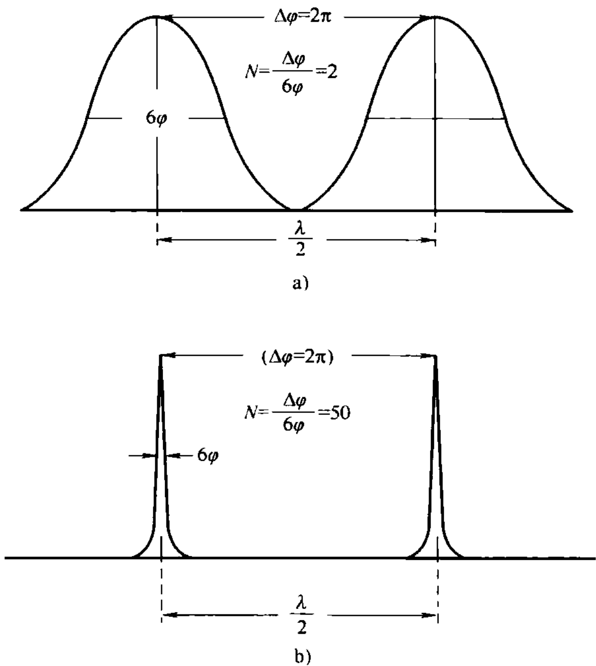


图6.1 条纹间隔与条纹半宽度之比值
a）双光束余弦条纹 b）多光束法布里-珀罗条纹

我们必须认识到，要获得多光束干涉条纹，检测中的平板必须镀高反射膜。这与双光束干涉测量相比，肯定要中断抛光程序，多花费一些时间。因为双光束干涉测量时被检表面只要简单地清洁后就可以与抛光表面一样直接进行检验。因此，多光束干涉检测主要用于薄膜测试技术领域（H. E. Bennett and J. M. Bennett，1967；Eastman，1975）。这种技术也可以相对比较容易（例如，代替电子显微术）地用于高质量光学表面的粗糙度超高精密检验（Koehler，1955b；Koehler and White，1955；Hodgkinson，1970），但这时必须仔细选择能尽可能精确反映基底轮廓的表面镀层材料（通常选择银，参阅Tolansky，1960），而且还需要分析经过镀层物质反射后产生的相位变化（Tolansky，1948a；Koehler，1953）。在双光束干涉计量技术中通常

不存在这些问题。对日常的车间检验来说，除非被检表面确实比 λ/20 好，否则多光束干涉计量技术并不适用。

当然，多光束干涉计量技术并不是获得高空间分辨精度的唯一方法。如果只是从提高条纹的清晰度考虑，则只需要将双光束菲佐干涉条纹直接成像在具有高分辨率光导摄像管的照相机上，在闭路电视上观测条纹。并通过控制干涉条纹图像得对比度，就可以人为地提高条纹的清晰度。这时简单的目视观测的精度就可超过 λ/50，如果再通过计算机进行分析处理，则可给出相当高的精度。利用非线性照相技术也可以提高条纹清晰度。通过精确测定双光束干涉条纹的正常照相底片的光密度曲线，或直接对干涉场进行光电扫描，后经过适当处理后也可达到很高的精度（Roesler，1962；Roesler and Tranb，1966；Dew 1964，1966）。一种更新的振动反射镜干涉计量技术（参阅第 13 章内容），通过在简易双光束干涉仪上装有电子分析系统可使检测精度达到 λ/1000 的精度（Raymand，1970；Bruee and Sharpless，1975）。事实上，莫斯（Moss，1971）等人，还有洛甘（Logan，1973）曾宣称：他们用于重力波探测系统的双光束外差（迈克耳逊）干涉仪测量技术，可以以高达 10^{-6} Å 的精度检测反射镜的位移。已有文献报道另一种稍有不同的技术，即通过测量有三个纵模的由三反射镜组成的激光谐振腔发出的拍频信号能检测出小于 10^{-5} Å 的光程变化（Bocrsch et al.，1974）。

还应指出，除非系统是专门用来测量相对“不稳定性”的（Dyson，1968），否则整个干涉装置的热稳定性和机械稳定性必须比要求此装置达到的精度还要高出一个数量级。干涉测量技术的极限精度受到光电探测器中固有噪声的限制（Hanes，1959、1963，Hill and Bruce，1962；Raymond，1970），同时也受到衍射现象的限制。衍射现象的存在导致了存在与海森伯格（Heisenberg，1949）测不准原理相类似的“光学测不准原理”。托兰斯基和艾玛拉（Tolansky and Emara，1955）、索托（Thornton，1957）、科帕拉曼（Koppelamann，1966）、兰和斯科特（Lang and Scott，1968）都对此进行过研究。通过多光束干涉计量技术达到的非常高的分辨力（几个埃或几分之一埃）是在纵向而不是横向，横向分辨力取决于由衍射产生的辐射波长。

选用多光束干涉测量技术时应当考虑以下几点：①允许在检验上花较多的时间；②对为特定任务设计的被检表面确实要求有最高检验精度；③实验室有可用的检测设备。

6.3 多光束菲佐干涉仪

6.3.1 干涉条纹的形成

多光束菲佐干涉仪中包含一个由两个足够大的反射平面形成的很薄的楔形层。任何入射在此薄层上的光束通常都会产生一系列越来越发散的光束（参见图 6.3）。这些多次反射光束不能严格地在任何一个平面内叠加，可是在某种近似程度上恰恰可以形成多光束干涉条纹。因为在了解法布里-珀罗干涉仪中形成多光束干涉条纹的过程后，对形成干涉条纹的必要条件就更容易理解，所以暂时离开主题来简要地描述一下在这种仪器中干涉条纹的形成过程。

法布里-珀罗干涉仪由两块高质量的并且彼此平行的反射镜组成，如图 6.2 所示。单个入射波在多次反射后将形成一系列的波，这些波在透镜的焦面处可叠加形成理想的爱里干涉条纹（Tolansky，1948a）。假定这个入射波是载波频率为 ν 的连续波，其透过率和反射率分

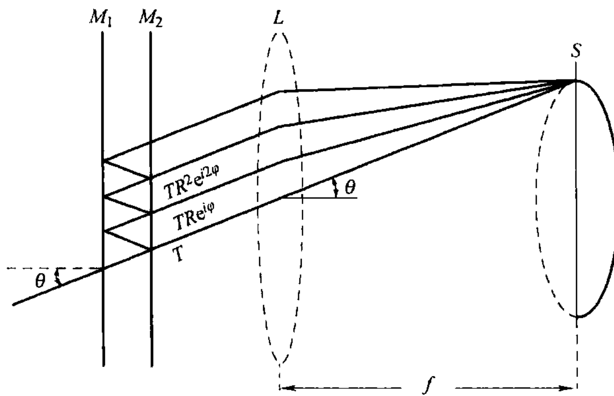


图 6.2 在由一对平行平面镜 M_1、M_2 和条纹聚焦透镜 L 组成的法布里-珀罗干涉仪中形成干涉条纹（S 是 L 焦平面处的干涉面）

别是 T 和 R，反射镜的间距为 d，由此引起的光学回路传输相位延迟为 φ 和延迟时间为 τ，这样标准的入射波振幅透射率公式为

$$i_{cw}(\nu,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} TR^n e^{in\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} TR^n e^{in2\pi\nu\tau} = T/(1-Re^{i2\pi\nu\tau}) \tag{6.1}$$

其中，$\varphi=(2\pi/\lambda)2d=2\pi\nu\tau$

式（6.1）平方后得到辐照度公式为

$$I_{cw}(\nu,\tau) = T^2/[(1-R)^2+4R\sin^2\pi\nu\tau] \tag{6.2}$$

这些爱里干涉条纹理想的反射精细度为（忽略反射镜的面形误差和镜面调整误差）

$$N=\phi\sqrt{R}/(1-R) \tag{6.3}$$

式中，T 和 R 分别是两块反射镜的透过率和反射率；ϕ 为任何两个相邻波面之间的总的有效位相差或光程差。

虽然式（6.1）中的级数是无穷的，但实际总的有效相干光束数是有限的，因为经过足够多 n 次传播后的光束所带的能量 T^2R^{2n} 是可以忽略不计的（参见图 6.4 的实线，它给出一定的反射率条件下产生与理想爱里曲线（无限项和）相差小于 0.1% 的有限多光束干涉条纹所需要的叠加光束数）。应当记住，这点对于任何类型的多光束干涉技术都是很有用的，后面将会介绍。如果真的想要叠加无限多次反射光束以形成理想的爱里干涉条纹，则为了观察这样的条纹干涉测量工作者只有无限期地等待下去（Roychoudhuri，1975）。

形成多光束法布里-珀罗干涉条纹的另一点有实际意义是任何两相邻波面间的位相差 ϕ 是恒定的。因此，在 ϕ 值确定后，全部的多次反射光束系列就组合成为当前的理想爱里条纹。所以当 ϕ 是 $2n\pi$ 或 $(2n+1)\pi$（n 为任何整数）时，整个光束系列相长叠加形成亮条纹或相消叠加形成暗条纹。

这就是在平行平面法布里-珀罗干涉仪和楔形菲佐干涉仪之间存在的主要不同点。在楔形的菲佐干涉仪中，两相邻波面之间的位相差是一个逐渐增加的量，而不是像在平行法布里-珀罗干涉仪中那样是个常量。另一个差别是多次反射后光束的空间离散（在菲佐干涉测量技术中），这不能用任何聚焦或成像装置完善地补偿。图 6.3 所示为这两个差别（也可参阅文献 Rogers，1982）。

相位差的累加可使用既简单又巧妙的布洛赛尔（Brossel，1947）计算方法，这个方法进

一步发展还能用于计算菲佐干涉条纹的强度分布和定位，也可参阅文献伯恩和沃夫（Born and Wolf，1975）。下面分析在光学车间中经常使用的以准直光束垂直照明两反射镜之一的这一特殊情形（图6.3和图6.6）。两块部分透过的反射镜 M_1 和 M_2 构成一个很小的楔角 ε，楔角顶点在 O 处。平行于 M_2 镜的入射平面波由于多次反射将产生一系列的光束。图6.3a中的箭头对应入射波面的“中心”，由此可发现菲佐干涉仪中光束发生离散的缺点。图6.3b所示为多次反射波面与位于 M_2 镜面（Y 平面）处的入射波面之间相对位置。之所以选择这样的图形来计算相位差（Brossel，1947；Tolansky，1948a），是因为在两菲佐镜构成的楔形顶点 O 处，各个多次反射波面相对入射波面（OA_1）不存在任何相位差。各个多次反射波面的倾斜情况用直线 OA_2（$<2\varepsilon$），OA_3（$<4\varepsilon$），$\cdots OA_n$（$<2n\varepsilon$）表示。

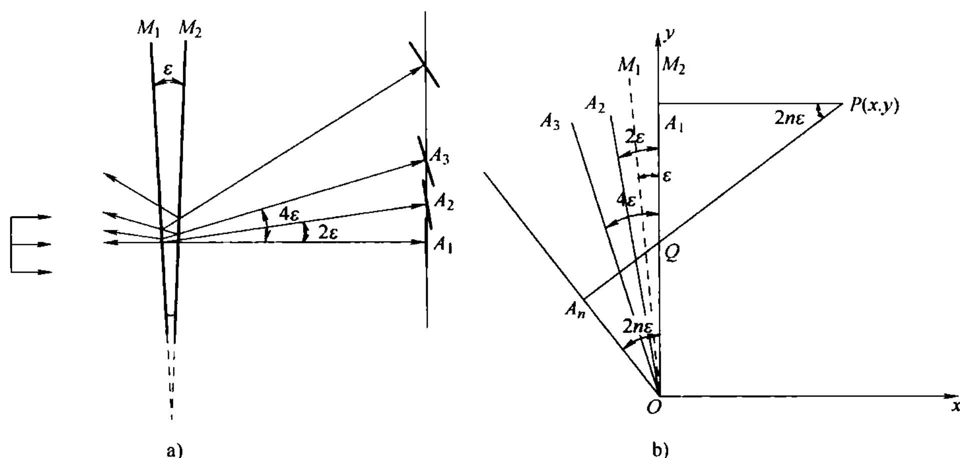


图6.3 多光束菲佐干涉仪产生的光束

a）在由一对彼此成楔角 ε 的“平面”镜 M_1、M_2 组成的菲佐干涉仪中，用平行于 M_2 的准直波面照明时产生的多次反射光束 b）计算菲佐干涉仪中产生的多次反射光束之间的相对程差的辅助几何图形

如果在透射光路中的任意一点 P（x、y）处考虑叠加效果，则第一个波面和第 n 个波面间的光程差为

$$d_n(x,y)=PA_n-PA_1 \tag{6.4}$$

但是由于

$$PA_n=PQ+QA_n=PQ+OQ\sin 2n\varepsilon=PQ+(y-QA_1\sin 2n\varepsilon)=x\cos 2n\varepsilon+y\sin 2n\varepsilon$$

$$d_n(x,y)=x(\cos 2n\varepsilon-1)+y\sin 2n\varepsilon \tag{6.5}$$

如果像在光学车间检验通常所做的那样，通过成像装置在镜面 M_2（$x=0$）上观察条纹，则相位差的表达式可简化为

$$d_n(0,y)=2tn-\frac{4}{3}n^3\varepsilon^2 t \tag{6.6}$$

式中，$t=y\varepsilon$，t 代表了 y 处平面的间距，它是在假定 $2n\varepsilon$ 仍旧是一个小角度的条件下取 $\sin 2n\varepsilon$ 级数展开式的头两项。因为在用平行光束垂直照明的平行板法布里-珀罗干涉仪中，第一个波面和第 n 个波面之间的相位差为 $2tn$，所以菲佐干涉仪中第 n 束光的相位比第 $2tn$ 束光束滞后了

$$\delta d_n=\frac{4}{3}n^3\varepsilon^2 t \tag{6.7}$$

托兰斯基首先发现了菲佐干涉仪与法布里-珀罗干涉仪中的相位算术级数 $2tn$ 展开后相比有较小的相位滞后，并且这个小的相位滞后是对形成高质量对称明锐条纹的唯一的最重要的限制。这个问题在下一节即将讨论的白光 FECO 干涉测量技术中是没有的，因为它的两个反射镜已尽可能调成彼此平行。

$$\frac{4}{3}n^3\varepsilon^2 t=\frac{\lambda}{2} \tag{6.8}$$

在满足式（6.8）的特殊情况下，第 n 束光与第一束光是相消而不是相长地叠加。因此，要得到对称明锐的菲佐干涉条纹就必须满足托兰斯基不等式

$$\frac{4}{3}n^3\varepsilon^2 t<\frac{\lambda}{2} \tag{6.9}$$

可见，式（6.9）中变化最快的量是相干光束数 n。由于多光束菲佐干涉的目的就是用来产生高质量、高精细度的干涉条纹，而这就需要有大量的、相位差有规律的光束相叠加，因此 n 值又不能太小，当然 n 值大小也与表面的反射率有关。图 6.4 中的虚线表示法布里-珀罗干涉条纹的精细度 N_R（条纹间隔与条纹半宽度之比）随反射率的增加而增大的情况；图中的实线表示了有效光束数 M 随反射率变化的情况，其中 M 为计算机计算的峰值透过率与爱里值（式 6.1 的无限项和）相差小于 0.1% 的有效光束数。由图 6.4 可见，反射率低于 90% 时，要得到精细度为 N_R 所需的迭加有效光束数 M 约为 $2N_R$。反射率越高，需要的 M 值便越大。式（6.5）也给出了相应的原理。

图 6.4 示中的曲线可用于菲佐干涉计量技术中，如果被检表面的反射率给定 R（或等效 $R=\sqrt{R_1R_2}$，当两个表面反射率不同时，），或要求的条纹精细度为 N_R，与之对应的反射率为 R 时，则由图 6.4 的曲线可求出需要叠加的有效光束数 M。因此，要保证托兰斯基不等式的成立，需要在式（6.9）中用 M 代替 n，并且相应地减小 ε 和 t 的值。托兰斯基（1948a）曾经给出过为了得到对称的菲佐干涉条纹所需要的典型 n、ε 和 t 的值。两玻璃板间距 t 的最小值通常由无所不在的平均大小一般为 1μm 左右的尘埃粒子所决定。楔角 ε 的最小值由视场内所需要的最少条纹数决定，楔角越小，相邻条纹之间的间距就越大。

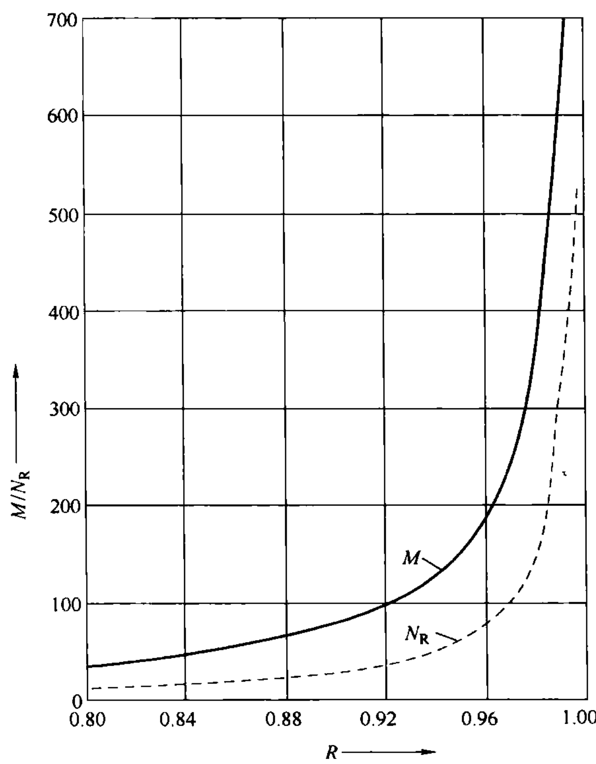


图 6.4 与理想爱里曲线相差 0.1% 以内，相干光束数值 M 随反射率 R 的变化曲线实线—相干光束数值 M 随反射率 R 的变化曲线

当不满足托兰斯基不等式（6.9）时（即在绝大多数情况下），在高反射率的情况下形成的每一个菲佐干涉条纹都是强度分布不对称的混合条纹，在厚的楔形一侧形成一个主极大值并

跟着一系列的次极大值。这些次级大的强度随着楔形间距的增大而迅速减小。主极大变宽后并不像法布里-珀罗干涉条纹那样对称，并且其峰值沿着楔形的开口方向移动逐渐减小（Kinosita，1953）。图 6.5 所示为定性地比较一般的菲佐干涉条纹与法布里-珀罗干涉条纹的示意图。这种一般的菲佐干涉条纹与托兰斯基干涉条纹（参见图 6.17）非常类似，后者是由采用点光源发出的不同方向的斜光束照明的平面平行法布里-珀罗干涉仪产生的。如果利用干涉条纹的光滑边缘，则这样的混合条纹并不影响检测精度（Polster，1969）。菲佐干涉条纹的特征不仅在薄的楔形膜上形成，而且也在称为菲斯勒（Feussner）的面上的各个界限分明之处形成（Barakat et al.，1965）。

菲佐干涉仪的另外一个重要的约束量为 Δ_n，它是由于楔角 ε 引起的第 n 束光线的横向位移（Tolansky，1948a）

$$\Delta_n = 2n^2 t\varepsilon \qquad (6.10)$$

这意味着由菲佐干涉仪形成的每条多光束干涉条纹，总是给出跨度为 Δ_n 的整个区域内的平均面形的等高线图，而不是精确的点点对应的等高线图。

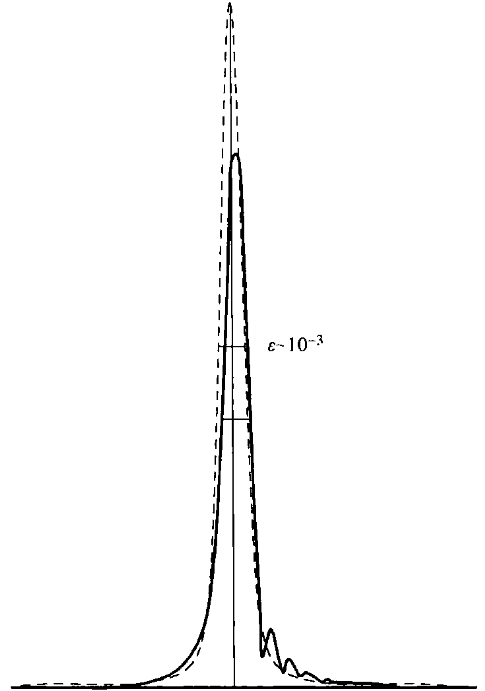


图 6.5　由一对彼此成楔形的（~10^{-3} 弧度）平面镜产生的混合菲佐干涉条纹与同一对彼此完全平行的平面镜产生的法布里-珀罗干涉条纹比较

6.3.2　菲佐干涉测量法

菲佐干涉测量装置的基本组成如图 6.6 所示，一单色或准单色的准直光束经过镀膜的彼此成楔形的两个平面（M_1，M_2），在透射方向（O_T）和反射方向（O_R）都可观察到干涉条纹。透射条纹是清晰的亮纹，它以很高的对比度呈现在几乎全黑的背景上，而反射条纹恰好是与之互补的暗纹（遵守简单的能量守恒定律），即暗条纹位于亮背景上，如图 6.7 所示。但是当反射膜层的吸收系数很高时（例如银层），反射条纹的对比度可能很差（Tolansky，1948a）。所有的菲佐干涉条纹的间隔都是 $\lambda/2$，正如多光束法布里-珀罗干涉条纹或通常的双光束干涉条纹。这就是为什么清晰的菲佐干涉条纹会丢失掉被检表面大部分可用信息的原因。这类装置的另一种形式将在下节讨论。

因为表面等高线条纹所表示的是两个面的总的光程变化，所以其中一个面应当是高质量的基准平面，这样干涉条纹就可以仅仅看成是被检平面的等高线（Clapham and Dew，1967）。获得高质量基准平面的方法是利用像水银那样的液态液面。宾纳格尔等人（Bunnagel et al.，1968）已经详细介绍过这种菲佐干涉仪。然而，不用绝对基准平面也可以求得被检表面与绝对平面的偏差。这个方法要用到三个平面，其中没有一个是高质量的基准平面（Schulz，1967；Schulz and Schwider，1967；Schulz et al.，1971）

由托兰斯基不等式式（6.8）可知，如果将两平板的间距 t 调成很小，则比较容易获得高质量的菲佐干涉条纹。可是正如莫斯等人（Moos et al.，1963）所证明的，这一条件并不

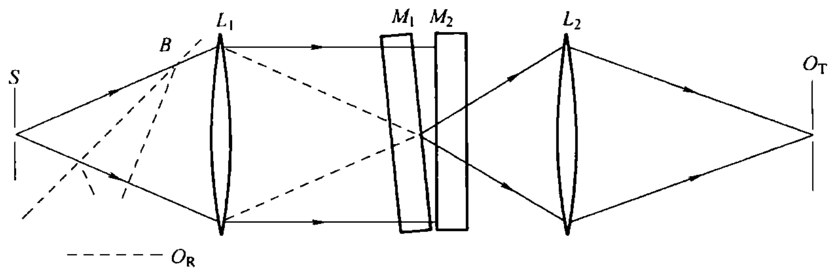


图 6.6 菲佐干涉测量装置的基本组成

S—点光源 B—观察反射条纹（O_R）的分光镜 L_1—准直透镜 M_1、M_2—菲佐反射镜（其中空气楔和间距作了很大的夸张） L_2—观察透镜（它把菲佐镜间的定域条纹成像于观察平面 O_T 处）

是必要条件，他们用准直性很好的激光光束照明，在两平板的间距大到20cm的情况下也得到了表面等高线图。当然，两平板间的倾角必须很小，实验的楔角小于10^{-4}弧度。这一点对车间加工是很有意义的，因为大的间距可以保证不致因直接接触表面而产生划伤或损坏反射膜层。不过，大的间距要求很高的安装质量，以保证稳定的相对准直关系。

在兰格贝克（Langenbeck，1970）介绍的一个有意义的实例中，为提高条纹清晰度采用了离轴照明，入射角的选择先满足使入射光束朝着菲佐板的顶角方向反射，在经过可控制的有限次反射后，再朝离开顶角的方向反射。这可从图6.8看到，其中如果照明光束沿着光线SA_1的方向传播，经过几次反射后在A_n处变成垂直于反射镜M_2入射，后开始沿原光路返回。照这样可形成较清晰的菲佐干涉条纹，在检验像三面直角棱镜那样的特别的物体时，要求菲佐干涉仪的反射镜之间有比较大的间距（Langenbeck，1970）。

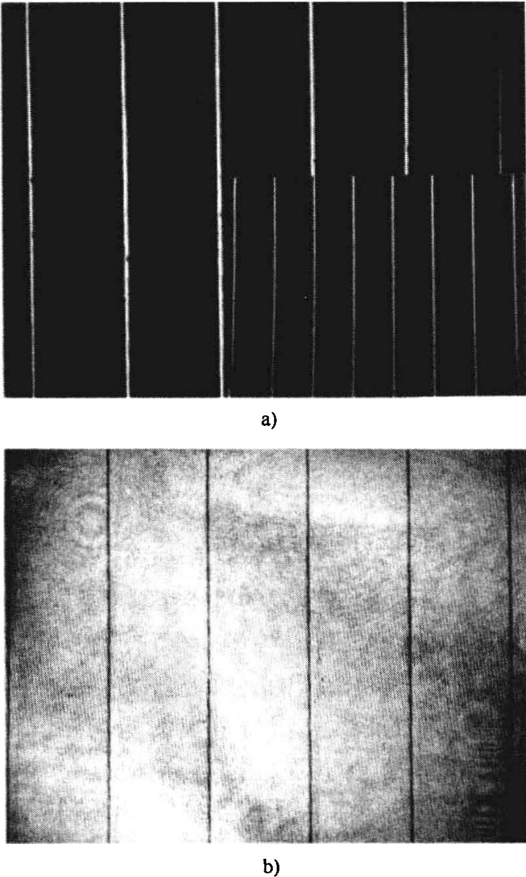


图 6.7 透射和反射菲佐条纹

a）透射条纹形成清晰的亮线和暗背景（插入了用同样的装置而产生的透射条纹，没有图6.6中所示的准直透镜L_1） b）反射条纹形成相补的暗线和亮背景（细条纹是由分光镜的背面反射产生的）

伊斯特曼和鲍梅斯特（Eastman and Baumeister，1974）设计了一台常规菲佐干涉仪，将两块菲佐反射镜其中的一块装在压电扫描装置上。干涉条纹不用照相方法记录，而用电子方法检测和分析处理。根据报导，这种干涉仪精度约为20Å，但很有可能还有进一步提高测量精度的技术。下一节将简要介绍用双波长照明的菲佐干涉测量技术（Shaalan and Little，1975）。

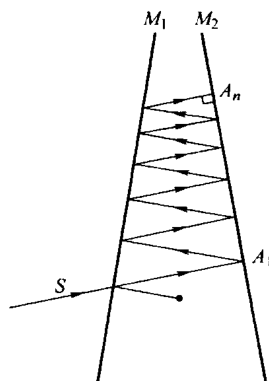


图6.8 提高菲佐干涉仪条纹精细度的一种方法（在菲佐镜 M_1，M_2 间的楔角一定的情况下，适当选择照明光线 SA_1 的方向，可减小光束离散的范围，增加有效相干光束数，提高条纹精细度。）

6.4 等色序条纹

1945年，托兰斯基进一步发展了一种用白光照明的方法测量表面微观面形误差新技术。它是由多光束菲佐干涉仪演变而来的一种干涉仪。在多光束菲佐干涉仪中，干涉条纹由以两个高反射面为界的薄楔形成。由于此楔形会使光束离散，最终使干涉条纹的锐度（精细度）减小（参见图6.3）。因此，托兰斯基（Tolansky，1945a、1945b）将这两个表面尽可能调成平行，以增加条纹本身的精细度。在用准直的白光垂直照明此干涉装置时，产生的所有波长为 λ_i 的沟槽光谱会满足以下关系式（Jenkins and White，1957）

$$2t = n_i\lambda_i \tag{6.11}$$

然而，要看到这样的光谱还需要摄谱仪进行色散。当理想干涉膜层（t 为常数）的一个狭窄区域通过摄谱仪成像时，将显示出一系列满足式（6.11）的横向分开的平行直条纹（即沟槽光谱）。如果在此膜层的成像区内 t 值有变化，由于每个点都通过一组与该点 t 值对应的波，因此光谱像就由非直“条纹”组成，其中每一个条纹都将沿着波长标尺方向偏移，而保持 t/λ_i 不变。所以等色序条纹（FECO）这个名字的由来就是因为沿着每个条纹的序数 n 是常数。

图6.9所示为观察等色序条纹的基本干涉测量装置图。图6.10a所示为云母面的部分等色序条纹图（黑白复制），其形貌的变化如图6.10b（Tolansky，1945a）。面形误差的“峰”和“谷”的判断很简单，位于“峰”上的条纹凸向紫色，位于“谷”上的条纹则凹向紫色。表面局部倾斜的程度由直条纹区内垂直于条纹方向的单位长度内的条纹数决定。有关等色序干涉测量技术的详细介绍，读者可参阅托兰斯基（Tolansky，1948a）的著作。

等色序条纹干涉测量技术在薄膜厚度的高精度测量和表面粗糙度测量中有非常广泛的应用（Bennett and Bennett，1967；Eastman，1975；Bennett，1976）。由于现代光学工艺对高质量光学表面的要求不断增大，促进了研究等色序干涉测量技术在表面粗糙度测量方面的应用，并且加深了对抛光机理的认识（Koehler and White，1955；Koehler，1955b；Vinokurov et al.，1962；Hodgkinson，1970）。可是，应当考虑基底的膜层材料引起的反射光的位相变化问题（Tolansky，1948a；Koehler，1953；Schulz，1951a），以及位相变化与膜层材料厚度

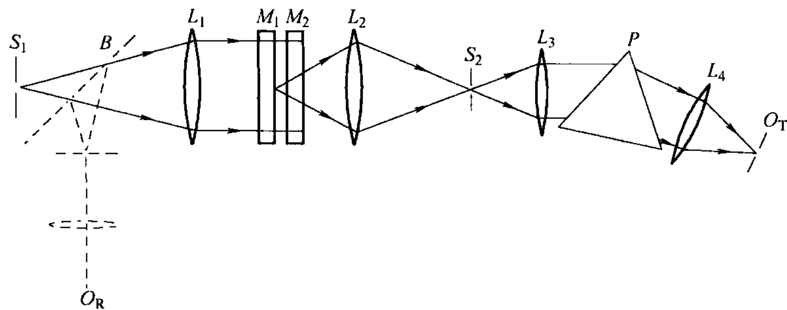


图6.9 观察透射（O_T）或反射（O_R）等色序条纹（FECO）的干涉测量装置图

S_1—白光点光源 B—用于观察反射条纹的分光镜 L_1—准直透镜 M_1、M_2—构成干涉仪的平行反射镜，其中一个是作为参考镜与另一个进行比较的 L_2—是将来自 M_1-M_2 上的一部分的沟槽光谱成像于摄谱仪狭缝 S_2 上的透镜（狭缝 S_2、透镜 L_3 和 L_4 以及棱镜 P 组成摄谱仪）

O_T—透射条纹的观察平面

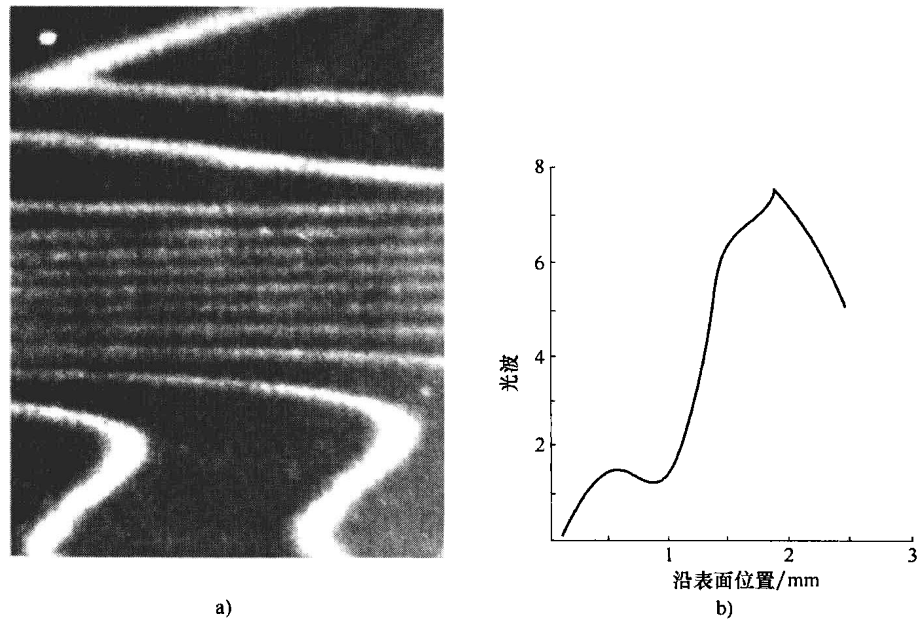


图6.10 云母面的部分等色序条纹图及其形貌的变化

a）以平面镜作为参考面检验新解理的镀银云母面时得到的等色序条纹（在垂直方向的中央区内有稠密的条纹表明存在很陡的高峰，图中以黑白条纹形式给出） b）与由 a）图所示的条纹对应的表面高度沿垂直方向变化的定量曲线图

之间的依赖关系问题（Schulz and Scheibner，1950）。现已发现用银膜（Tolansky，1948a）比用介质膜更能真实地反映原始的面形误差。

继托兰斯基之后，沙兰和李特（Shaalan and Little，1975）报导了另一种用白光条纹研究表面微观面形误差的技术。为了充分利用这种技术的优点，菲佐干涉仪需要被采用两台校正好的单色仪（如定偏向角单色仪）发出的两种波长同时照明，图6.11所示为其试验装置图。利用这一技术，可以很容易地测出晶体解理层的高度方向或薄膜的高度方向。同时，被检表面的任何区域也可以进行详细的观察，如图6.12所示，首先选择两照明波长的其中之一在感兴趣的区域内形成干涉条纹，然后调节第二个单色仪，以便在阶面的另一边产生匹配

的但颜色不同的条纹。因为两个波长是已知的，所以利用式（6.11）可以很容易地确定解离层的方向和高度，但应当考虑反射时产生的相位变化，而这一点在式（6.11）中并不是很明显能看出来的（Shaalan and Little，1975）。

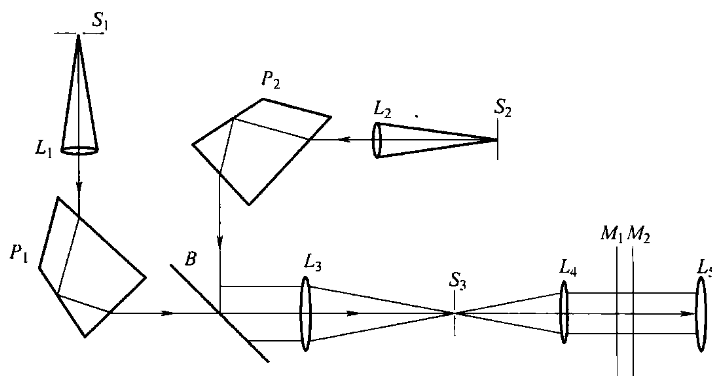


图6.11　用两个校正好的单色仪照明的白光非佐干涉仪
S_1，L_1，P_1 和 S_2，L_2，P_2—两个单色仪　B—分光镜　L_3—两个单色仪合用的光谱成像透镜　S_3—非佐干涉仪 M_1-M_2 的入射缝　L_4—干涉仪的准直透镜　L_5—观察透镜



图6.12　出现在某阶面两边的颜色可变的多束光干涉仪
（较亮的条纹与原版彩色照片中的红色条纹相对应，较暗的条纹与绿色条纹相对应）

6.5　多光束干涉测量中如何减少干涉条纹的间隔[⊖]

在用单色或准单色光照明的大多数常规干涉测量技术中，作为表示光学厚度等高线的干涉条纹的间隔值为 $\lambda/2$。这就是为什么在多光束干涉测量技术中虽然干涉条纹很清晰，对比度很高，但被检表面的大部分区域内几乎都不能给出面形误差信息。即使在6.4节中讨论的白光干涉测量技术中，也只有很小的一部分表面成像在分光仪的狭缝上，虽然可以逐区扫描被检物体的表面，但是这个方法比较麻烦。

一种较简单的解决办法是采用准单色光垂直照明的“密封增压扫描”技术（Saunders，1951），这时能给出清晰并且间隔小于 $\lambda/2$ 的非佐干涉条纹。其基本技术要求将整个干涉仪放在密闭室中，并对干涉条纹进行一系列的曝光，并在每两次曝光之间使干涉条纹移过一段所要求的距离。条纹的移动是通过改变气压来控制光程的变化实现的。另一个可以达到同样目的，并且又比较简便的方法是将干涉的一块反射镜安装在压电扫描装置上，并给压电元件加上合适的梯形电压（Roychoudhuri，1974），这种方法不用将整个干涉仪放入密闭系统中。

赫里奥特（Herriott，1961）提出了另一个不同的解决办法，即用单色仪提供的一组离散光谱同时照明干涉仪，其中单色仪的入射照明由一组空间分离的狭缝组成，而不是单个狭缝。后来，默迪（Murty，1962）提出了一种更简单的解决方法，用一个普通的准单色（或单色）光源和一组空间分离的小孔照明干涉仪，产生一组条纹间隔值缩小了的多重干涉条

⊖　条纹间隔也可用多光程干涉测量技术减小，这将在第7章中讨论。

纹。默迪（Murty，1962）还给出了一个求条纹间隔值的简单计算方法。斯克维德（Schwider，1968）也采纳了赫里奥特的多波长照明的想法，但利用了能产生的沟槽光谱照明的法布里-珀罗干涉仪。如果利用菲利斯通和斯坦伯格（Pilston and Steinberg，1969）介绍的波长可调谐激光器照明，则可大大增加检测的灵活性。利用现有可用的连续可调谐染料激光器，可以方便而迅速地完成这样的测试。

6.6 平行平面法布里珀罗干涉仪

有些出乎意料的是，虽然平行平面法布里珀罗（Fabry-Perot，1897）干涉仪作为一种高分辨率的高性能光谱仪器众所周知，但是直到20世纪50年代它才用于表面测量（Schulz，1950a，1950b）。这种标准的技术在将这种干涉仪用做分光仪的情况下逐渐发展起来的，它要求：①用扩展光源照明，以获得足够亮度的条纹；②两平板之间保持合适的距离，以满足足够的分辨率。也许正是这两个要求条件阻碍了将这种干涉仪用于表面面形误差的测量，因为在这两个要求条件下形成的干涉条纹不能点点对应的反映局部缺陷，而是条纹上的每一部分都代表了整个表面的缺陷（Chabbal，1953、1958）。在下一小节中，将按年代顺序介绍法布里-珀罗干涉仪在表面检验中的若干应用。

6.6.1 薄膜厚度的测量

用传统的法布里-珀罗干涉条纹可在 ±15Å（或更好些）的精度范围内反映真空镀膜的薄膜厚度（Schulz，1950a、1950b）。下述实验可证明这一点：用一个简单钠蒸汽灯发出一对靠得很近的谱线（5890Å 和 5896Å），这一对谱线总是会形成一对相隔很近的条纹组。这对条纹组的合拍与不合拍将取决于干涉仪两平板之间的距离。在知道了波长和平板间距（即在这对条纹组位于平板的两不同层上的适当位置时的平板距离），就可求得薄膜的厚度。斯克尔兹（Schulz，1950a、1950b）曾经介绍过高精度的定量分析方法，它比多光束菲佐干涉法有优势，优势在于形成干涉仪的两个表面不必紧贴在一起，避免了容易损坏高质量的表面和（或）反射膜层，但在此应当指出，菲佐干涉条纹也可用间距大但楔角很小的两块平板形成（Moos et al.，1963）。

斯克尔兹（Schulz，1950a、1950b）还将他提出的方法推广到测量薄膜表面反射时产生的相位变化，此相位变化量取决于波长、材料厚度和薄膜的吸收系数。

6.6.2 表面平面度偏差

贝拉德迪（Benedetti-Michelangeli，1968）进一步发展了测量平面局部误差的方法，它采用细的准直激光光束局部照明法布里-珀罗干涉仪，干涉仪由被检平板和基准平板组成。正如他在文章中所介绍的那样，利用法布里-珀罗干涉条纹的直径与干涉仪参量之间的标准关系式计算得到测量的结果。照明方法是采用细的准直光束照明平行平板，并且其入射角可以连续变化。据报道其平面度检测的精度为 $\lambda/400$，并称检测的精度其实还可以大大提高。

另外，这种方法还有一个优点就是被检平板不必彼此紧贴在一起，这样可以避免可能的表面损伤。贝拉德迪（Benedetti-Michelangeli，1968）的这篇论文的一个突出的优点是它简明扼要地阐述了所有影响法布里-珀罗干涉条纹质量的重要因素。一种精度更高的方法，利用爱里透射曲线的很陡的斜率和采用细的准直光束垂直照明平行平板，通过改变细的准直光

束的照明位置，可以得到局部面形误差。用这种方法，可获得 $\lambda/1000$ 的精度（Koppelmann and Krebs，1961）。所有的这些方法都有一个主要的缺点，它们可测定的平均缺陷的最小面积受准直扫描光束的空间尺寸的限制，这一尺寸几乎不可能达到小于 1mm。下面将介绍逐点测定表面缺陷的方法。

霍达科森（Hodgkinson，1969）可能是第一位利用法布里-珀罗干涉仪的巨大潜力去研究表面缺陷的学者。大多数用于表面面形误差测量的多光束干涉检验方法都有一个共同的缺点，它们不是一次同时记录下全表面的面形，而是如前面提到过的那样，仅仅是沿着各条狭窄的干涉条纹取样，而其余大部分表面没有任何可用的信息。减小条纹间隔值的技术（参见 6.5 节内容）只能解决这个问题的一部分。霍达科森（Hodgkinson，1969）提出了一种方法，通过将法布里-珀罗干涉仪的一个反射镜平行其自身表面缓慢的移动，同时记录下透射波面的积分干涉图。其照明光束是垂直入射的准直单色光，干涉仪在每一点的传输效率与该点的平板间距成比例。当积分干涉图经过适当的显影处理后（Hodgkinson，1969），根据积分干涉图透射特性曲线可得到所有的面形信息和面形误差分布函数（Chabbal，1958）。通过曝光和显影过程获得了透过率特性曲线，它与表面面形误差几乎成线性比例。由于受照明技术的限制，这种方法测量面形误差的精度约为 $\lambda/500$。

如果用空间扫描光电探测器（或高分辨率光导摄像管摄像机）自动检测透射波前，并把信息存储起来以备详细分析，则有可能省去积分干涉图的中间记录环节。图 6.13 所示为确定一对反射镜上所有各点的表面缺陷的法布里-珀罗干涉仪测量装置，参考反射镜可装在压电扫描装置上精确的调节两反射镜的间距，这样使探测器能记录到例如来自中心小区域峰值透过率的 1/2。然后，将此中心区域的透过率作为参考信号去测量其他各点的平直度偏差。为了直接进行图解计算，把沿被检面任何直径方向的透过率曲线与“理想的”爱里曲线进行比较，其中这个透过率曲线为当探测器扫描其中一块反射镜时用示波器波形的形式记录下来的通过中心参考区的透过率曲线。图 6.14 就说明了这一点。“理想”爱里曲线的半宽度公式为

$$pp' = 2\pi/N_R = \lambda/2N_R \tag{6.12}$$

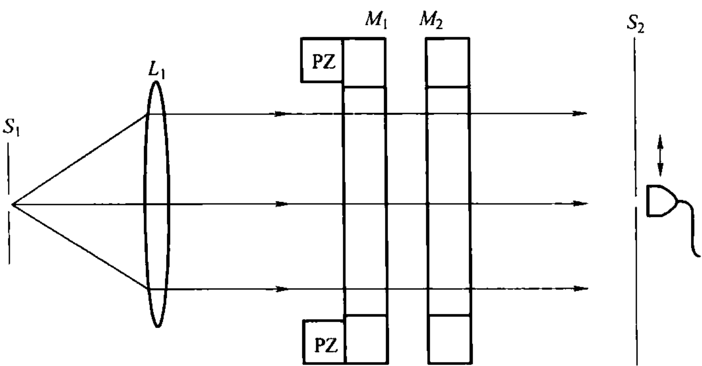


图 6.13 确定一对反射镜上所有各点的表面缺陷的法布里-珀罗干涉仪测量装置（整个干涉仪用准直光束照明，表面缺陷通过测量透过率的变化确定，其中一块反射镜装在压电材料（PZ）上以选择所要求的透过率值）

图 6.14a 中横坐标表示的位相是线性变化的，精细度 N 既可以通过对中心参考区的实际

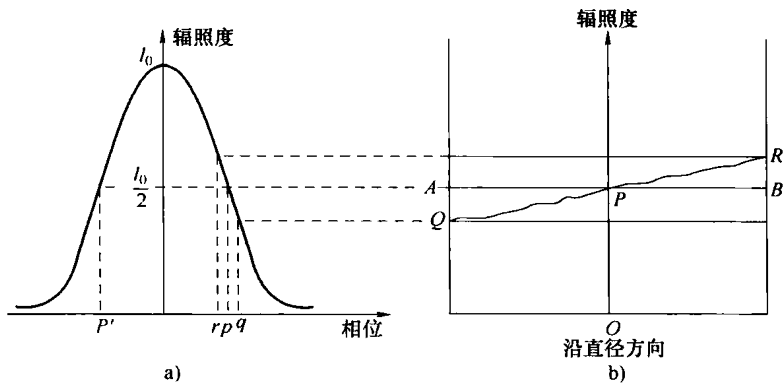


图 6.14 用法布里-珀罗干涉技术测定一对反射镜的表面所有各点的缺陷
a）有校正轴的法布里-珀罗镜的参考（或理想）爱里透过率曲线 b）当中心参考区的透过率值用压电材料调整到恰好为峰值透过率的 1/2 时，沿法布里-珀罗镜某特定直径方向的透过率曲线

爱里曲线的测量求出，也可以根据反射膜层的反射率求出（见图 6.15）。于是，透过率的变化量 AQ 或 BR（分别对应于光程变化量 pq 或 pr）可利用式（6.12）直接换算为以波长为单位的数值。这个方法的精度取决于可探测到的最小信号值，如 pq 它受爱里曲线的斜率控制（Polster，1969）。这个方法的精度受限于光电探测器的固有噪声。虽然如此，当干涉仪的反射精细度约为 100（反射率约为 97%）时，用示波器和中等质量的探测器仍可得到 $\lambda/1000$ 或更高的精度。

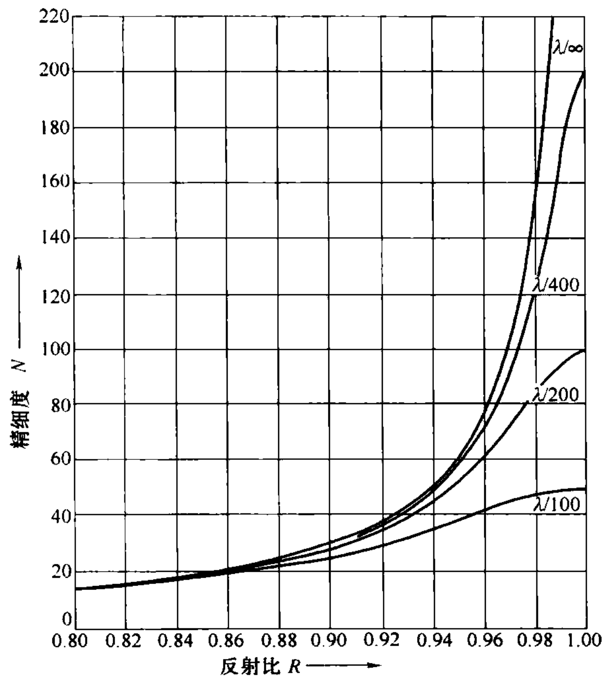


图 6.15 一个存在球差的法布里-珀罗镜的有效表面精细度-反射比曲线
（图中示出了四种不同平直度表面时的曲线）

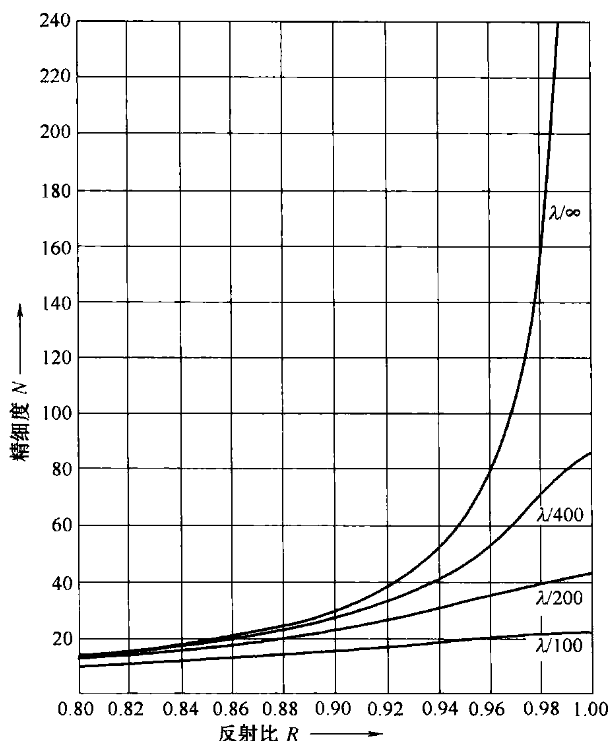


图 6.16 一个具有高斯型面形误差的法布里-珀罗镜的有效表面精细度-反射比曲线
（四个不同表面平面度的曲线图见文献（Rychoudhuri and Hercher，1978））

在结束本节之前，我们还要提及一下法布里-珀罗干涉测量方法的另一个优点。到目前为止，我们已经讨论了测定表面局部缺陷的位置和大小的问题。然而，在大多数光学检验中整个表面大致的（平均的）总的面形误差 λ/m 也是有意义的。这个值是很容易得到的，只要将基准板和被检板组成一个已知理想反射精细度的法布里-珀罗干涉仪，并将这个理想反射精细度与由干涉仪试验给出的精细度进行比较。图 6.15 和图 6.16 所示的是两组有效精细度与表面反射率的函数关系曲线。第一组是被检面残留有球面面形误差时的曲线，第二组是被检面残留有偏离理想平直度的高斯型随机偏差的曲线。这些曲线是用查伯尔（Chabbal，1958）分析法计算得到的（Roychoudhuri，1973b），它们的实用价值可通过一个简单的例子来说明。假定参考平面和被检平面的反射率为 98%，其理想反射精细度接近 155，但实验精细度为 80。然后，通过仔细分析图 6.15 和图 6.16 的曲线可以得出结论：如果被检表面有纯球面面形残余误差，则平直度平均偏差值稍低于 $\lambda/200$；如果被检表面有高斯型的或是规则误差与高斯型误差的综合，则平均误差必定小于 $\lambda/400$。此外，我们还可以根据透过率的峰值（Chabbal，1958；Jacquinot，1960；Hodgkinson，1969）或加宽的法布里-珀罗干涉条纹的性质（Hill，1963；Bhatnagar et al.，1974）更精确地识别和表示面形误差。

6.7 用法布里-珀罗干涉仪产生的托兰斯基干涉条纹

当用点光源照射一对高反射平行平面的表面时，在离反射面任意距离的位置都可观察到一系列具有复合圆形特征的条纹（伴有衰减的次极大值）。这种呈现在发散锥面上的非定域

条纹是由托兰斯基首先发现，并将其用于薄晶片研究的（Tolansky，1943、1946）。因此，称这些非定域多光束条纹为托兰斯基条纹。

通过使点光源在两反射镜面之间成像，托兰斯基条纹可用于精确的定位检验。要使这个方法真正有效，必须使两反射镜面彼此非常靠近。在远处只需要用一个屏幕截取条纹，而不必再用任何显微镜或类似的装置就可以观察到这种条纹，如图 6.17 所示。托兰斯基（Tolansky，1948a）做过一些简化分析。这些条纹的角直径近似为 $2\theta_n$，θ_n 遵守法布里-珀罗公式

$$2t\cos\theta_n = n\lambda \tag{6.13}$$

阿贝斯克（Aebischer，1971）对这些条纹的特性作了详细的计算分析。

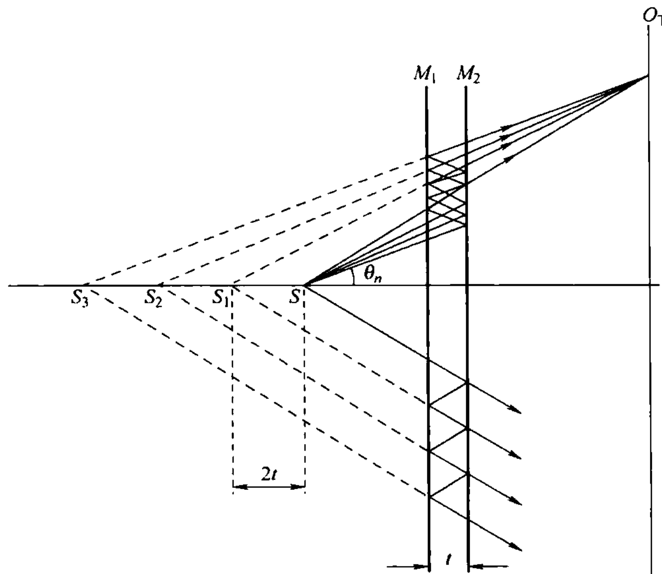
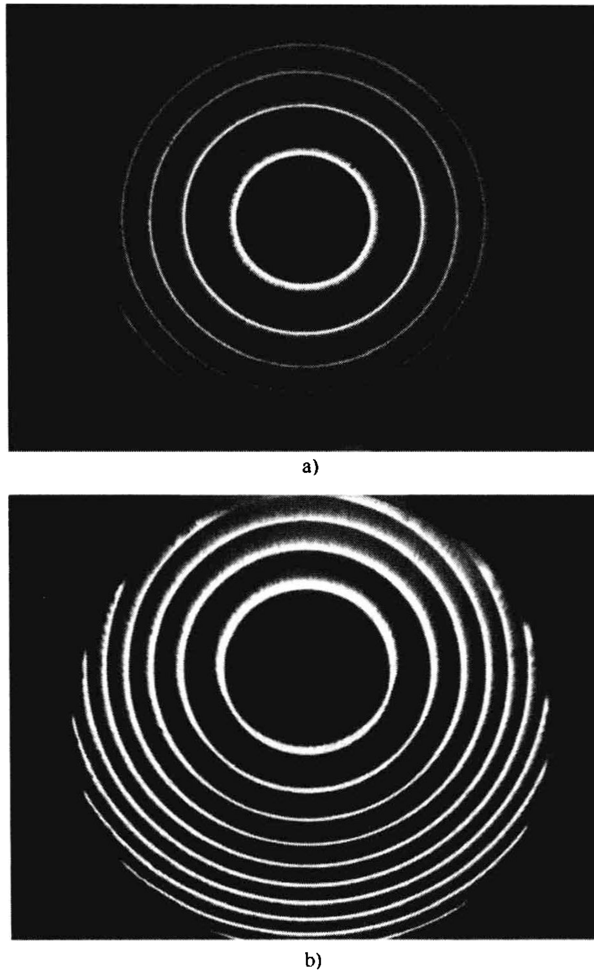


图 6.17 用点光源 S 照明法布里-珀罗镜 M_1-M_2 时在平面（O_T）处形成非定域托兰斯基条纹

托兰斯基条纹在快速调整激光器谐振腔（Bergman and Thompson，1968）和法布里-珀罗干涉仪（Ford and Shaw，1969；Roychoudhuri，1973b）时也很有用。如果这时用的是透射条纹，则应将次极大精确的调整到与主极大同心。当次极大穿过主极大时，如图 6.18a、b 所示，明显的残余倾斜误差会显示出来。可是如果用反射条纹进行调整时（很弱的次极大值，暗条纹几乎看不见），应使干涉条纹组与条纹锥的轴线（或照明的点光源）同心。

托兰斯基条纹的另一个应用是测量高质量法布里-珀罗干涉仪（或激光器谐振腔）的长期稳定性。如上所述，由被测法布里-珀罗干涉仪形成的条纹可以在远处用一个屏幕截取，以毫米为单位测出条纹的收缩（扩展）量，就可以求出以波长的若干分之一计的法布里-珀罗干涉仪的轴向膨胀（收缩）量。通过观察主条纹穿过次条纹的情况，也可测出法布里-珀罗干涉平板的倾斜量。我们已用这种技术测量过一台商品化的法布里-珀罗干涉仪（微胀合金结构）和我们自行设计的一台法布里-珀罗干涉仪（带热补偿装置的全 Cervit 结构）的长期稳定性（Roychoudhuri，1973a、1973b），后者具有更好的稳定性。



a)

b)

图6.18 某些非定域的托兰斯基条纹

a) 法布里-珀罗板是“理想”平行的 b) 法布里-珀罗板有倾斜

6.8 检验曲面用的多光束干涉仪

如在引言中提到的，检验曲面用的多光束干涉仪是由赫里奥特（Herriott，1966），海恩泽等（Heintze et al.，1967），和彼德尔斯（Biddles，1969）各自独立研制出来的。这样的干涉仪对高精度检测各种具有不同曲率的表面是非常有用的。这时将被检表面与一个合适的基准面组成一个同心系统进行比较检测。类似的干涉测量装置也适用于其他的精密测量，如在风洞和激波管等中的热梯度、压力梯度或成分梯度的高精度测量（Herriott，1966）。泽彼奥等人（Zerbino et al.，1984）扩展了多球面波前形成的干涉条纹的通常的种类。

检验曲面用的多光束干涉测量装置如图6.19所示，其中消球差标准透镜 M_1 和被检表面 M_2 组成一同心系统。点光源 S 成像在 C 处，并与透镜 L_1 同心。精确的同心后，在观察平面（O_T 或 O_R）处可看到具有理想球形的均匀波面。只要将其中一面镜子横向移动（产生直条纹）或纵向移动（产生圆形条纹）一个很小的量，就会形成一组等高线条纹。后者也可用于共焦球面法布里-珀罗干涉仪产生高色散的光谱条纹（Persin and Vukicevic，1973）。由

于这样的移动会使光束发散，所以赫里奥特（Herriott，1966）在共同中心 C 处加入了一个补偿透镜 L_2，使 M_1 成像于 M_2 上（反之亦然）。这样，各反射光线又被折回至镜面 M_1 或 M_2 上的各个原出射点，于是仍然保持了表面定位检验的能力。有关基于这种干涉仪的各种改型装置可参阅文献（Herriott，1966；Heintze et al.，1967；Biddies，1969）。文献（Rafalowski，1988、1990）报道了利用共焦球面法布里-珀罗干涉仪测量偏轴和不对称波前。

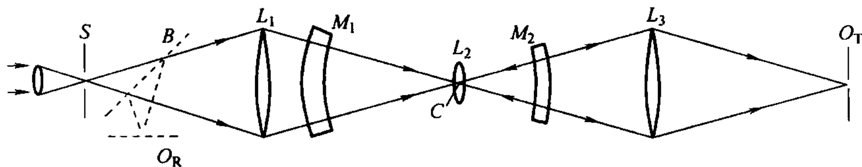


图 6.19 检验曲面用的多光束干涉测量装置（镜面 M_1 和 M_2 调整成与 C 点基本同心。透镜 L_1 使点光源 S 成像于共同中心 C 处。在透射（O_T）和反射（O_R）方向都可进行观察。透镜 L_1 使表面 M_1 成像于 M_2 上，反之亦然，以便消除光束离散这一缺陷）

这样的球面干涉仪也可用多波长（例如，几个波长）照明，使条纹间隔值从 $\lambda/2$ 缩小到 $\lambda/2n$，从而提高检验精度（在 6.5 节中讨论过）。由于这样的干涉仪通常都有较大的间距，所以一般的多纵模激光器可以通过适当匹配激光谐振腔和干涉仪的腔长来发挥其优点。在匹配谐振腔时，应当注意激光器模的间距（激光谐振腔长度）、干涉仪的自由光谱范围（干涉仪腔长度）和干涉仪的精细度。此处的匹配并不意味着要求各腔的长度相等，根据实际情况的要求，它们可以彼此成整数倍或分数倍（Herriott，1966）。在将一般的多纵模激光器用于长光程干涉仪时，必须考虑到，要获得稳定的高对比条纹存在很多困难（Batishko and Shannon，1972）。

6.9 耦合干涉仪和串联干涉仪

本节要介绍两种有意义并且很有用的改进型多光束菲佐干涉仪。第一种多光束菲佐干涉仪是将菲佐干涉仪耦合到泰曼-格林干涉仪中作为一个双干涉测量装置，如图 6.20 所示（Pastor and Lee，1968；Langenbeck，1968；Aebischer，1970）。有关这种干涉仪的详细描述可参阅加格莱特（Cagnet，1954）和加德尔（Candler，1951）的文章。第二种多光束菲佐干涉仪是用三块平板串联在一起，如图 6.22 所示，而不是像通常的菲佐干涉仪中那样用两块平板（Post，1954；Saunders，1954；Roberts and Langenbeck，1969）。

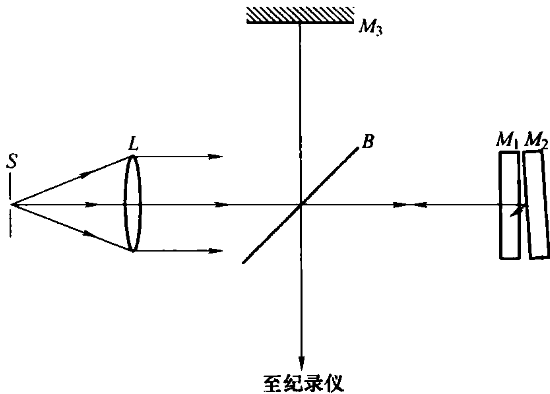


图 6.20 一个用泰曼-格林干涉仪和菲佐干涉仪耦合合成的双干涉测量装置（借以控制对比并利用菲佐干涉技术中的动态莫尔技术）

6.9.1 耦合干涉仪

耦合干涉仪集中了许多优点，它由泰曼-格林干涉仪通过把它的一面反射镜用菲佐干涉

仪代替而形成。利用菲佐干涉仪研究不透明光学平面通常有一个的缺点，那就是反射条纹为亮背景上细的暗条纹。虽然用像银膜那样的吸收较大的反射膜层时产生的对比度是很差的（Tolansky，1948a；Schulz，1951b），但是这本身并不是主要的问题。而为获得优质菲佐干涉条纹而必须遵守的托兰斯基条件（式（6.9））要求视场内只能有很稀少的干涉条纹，正如前面指出的那样，由于干涉条纹很细，大部分区域内没有提供任何信息（解决这个问题的几个办法已在6.4和6.5节中讨论过）。用白光（6.4节）或多波长光线照明（6.5节）的办法不适用于反射条纹的情况，因为由一种波长产生的很亮的背景将冲淡另一种波长产生的很细的暗条纹。利用反射菲佐干涉条纹研究不透明表面时固有的问题，可以通过这种双干涉仪（参见图6.20）得到解决。这种双干涉仪能使比对反转，并且在反射菲佐干涉中可得到与透射类似的条纹（Pastor and Lee，1968）。但是，在这样的耦合干涉仪中，要求参考面（菲佐臂的）、泰曼镜面、分光镜及平行光束都必须有很好的光学质量。

这种耦合干涉仪的其他优点已由兰格贝克（Langenbeck，1968）做过详细介绍，这里将只提及它的主要优点。众所周知，在适当的条件下，利用莫尔干涉技术可以提高检验灵敏度（详见第12章内容），这时是将检验干涉图叠加到一个合适的基准参考图上。如果基准参考图中已经包含有干涉仪本身的固有像差（例如由泰曼-格林干涉仪的分光镜引入的误差），则显示出来的将是只有绝对误差的莫尔干涉图。这样的参考基准可以实时的从双干涉仪的一个臂的菲佐楔中得到。这种“实时”条纹还有另外一个很有用的优点，根据合成干涉图可以直接判断出表面偏差的绝对方向（“峰”和“谷”），尤其是如果将菲佐干涉条纹当做参考的莫尔光栅时（因为参考条纹的级次是直接知道的）。这些可由图6.21中兰格贝克（Langenbeck，1968）的照片得到解释。

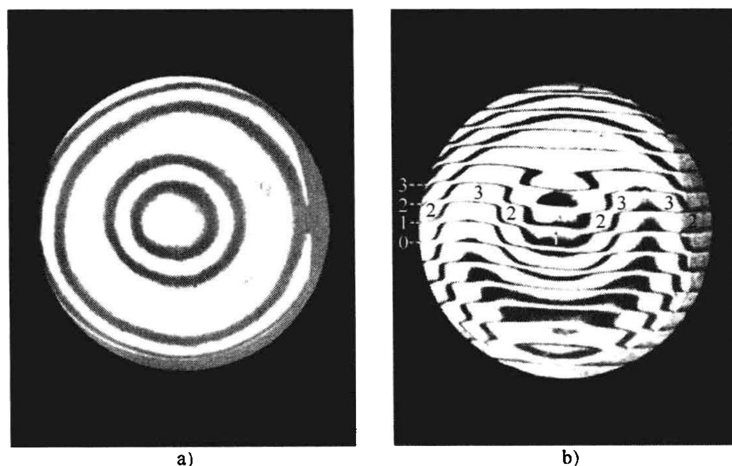


图6.21　兰格贝克的照片

a）一个变形反射镜的泰曼-格林干涉图（同心圆条纹表示的可能是高的，也可能是低的区域）

b）条件相同，但根据叠加的楔形场可确定干涉级的方向

最近，吉伦和顾哈（Gillen and Guha，2005）阐述了双干涉仪（迈克耳逊干涉仪和法-珀干涉仪）使用的基本规律，使用双干涉仪独立的测试基底的厚度和反射率，此时把基底作为一可用的平行平板。斯克维德（Schwider，1968）已阐述了一种重叠剪切干涉仪（SFSI），它是通过FP标准器和剪切平板的组合测试复杂的、单个稳定状态下的显微物镜的像差。后来斯克维德（Schwider，1997）发展了这一概念应用到白光菲佐干涉仪，其照明光

束通过 FP 标准器。当 FP 标准器平板中的空气间距和菲佐平板的空气间距相等时，可以参考光程差（OPD）为零的条纹而很方便的利用干涉条纹的级次。

6.9.2 串联干涉仪

在用于测量光学平板均匀性的第二种改进型菲佐干涉仪中，被检平板置于在两块参考菲佐镜之间，如图 6.22 所示。这样的装置对检验高质量的分光镜具有重要的价值，它的功能既保证了波面无畸变的反射，也保证了无畸变的透射。因此，仅仅检验分光镜反射面的表面平面度误差是不够的。当被检平板位于观察者一侧，同时存在面形误差时，则仅仅根据反射菲佐干涉条纹还不能直接测出折射率的变化。由于相干光束在这样的三平板干涉仪中多次通过被检平板，所以折射率变化量或均匀性测量的灵敏度得到了大大的提高。这种干涉仪已被其发明者分别命名为“珠链式干涉仪”（Saunders，1954）和“串联干涉仪”（Post，1954）。

本章引用的参考文献介绍了这类干涉仪中每块平板的各种不同使用条件和反射率要求。在较新的文献中，沿着类似的思路研究此问题的还有阿斯通和玛坎特（Ashton and Marchant，1967）以及罗伯特斯和兰格贝克（Roberts and Langenbeck，1969），后者介绍了如何计算出折射率差值小于 10^{-6} 的等折射率曲线图。

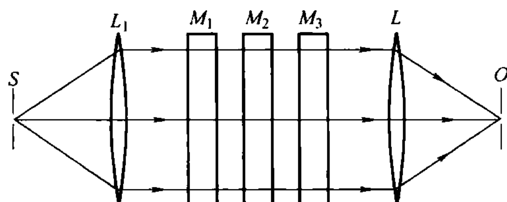


图 6.22 用于精密检测平板（M_2）均匀性的串联式干涉仪

6.10 全息多光束干涉仪

光学零件的全息干涉检验法的优点将在第 12 章中进行介绍。当选定全息干涉测量法后，利用全息图再现许多波面，并彼此合成明锐的多光束干涉条纹，就可以得到与多光束干涉技术相当的精度。全息干涉检验法可以通过由非线性记录的全息图产生若干较高级次的再现光束来实现。玛特萨默托（Matsumoto，1969）和布兰达尔（Bryngdahl，1969）介绍过这样的技术，他们用这种技术记录了单波长照明的一次曝光全息图。这个方法的一个明显的优点是可从被检物体的漫反射面得到多光束菲佐干涉条纹。

布奇等人（Burch et al.，1966）提出了另外一种不同的方法。他们采用线性全息记录，但在改变物体的方位时进行多次曝光。多次曝光也可通过改变照明方向或用多波长照明得到而不用改变物体的方位。但在准备进行还存在一定困难的多光束全息检验以前，首先应当明确采用带有高质量干涉条纹检测装置的简单双光束干涉技术是否能满足精度的要求。

6.11 法布里-珀罗干涉条纹近代的发展和应用

随着反射镜复杂的镀膜、抛光、和调校技术的发展，我们已经可以获得超过 0.9999 的高反射率和超过 10 000 的精细度的法-珀系统。这个超高精细度的法-珀干涉仪在各种专门的应用领域已成为关键的工具，比如在重力波前探测（LIGO），通过称为 CRDS 的方法（腔内光谱衰减法）的空气痕量探测（Casaes et al.，2002），和对微型腔量子电气力学的研究（Kimble，1994；Blais et al.，2004）。表面质量和反射镜调校的光学测量是一个艰巨的任务，

但法-珀干涉仪的使用完成了这一任务（Herbelin，1980；Itoh，2001）。事实上，哈伯林等人基于调制激光束，利用测量超精细度法-珀干涉仪的长光子寿命来测量高反射率、低吸收和散射损耗等参数。后来这个基本的概念也被重新（O' Keefe and Deacon，1988）用于法-珀腔内非常低的空气浓度的超精密测量。

在6.3.1节中，我们已经强调了在大型的法-珀干涉仪中多次反射的光束可以有效地终止在 $n=N$ 时，N 为精细度，其表达式见式（6.3），因为光束携带的能量经过 N 次反射后变得非常微弱，并可以忽略。我们将从数值上证明它。光束的光强经 n 次传输后相对于第一次的光强的相对减小量 b 为

$$b=I_n/I_1=T^2R^{2n}/T^2 \qquad \ln b=2n\ln R \tag{6.14}$$

为了使高精细度的 FP 在反射率 R 从0.9000到0.9999范围内获得适当的光强的相对减小量，经过 N 次传输后的相对强度会近似的相对减少到 $b=1.87\times10^{-3}$。所以，通过较大次数 N 的传输后，可以安全地终止大型 FP 内的光束传输，并且标准化强度能形成作为一个通过复杂的变化乘积后的强度系列，光束传输的幅值可经式（6.1）计算得到

$$\begin{aligned}I_{cw}(\nu,\tau)&\cong\left(\sum_{n=0}^{N-1}TR^m e^{i2\pi n\nu\tau}\right)\left(\sum_{m=0}^{N-1}TR^n e^{-i2\pi m\nu\tau}\right)\\&=\sum_{n=0}^{N-1}T^2R^{2n}+2\sum_{n\neq m}^{N-1}T^2R^{n+m}\cos[2\pi(n-m)\nu\tau\end{aligned} \tag{6.15}$$

我们已从数值上证明了式（6.5）能精确地代表传统的 FP 式（6.1），并作为大量对比度（条纹清晰度）变化的余弦条纹的重叠计算式。我们现在应该认识到高精细度的 FP 的重要性，FP 条纹的定量表示需要一定时间 τ_0 直到 FP 已能够产生 N 次传输光束。因此，我们为 FP 定义了一个非常重要的参数，特征时间常数 τ_0（Kastler，1974；Roychoudhuri，1975），

$$\tau_0=N\tau \tag{6.16}$$

在光束突然开始照射时，需要时间常数 τ_0 被用来形成 FP 稳定的干涉图。利用短周期的脉冲光源的周期可用性和高速的探测器，超高精细度的 FP（大的常数 τ_0）的使用需要简单经典的可理解的 FP 条纹的形成过程。如果入射光束 $a(t)\exp[i2\pi\nu t]$ 是一个有限周期的脉冲 δt，根据式（6.15），随时间的改变，传输强度可用式（6.17）表示（Roychoudhuri et al.，2003；Roychoudhuri，2004）

$$\begin{aligned}I'_{pls}(t,\nu,\tau)&=\left|\sum_{n=0}^{N-1}a(t-n\tau)TR^n e^{i2\pi\nu(t-n\tau)}\right|^2\\&=\sum_{n=m=0}^{N-1}T^2R^{2n}a^2(t-n\tau)+2\sum_{n>m}T^2R^{n+m}a(t-n\tau)a(t-m\tau)\cos[2\pi(n-m)\nu\tau]\end{aligned} \tag{6.17}$$

经过 N_R 次重复脉冲光束的完整传输积分后

$$I_{pls}(\nu,\tau)=\sum_{n=0}^{N-1}T^2R^{2n}+2\sum_{n\neq m}^{N-1}T^2R^{n+m}\gamma(|n-m|\tau)\cos[2\pi(n-m)\nu\tau] \tag{6.18}$$

这里，$\gamma(\tau)$ 是在第 m 次和 n 次重复脉冲之间的标准的自相关函数，此时脉冲宽度 $a(t)$ 为理论上的无穷大。我们已经发现在数值上它会超过 $\tau_0=N\tau$。

$$\underset{\delta t\to\tau_0=N\tau}{Lt}[I_{pls}(\nu,\tau)]\cong I_{cw}(\nu,\tau) \tag{6.19}$$

这是一个非常重要的结果，因为通过很简单的数学关系式就说明了积分干涉图形成的通常的时间，这里的积分干涉图是用来为脉冲光束会聚形成一个标准的连续波干涉图（译者

注：原文为 CW- continous wave)（从式（6.15）到式（6.18））；这可以认识到 FP 是一对光束分光器，它复制入射脉冲光束进入有一个 τ 的时间延迟的 N_R 高效脉冲传输过程。我们不需要使这个简单的物理图像变得更复杂，如果通过引入时间-频率的傅里叶变换，那样会在入射光线的实际的载波频率和变换脉冲的数学傅里叶频率之间产生混乱。因此，如果入射脉冲的带宽超过 FP 的特征时间常数，它就产生类似的 CW 条纹；否则这个条纹变得比有 γ（τ）因子的 CW 条纹还要宽。

这里的 $\gamma(\tau)$ 代表了条纹对比度的减少，这个减少由于不相等的幅值的物理重叠（脉冲转化）。在极端的情况 $\delta t<\tau$，不管脉冲的载波频率是在 FP 腔中振荡或不振荡，一个快速响应的探测器只能探测到对于较小重叠的指数衰减的脉冲序列。不相重叠脉冲序列的最后的一个例子，如图 6.23c 所示。它能用式（6.7）表示，它忽略了因为重叠的缺失引起的截项

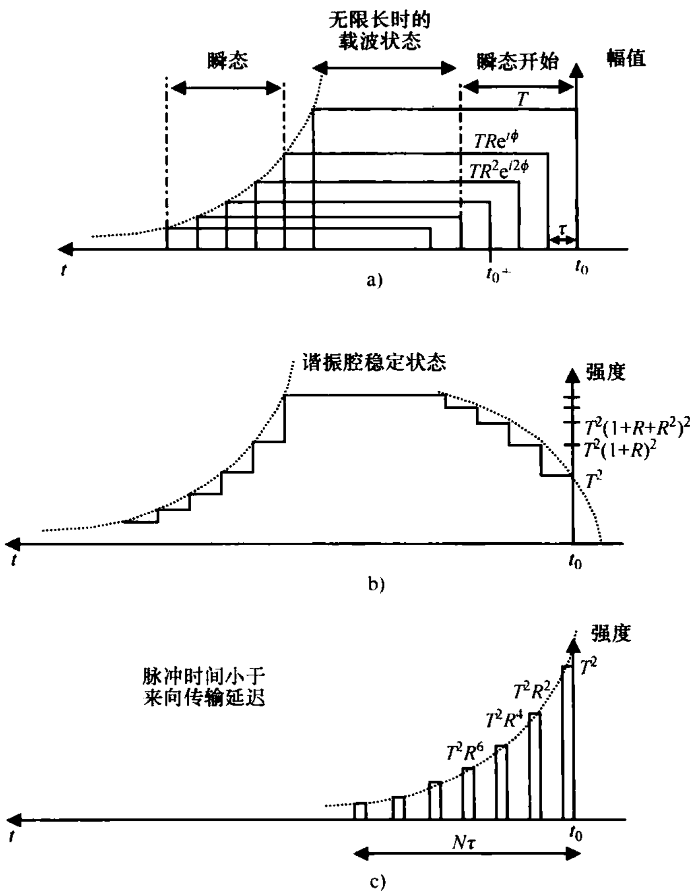


图 6.23 一对光束分光镜产生一连串延迟，使单个同一脉冲幅值减小。δt 为脉冲宽度，相对 FP 传输时间为 $\tau=2d/c$，它决定了 FP 中迭加脉冲的实时物理重叠的级数。对 δt-τ 曲线，幅值的重叠部分在图 a 中进行了描述，相对应的，FP 谐振腔中合成强度的传输在图 b 进行了表述（$2d=m\lambda$）。当 $\delta t>\tau$ 长时，可得到一个非常稳定的状态或 CW 干涉。当 $\delta t<<\tau$ 时，在一连串脉冲之间没有物理交迭，这在图 c 中进行了表述。在没有重叠的地方，传输强度的峰值由单一的可复制的脉冲的平方给出；往返相位的变换不再有效，并且谐振腔不再能提高传输效率（Lee，2005）

$$I_{pls}(t,\nu) = T^2 \sum_n R^{2n} a^2(t) \tag{6.20}$$

如果只考虑峰值能量，那在峰值的 a^2 是一个定值，并且强度减小随时间的关系可用式（6.21）表示

$$\ln|I_{pls}(t=n\tau)|_{peak} = \ln[a^2 T^2 R^{2n}] = (2\ln R)n + 2\ln(aT) \tag{6.21}$$

如果式（6.21）不计脉冲数 n，这会得到一根斜率为（$2\ln R$）和截取（$2\ln(aT)$）部分的一条直线。既然有

$$T + R + A = 1 \tag{6.22}$$

其中，A 代表吸收和散射的损失，那么可以采用单个的短脉冲来定义 FP 反射镜的特性或经过空气时的吸收损失，如果它的吸收频率与入射脉冲光束的载波频率相匹配的话。从概念上讲，这是利用可调谐激光器（Herbelin et al.，1980）和成功的 CRDS 技术（O’ Keefe and Deacon，1988）表现 FP 反射镜特性。读者需要注意，这里的 $\tau_0 = N_R\tau$ 不是 FP 的光子寿命，虽然非常相似，正如文献中通常定义的采用短脉冲光束的 FP。我们已经定义它为 FP 的时间常数，用来代表实际的物理时间周期，在这个时间范围内有用的 NR 脉冲通过一对 FP 反射镜产生。

6.12 结束语

在可比较的处理环境下，多光束干涉仪比双光束干涉仪有更高的表面面形测量精度。然而，多光束干涉仪对光源的相干性和试验条件的要求会消耗更高的成本和更多的时间，所以它很少用在日常的只需要 $\lambda/10$ 的测量精度的车间的检验中。在表面质量测量精度要求高于 $\lambda/50$ 时，更有效的方法是采用 FP 干涉原理的各种多光束干涉仪和等彩色序列条纹的多光束菲佐干涉仪。多光束干涉仪在很多领域是独一无二的理想的测量设备。历史上的第一个的例子是利用多光束菲佐干涉仪测量表面微观面形（Bennett and Bennett，1967）。然而，读者可能更感兴趣的是利用双光束干涉仪表面粗糙度测量（Eastman，1980），其测量精度算术均方根为 20Å（rms），这里采用了压电扫描装置的干涉仪。法-珀干涉仪更普遍的应用是在测量精度要求 $\lambda/200$ 或更高的 FP 平板或稳定的标准具（Hariharan et al.，1984；Hernandez，1988）的检测方面。科林等人（Killeen et al.，1981）描述了接触的标准具的平行度测量。现代电子工业需要具有胶结的光学平面、大尺寸和可高精度微调小尺度空间的硅晶片。瑞等人（Rhee et al.，1990）成功地开发了 FP 干涉测量的基本原理。

将光栅作为双反射镜结构的一个平面反射镜的多光束干涉仪已发展到专门的应用领域。其中一些有用的例子可参阅文献（Bates and Li，1986；Rodriguez-Zurita et al.，1998）。法-珀干涉仪和双光束干涉仪的组合可巧妙地用于高精度空气的厚度的测量（Schwider，1979）。多光束干涉条纹的处理精度也可以利用全息的方法计算，它非常适合于显微物镜的实时变形测量（Shaalan and Jonathan，1978）。

有时，四光束和三光束干涉仪也很有用。四光束菲佐干涉仪用来对表面的无接触测量（Ma kosch and Jaerisch，1978），此时利用了一光栅作为参考平面。三光束朗奇干涉仪用来对主镜像差的测量具有一定优势（Lin and Cowley，1986）。镀有感光材料的曲率表面的应变通过三光束全息干涉测量技术完成了测量（Chiang and Kim，1984）。

值得注意的是，各种各样的多光束法-珀干涉仪的应用技术已取得了迅速的发展，它已超过了本书讨论的范围。全部的设备小型化要求已成为通用技术发展的动力。随着布拉格光

纤光栅、微光电机械学（MOEMS）和微光子学的发展，法-珀干涉仪也正向微型光学系统集成化发展。如此微型化的法-珀干涉仪的测量将会是下一个挑战性的工作。

参考文献

Acbischer N., "Etudes d'Interférences en Ondes Multiples par Diagramme Coplexe Visualiser les Franges en Réflexion." *Nouv. Rev. Opte. Appl.*, **1**, 233 (1970).

Aebischer N., "Calculs de Profils Dissymetriques Observables sur des Figures d'Interférences en Ondes Multiples Sphériques," *Nouv. Rev. Opte. Appl.*, **2**, 351 (1971).

Airy G., *Mathematical Transactions*, 2nd ed., 1836, p. 301. (obtainable from Library of British Museum, London).

Ashton A. and A. C. Marchant, "Note on the Testing of Large Glass Panels," *Opt. Acta*, **14**, 203 (1967).

Baird K. M., "Interferometry: Some Modern Techniques," in *Advances in Optical Techniques*, A. C. S. Van Heel, Ed., North-Holland, Amsterdam, 1967, Chap. 4.

Baird K. M. and G. R. Hanes, "Interferometers," in: *Applied Optics and Optical Engineering*, vol. IV, R. Kingslake, Ed., Academic Press, New York, 1967, Chap. 9.

Barakat N., A. S. Farghaly, and A. Abd-El-Azim, "Studies on Multiple-Beam Interference Fringes Formed on High Order Planes of Localization: Intensity Distribution and Fringe Shift between Successive Planes of Localization," *Opt. Acta*, **12**, 205 (1965).

Bates B. and Y. Li, "Multiple-Beam Grating Interferometry: A Comparison of Techniques Applied to the Measurement of Coating Thickness," *Appl. Opt.*, **25**, 835–836 (1986).

Batishko C. R. and R. R. Shannon, "Problem in Large-Path-Difference Laser Interferometry," *Appl. Opt.*, **11**, 195 (1972).

Benedetti-Michelangeli G., " New Technique for the Evaluation of the Quality of Plane Surfaces," *Appl. Opt.*, **7**, 712 (1968).

Bennett H. E. and J. M. Bennett, "Precision Measurements in Thin Film Optics,' in: *Physics of Thin Films*, vol. IV, G. Hass and R. F. Thun, Eds., Academic Press, New York, 1967, Chap. 1.

Bennett J. M., "Measurement of the RMS Roughness, Autocovariance Function and Other Statistical Properties of Optical Surfaces Using a FECO Scanning Interferometer, *Appl. Opt.*, **15**, 2705 (1976).

Bergman T. G. and J. L. Thompson, "An Interference Method for Determining the Degree of Parallelism of Laser Surfaces," *Appl. Opt.*, **7**, 923 (1968).

Bhatnagar G. S., K. Singh, and B. N. Gupta, "Transmission Profile of a Fabry-Perot Interferometer Suffering from Asymmetric Surface Defects," *Nouv. Rev. Opt.*, **5**, 237 (1974).

Biddies B. J., "A Non-contacting Interferometer for Testing Steeply Curved Surfaces," *Opt. Acta*, **16**, 137 (1969).

Blais A., R-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girrin, and R.J. Schoelkopf, "Cavity quantum electrodynamics for superconducting Electrical Circuits: An Architectecture for Quantum Computation," *Phys. Rev. A*, **69**, 062320 (2004).

Boersch H., H. J. Eichler, M. Pfundstein, and W. Wisemann, "Measurement of Length Shifts Down to 10^{-5} Å with a Three-Mode Laser," *IEEE J. Quantum Electron*, **QE-10**, 501 (1974).

Bom M. and E. Wolf, *Principles of Optics*, 5th ed., Pergamon, Oxford, 1975.

Boulouch M. R., "Dedoblement des Franges d'Interférence en Lumiére Naturelle," *J. Phys.*, 3rd series, **2**, 316 (1893).

Boyd G. D. and J. P. Gordon, "Confocal Multimode Resonator for Millimeter through Optical Wavelength Masers," *Belt Syst. Tech. J.*, **40**, 489 (1961).

Briers J. D. "Interferometric Testing of Optical Systems and Components: a Review," *Opt. Laser Technol.*, **4**, 28 (1972).

Brossel J., "Multiple-Beam Localized Fringes. I: Intensity Distribution and Localization II: Conditions of Observation and Formation of Ghosts," *Proc. Phys. Soc*, **59**, 224, 234 (1947).

Bruce C. F. and F. P. Sharpless, "Relative Flatness Measurement of Uncoated Optical Flats," *Appl. Opt.*, **14**, 3082 (1975).

Bryngdahl O., "Multiple-Beam Interferometry by Wavefront Reconstruction," *J. Opt. Soc. Am.*, **59**, 1171 (1969).

Bünnagel R., H. A. Oehring, and K. Steiner, "Fizeau Interferometer for Measuring the Flatness of Optical Surfaces," *Appl. Opt.*, **7**, 331 (1968).

Burch J. M., A. E. Ennos, and R. J. Wilton, "Dual- and Multiple-Beam Interferometry by Wavefront Reconstruction," *Nature*, **209**, 1015 (1966).

Cagnet M., "Méthodes Interférométriques Utilisant les Franges de Superposition," *Rev. Opt.*, **33**, 1, 113, 229 (1954).

Casaes R., J. P. Provencal, and R. J. Saykally, "High Resolution Pulsed Infrared Cavity Ring Down Spectroscopy: Application to Laser Ablated Carbon Clusters," *J. Chem. Phys.*, **116**, 6640–6647 (2002).

Candler C, *Modern Interferometers*, Hilger and Watts, London, 1951.

Chabbal R., "Recherche des Meilleures Conditions d'Utilisation d'un Spectromètre Photoelectrique Fabry–Perot," *J. Rech. Cent. Nat. Rech. Sci.*, **24**, 138 (1953).

Chabbal R., "Finese Limite d'un Fabry–Perot Forme de Lames Imparfaites," *J. Phys. Radium.*, **19**, 295 (1958).

Chiang F. P. and C. C. Kin, "Three-Beam Interferometric Technique for Determination of Strain of Curved Surfaces," *Opt. Eng.*, **23**, 766–768 (1984).

Clapham P. B. and G. D. Dew, "Surface Coated Reference Flats for Testing Fully Aluminized Surfaces by Means of a Fizeau Interferometer," *J. Sci. Instrum.*, **44**, 899 (1967).

Connes P., "L'Etalon de Fabry–Perot Spherique," *J. Phys. Radium*, **19**, 262 (1958).

Cook A. H., *Interference of Electromagnetic Waves*, Clarendon Press, Oxford, 1971.

Dew G. D., "A Method for Precise Evaluation of Interferograms," *J. Sci. Instrum.*, **41**, 160 (1964).

Dew G. D., "The Measurement of Optical Flatness," *J. Sci. Instrum.*, **43**, 409 (1966).

Dyson J., "Optics in a Hostile Environment," *Appl. Opt.*, **7**, 569, (1968).

Eastman J. M., "Effects and Measurement of Scattering and Absorption of Thin Films," *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, **50**, 43 (1975).

Eastman J. M., "The Scanning Fizeau Interferometer: An Automated Instrument for Characterizing Optical Surfaces," *Opt. Eng.*, **19**, 810–814 (1980).

Eastman J. M. and P. W. Baumeister, "Measurement of the Microtopography of Optical Surfaces Using a Scanning Fizeau Interferometer," *J. Opt. Soc. Am.*, **64**, 1369A (1974).

Fabry C. and A. Perot, "Sur les Franges des Lames Minces Argentées et Leur Application a la Mesure de Petites Epaisseurs d'Air," *Ann. Chim. Phys.*, **12**, 459 (1897).

Fizeau M. H. "Recherches sur les Modifications que Subit la Vitesse de la Lumiére dans le Verre ct Plusieurs," *Ann. Chim. Phys.*, **66**, 429 (1862a).

Fizeau M. H., "Recherches sur les Modifications que Subit la Vitesse de la Lumiére dans le Verre et Plusieurs Autres Corps Solides sous L'Influence de la Chaleur," C. *R. Acad. Sci. Paris*, **54**, 1237 (1862b).

Ford D. L. and J. H. Shaw, "Rapid Method of Aligning Fabry-Perot Etalons," *Appl. Opt.*, **8**, 2555 (1969).

Fox A. G. and T. Li, "Resonant Modes in a Master Interferometer," *Bell Syst. Tech. J.*, **40**, 453 (1961).

Gillen G. D. and S. Guha, "Use of Michelson and Fabry–Perot interferometry for independent determination of the refractive index and physical thickness of wafers," *Appl. Opt*, **44**, 344–347 (2005).

Hanes G. R., "Limiting Precision in Optical Interferometry," *Can. J. Phys.*, **37**, 1283 (1959).

Hanes G. R., "Quantum Limit to Precision of Wavelength Determination," *Appl. Opt.*, **2**, 465 (1963).

Hariharan P., "Optical Interferometry," *Rep. Prog. Phys.*, **54**, 339–390 (1991). doi: 10.1088/0034-4885/54/3/001.

Hariharan P. B., F. Oreb, and A. J. Leistner, "High Precision Digital Interferometry: Its Application to the Production of An Ultrathin Solid Fabry-Perot Etalon," *Opt. Eng.*, **23**(3), 294–297, (1984).

Heintze L. R., H. D. Polster, and J. Vrabel, "A Multiple-Beam Interferometer for Use with Spherical Wavefront," *Appl. Opt.*, **6**, 1924 (1967).

Heisenberg W., *The Physical Principles of the Quantum Theory*, Dover, New York, 1949.

Hillebrands B., "Progress in Multipass Tandem Fabry-Perot Interferometry: 1. A Fully Automated, Easy to Use, Self-Aligning Spectrometer with Increased Stability and Flexibility," *Rev. Sci. Instrum.*, **70**, 1589–1598 (1999).

Herbelin J. M., J. A. McKay, M. A. Kwok, R. H. Ueunten, D. S. Urevig, D. J. Spencer, and Benard DJ., "Sensitive Measurement of Photon Life Time and True Reflectances in an Optical Cavity by a Phase-shift Method," *Appl. Opt.*, **19**, 144 (1980).

Hernandez G., *Fabry–Perot Interferometers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

Herriott D. R., "Multiple-Wavelength Multiple-Beam Interferometric Observations of Flat Surfaces," *J. Opt. Soc. Am.*, **51**, 1142 (1961).

Herriot D. R., "Spherical-Mirror Oscillating Interferometer," *Appl. Opt.*, **2**, 865 (1963).

Herriot D. R., "Long-Path Multiple-Wavelength Multiple-Beam Interference Fringes," *J. Opt. Soc. Am.*, **56**, 719 (1966).

Hill R. M., "Some Fringe-Broadening Defects in a Fabry–Perot Etalon," *Opt. Ada*, **10**, 141 (1963).

Hill R. M. and C. F. Bruce, "Limiting Precision in a Scanning Optical Interferometer," *Aust. J. Phys.*, **15**, 194 (1962).

Hodgkinson I. J., "A Method for Mapping and Determining the Surface Defects Function of Pairs of Coated Optical Flats," *Appl. Opt.*, **8**, 1373 (1969).

Hodgkinson I. J., "The Application of Fringes of Equal Chromatic Order to the Assessment of the Surface Roughness of Polished Fused Silica," *J. Phys.*, **E3**, 300 (1970).

Itoh S-L, Y. Yamazaki, K. Katoh, and J. Chen, "High Precision Testing Method for Fabry–Perot Etalon," Optical Review **8**, 179–183 (2001).

Jacquinot M. P., "New Developments in Interference Spectroscopy," *Rep. Prog. Phys.*, **23**, 267 (1960).

Jenkins F. A. and H. E. White, *Fundamentals of Optics*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1957.

Kastler A. "Transmission d'une Impulsion Lumineuse par un interféromètre Fabry–Perot", *Nouv. Rev. Opt.*, **5**, 133–139 (1974).

Killeen T. L., P. B. Hays, and J. DeVos, "Parallelism Maps for Optically Contacted Etalons," *Appl. Opt.*, **20**, 26116–26119 (1981).

Kimble H., Cavity Quantum Electrodynamics, Academic Press, San Diego, 1994.

Kinosita K., "Numerical Evaluation of the Intensity Curve of a Multiple-Beam Fizeau Fringe," *J. Phys. Soc. Jap.*, **8**, 219 (1953).

Koehler W. F., "Multiple-Beam Fringes of Equal Chromatic Order. I: Phase Change Considerations. II: Mechanism of Polishing Glasses," *J. Opt. Soc. Am.*, **43**, 738, 743 (1953).

Koehler W. F.. "Multiple-Beam Fringes of Equal Chromatic Order. IV: Use of Multilayer Film," *J. Opt. Soc. Am.*, **45**, 934 (1955a).

Koehler W. F., "Multiple-Beam Fringes of Equal Chromatic Order. VII: Mechanism of Polishing Glass," *J. Opt. Soc. Am.*, **45**, 1015 (1955b).

Koehler W. F. and A. Eberstein, "Multiple-Beam Fringes of Equal Chromatic Order. III: The Cleavage of Topaz," *J. Opt. Soc. Am.*, **43**, 747 (1953).

Koehler W. F. and W. C. White, "Multiple-Beam Fringes of Equal Chromatic Order. V: Fringe Fine Structure; VI: Method of Measuring Roughness," *J. Opt. Soc. Am.*, **45**, 940, 1011 (1955).

Koppelmann G., "Eine beugungsbedingte Auflösungsgrenze in der Mehrstrahl-Interferometrie," *Opt. Acta*, **13**, 211 (1966).

Koppelmann G., "Multiple-Beam Interference and Natural Modes in Open Resonators," in: *Progress in Optics*, vol. VII, E. Wolf, Ed., Wiley-Interscience, New York, 1969, Chap. 1.

Koppelmann G. and K. Krebs, "Eine Registriermethode zur Vermessung der Reliefs höchsterbener Oberflächen," *Optik*, **18**, 349 (1961).

Kuhn H., "New Technique in Optical Interferometry," *Rep. Phys. Soc. Prog. Phys.*, **14**, 80 (1951).

Lang J. and G. Scott, "Resolution Limits in Multiple-Beam Interferometry," *J. Opt. Soc. Am.*, **58**, 81 (1968).

Langenbeck P., "Optical Wavefront Mapping by Dual Interferometry," *J. Opt. Soc. Am.*, **58**, 499 (1968).

Langenbeck P., "Fizeau Interferometer–Fringe Sharpening," *Appl. Opt.*, **9**, 2053 (1970).

Laurent L., "Sur Phisieurs Appareils d'Optique, Destinés à Controler les Surfaces Planes: Parallèles, Perpendiculaires et Obliques," *C. R. Acad. Sci. Paris*, **96**, 1035 (1883).

Lee D., "A Comprehensive View of Temporal Domain Interference and Spectral Interpretation of Short Pulses," Ph. D. Thesis, 2005, University of Connecticut.

LIGO, "Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory," www.ligo.caltech.edu

Lin J.-A. and J. M. Cowley, "Aberration Analysis by Three-Beam Interferograms," *Appl. Opt.*, **25**, 2245–2246 (1986).

Logan J. L., "Gravitational Waves–A Progess Report," *Phys. Today*, March, 44 (1973).

Makosch, G. and W. Jaerich, "Mapping of Optical Surfaces with Quarter Wavelength Fringes," **17**, 744–747, **17**, 1990–1991 (1978).

Malacara D., A. Cornejo, and M. V. R. K. Murty, "Bibliography of Various Optical Testing Methods," *Appl. Opt.*, **14**, 1065 (1975).

Matsumoto K., "Holographic Multiple-Beam Interferometry," *J. Opt. Soc. Am.*, **59**, 777 (1969).

Moos H. W., G. F. Imbusch, L. F. Mollenauer, and A. L. Schawlow, "Tilted-Plate Interferometry with Large Plate Separations," *Appl. Opt.*, **2**, 817 (1963).

Moss G. E., L. R. Miller, and R. L. Forward, "Photon-Noise-Limited Laser Transducer for Gravitational Antenna," *Appl. Opt.*, **10**, 2495 (1971).

Murty M. V. R. K., "Multiple-Pinhole Multiple-Beam Interferometric Observation of Flat Surfaces," *Appl. Opt.*, **1**, 364 (1962).

O'Keefe A. and D. A. G. Deacon, "Cavity Ring-down Optical Spectrometer for Absorption Measurements using Pulsed Laser Sources," *Rev. Sci. Instrum.* **59**, 2544–2551 (1988).

Pastor J. and P. H. Lee, "Transmission Fringes in Reflection Multiple-Beam Interferometry," *J. Opt. Soc. Am.*, **58**, 149 (1968).

Persin A. and D. Vukicevic, "Block Defocused Spherical Fabry-Perot Interferometer," *Appl. Opt.*, **12**, 275 (1973).

Pilston R. G. and G. N. Steinberg, "Multiple-Wavelength Interferometry with Tunable Source," *Appl. Opt.*, **8**, 553 (1969).

Polster H. D., "Multiple-Beam Interferometry," *Appl. Opt.*, **8**, 522 (1969).

Post D., "Characteristics of the Series Interferometer," *J. Opt. Soc. Am.*, **44**, 243 (1954).

Rafalowski M., "Testing the Coma of Decentration With a Confocal Fabry-Perot Interferometer," *Appl. Opt.*, **27**, 3046–3050 (1988).

Rafalowski M., "Precise Testing of Asymmetric Wavefronts With an Inverting Interferometer," *Appl. Opt.*, **29**, 1477–1481 (1990).

Raymond O. J., "Limiting Fringe Pointing Precision in a Scanning Two-Beam Interferometry," *Appl. Opt.*, **9**, 1140 (1970).

Rhee I., F. M. Gasparini, A. Petrou, and D. J. Bishop: "Si Wafers Uniformly Spaced; Bonding and Diagnostics," *Rev. Sci. Instrum.*, **61**, 1528–1536 (1990).

Roberts F. E. and P. Langenbeck, "Homogeneity Evaluation of Very Large Disks," *Appl. Opt.*, **8**, 2311 (1969).

Rodriguez-Zurita., G. J., Pedraza-Contreras, R. Pastrana-Sánchez, A. Cornejo-Rodriguez and F. Vázguez-Castillo, "Multiple-Beam Interference with Wear-Grazing Wavesi Dielectric Wedges: Monochromatic and Polychromatic Cases," *Rev. Mex. Phys.*, **44**, 147–154 (1998).

Rosier F. L., "Mapping of High Quality Optical Flats without Reflection Coating," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 471 (1962).

Roesler F. L. and W. Traub, "Precision Mapping of Pairs of Uncoated Optical Flats," *Appl. Opt.*, **5**, 463 (1966).

Rogers J. R.: "Fringe Shifts in Multiple Beam Fizeau Interferometry," *J. Opt. Soc. Am.*, **72**, 638–643 (1982).

Roychoudhuri C, "Brillouin Spectra of CaF_2 Microcrystals Using a Stable 3-Pass Fabry-Perot Interferometer," *Appl. Phys. Lett.*, **23**, 543 (1973a).

Roychoudhuri C, *Multi-pass Fabry-Perot Interferometer for Brillouin Scatter Measurements*, Ph.D. Thesis, University of Rochester, New York, 1973b; University Microfilms No. 74-14413.

Roychoudhuri C, "Dynamic and Multiplex Holography with Scanning Fabry-Perot Fringes," *Opt. Commun.*, **10**, 160 (1974).

Roychoudhuri C, "Response of Fabry-Perot Interferometers to Light Pulses of Very Short Duration," *J. Opt. Soc. Am.*, **65**, 1418 (1975).

Roychoudhuri C. and M. Hercher, "Stable Multi-pass Fabry–Perot Interferometer: Design and Analysis," *Appl. Opt.*, **16**, 2514 (1978).

Roychoudhuri C., D. Lee, Y. Jiang, S. Kittaka, N. Nara, V. Serikov, and M. Oikawa, "Limits of DWDM With Gratings and Fabry–Perots and Alternate Solutions," Invited Paper at the ITCom Conference, *Proc. SPIE Proc.*, **5246**, 333–344, 2003.

Roychoudhuri C., "Propagating Fourier Frequencies vs. Carrier Frequency of a Pulse Through Spectrometers and Other Media," in: *Interferometry XII: Techniques and Analysis*, SPIE Proc. vol. 5531, (2004), pp. 450–461.

Saunders J. B., "Precise Topography of Optical Surfaces," *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **47**, 148 (1951).

Saunders J. B., "In-line Interferometer," *J. Opt. Soc. Am.*, **44**, 241 (1954).

Schulz G., "Ein Interferenzverfahren zur absoluten Ebenheitsprufung langs beliebiger Zentralschnitte," *Opt. Ada*, **14**, 375 (1967).

Schulz G. and J. Schwider, "Precise Measurement of Planeness," *Appl. Opt.*, **6**, 1077 (1967).

Schulz G. and J. Schwider, "Interferometric Testing of Smooth Surfaces," in: *Progress in Optics*, vol. XIII, pp.93, E. Wolf, Ed., Elsevier North-Holland, New York, 1976.

Schulz G., J. Schwider, C. Hiller, and B. Kicker, "Establishing an Optical Flatness Standard," *Appl. Opt.*, **10**, 929 (1971).

Schulz L. G., "Accurate Thickness Measurements with a Fabry-Perot Interferometer," *J. Opt. Soc. Am.*, **40**, 177 (1950a).

Schulz L. G., "An Interferometric Method for Accurate Thickness Measurements of Thin Evaporated Films," *J. Opt. Soc. Am.*, **40**, 690 (1950b).

Schulz, L. G., "The Effect of Phase Changes in White Light Interferometry," *J. Opt. Soc. Am.*, **41**, 261 (1951a).

Schulz L. G., "An Interferometric Method for the Determination of the Absorption Coefficients of Metals, With Results for Silver and Aluminum," *J. Opt. Soc. Am.*, **41**, 1047 (1951b).

Schulz L. G. and E. J. Scheibner, "An Experimental Study of the Change in Phase Accompanying Reflection of Light from Thin Evaprorated Films," *J. Opt. Soc. Am.*, **40**, 761 (1950).

Schwider J., "Informationssteigerung in der Vielstrahlinterferometrie," *Opt. Acta*, **15**, 351 (1968).

Schwider J., "Superposition Fringers As A Measuring Tool in Optical Testing," *Appl. Opt.*, **18**, 2364–2367 (1979).

Shaalan M. S. and J. M. Jonathan. "Multiple Beam Holographic Interferometry," *Opt. Acta.* **25**, 1025–1034 (1978).

Shaalan M. S. and V. I. Little, "The Application of Multiple-Beam White-Light Fringes to the Study of Surfaces," *J. Phys.*, **D8**, 1003 (1975).

SIRA, "New Aid for the Optical Industry: an Interferometer for Testing Deeply Curved Lens Surfaces," *SIRA News-Sheet* ("Impact"), No. 5, 1967.

Thorton B. S., "An Uncertainty Relation in Interferometry," *Opt. Acta*, **4**, 41 (1957).

Tolansky S., "New Non-localized Interference Fringes," *Philos. Mag.*, **34**, 555 (1943).

Tolansky S., "New Contributions to Interferometry. II: New Interference Phenomena with Newton's Rings; III: The Differential Polarization Phase Change on Reflection at a Thin Silver Film," *Philos. Mag.*, Ser. 7, **35**, 120, 179 (1944).

Tolansky S., "New Contributions to Interferometry. V: New Multiple-Beam White Light Interference Fringes and Their Applications," *Philos. Mag.*, Ser. 7, **36**, 225 (1945a).

Tolansky S., "Topography of Crystal Faces. I: The Topography of a (100) Face of a Left-Handed Quartz Crystal; II: The Topography of Cleavage Faces of Mica and Selenite," *Proc. Roy. Soc*, **A184**, 41, 51 (1945b).

Tolansky S., "Further Interferometric Studies with Mica: New Multiple-Beam Fringes and Their Applications," *Proc. Roy. Soc*, **A186**, 261 (1946).

Tolansky S., *Multiple-Beam Interferometry of Surfaces and Films*, Oxford University Press, Oxford, 1948a, Dover, New York, 1970.

Tolansky S., *Multiple-Beam Interferometry*, Oxford University Press, Oxford, 1948b.

Tolansky S., *Multiple-Beam Fringes*, Clarendon Press, Oxford, 1948c.

Tolansky S., *Surface Microtopography*, Interscience, New York, 1960.

Tolansky S., *Introduction to Interferometry*, Longmans, London, 1966.

Tolansky S., *Microstructure of Surfaces Using Interferometry*, Edward Arnold, London, 1968.

Tolansky S. and S. H. Emara, "Precision Multiple-Beam Interference Fringes with High Lateral Microcopic Resolution," *J. Opt. Soc. Am.*, **45**, 792 (1955).

Vinokurov V. M., A. L. Ardamatski, and L. V. Popov, "The Surface of the Disrupted Layer," in: *Generation of Optical Surfaces*, K. G. Kumanin, Ed., Focal Library, London, 1962, Chap. I.

Vrabel J. and E. B. Brown, "The Practice of Interferometry," *Opt. Eng.*, **14**, 124 (1975).

Williams W. E., *Applications of Interferometry*, Methuen, London, 1950.

Zerbino K. M., R. Torroba, N. Rodriguez, and M. Garavaglia, "Interference Profiles with Multiple Spherical Waves: General Case," *J. Opt. Soc. Am.*, **A1**(5), 495–501 (1984).

第7章　多通道干涉仪

P. 哈里哈兰（P. Hariharan）

本章将介绍几种光学检验使用的由传统干涉仪派生出来的干涉仪，它们都有一个（或多个）波面被反射回去，并两次或多次通过光学系统或光学系统的一部分。这种双通或多通干涉仪在某些检验时应用，具有一定的优点。

7.1　双通道干涉仪

7.1.1　像差分离

用泰曼-格林干涉仪虽然可以得到透镜出瞳处波面的轮廓图，然而，在许多像差同时存在的情况下，估算个别像差的大小将变得非常困难。如果采用双通泰曼-格林干涉仪（Hariharan and Sen，1961d），这个问题就变得简单了，而且波像差的对称和非对称部分（参见第13章内容）将以独立的干涉图方式显示出来。

用于分离对称和非对称波像差的泰曼-格林双通干涉仪如图7.1所示，从干涉仪输出的光束通过透镜 L_2 后，由位于该透镜焦点位置的平面反射镜 M_3 反射回来，并穿过透镜 L_2，从透镜 L_1 出射的双通光束通过辅助分光镜 S_2 聚焦在观察光阑的焦点位置。如果将光源略微平移，在观察光阑的位置将形成两幅以轴为基准并呈反方向的有一定距离的图像，这样就可以观察到由双通道光束产生的干涉条纹或者常规干涉条纹。

从分光镜 S_1 的 O 点处入射的一条光线被分成四条双通光线，它们可以简单表示为 AA' 光线（$SOAOM_3O'A'O'S$）、AB' 光线（$SOAOM_3O'B'O'S$）、BA' 光线（$SOBOM_3O'A'O'S$）和 BB' 光线（$SOBOM_3O'B'O'S$），括号中的字母表示这些光线所走的路径。由于从干涉仪射出的波面在被反射回去之前已经得到反转，因此很容易看出，如果 BB' 光线在第一通路中通过被检透镜光瞳处的 $P(r,\ \phi)$ 点，则在第二通路中将通过与 P 点相对的直径方向上的另一点 $P'(r,\ \pi+\phi)$。同理，当 BA' 光线通过光瞳的 P 点时，AB' 光线则通过 P' 点。

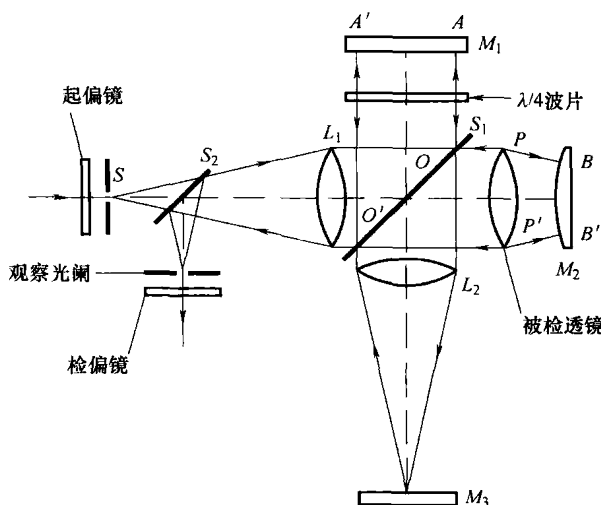


图7.1　用于分离对称和非对称波像差的泰曼-格林双通干涉仪（Hariharan and Sen，1961d）

在这两点的位置，整个波像差（Hopkins，1950）表达式中包含 $\cos\phi$ 偶次方的各项（也就是离焦、球差及像散项）均有相

同的数值，而包含有 $\cos\phi$ 奇次方各项（也就是畸变和彗差项）数值相等，而符号相反。这四条双通光线的总光程可表示为

$$\begin{aligned} D_{AA'} &= D \text{（假定）} \\ D_{BA'} &= D + 2W_{偶} + 2W_{奇} + \Delta D \\ D_{AB'} &= D + 2W_{偶} + 2W_{奇} + \Delta D \\ D_{BB'} &= D + 2W_{偶} + 2W_{奇} + \Delta D + D + 2W_{偶} - 2W_{奇} + \Delta D \\ &= D + 4W_{偶} + 2\Delta D \end{aligned} \tag{7.1}$$

式中，$W_{偶}$ 为包含 $\cos\phi$ 的偶次方的各项的总和；$W_{奇}$ 为包含 $\cos\phi$ 的奇次方各项的总和；ΔD 为 A 光路与 B 光路之间的主光线的光程差。

为了选择双通光束所需的组合，将从准直透镜发出的光束在垂直面内起偏，并把一个1/4 波片插入 A 光路中。这样 AB'和 BA'光束的偏振面将旋转 90°，而 AA'和 BB'光束的偏振面仍保持不变。因此，当检偏器与其光轴垂直时，AB'和 BA'光束将消失，AA'和 BB'光束之间将发生干涉，其光程差为

$$D_{BB'} - D_{AA'} = 4W_{偶} + 2\Delta D \tag{7.2}$$

于是，给出了干涉图中的对称误差，如像离焦、球差和彗差，同时其灵敏度将提高一倍，反之，由 $\cos\phi$ 的奇次方项所决定的特征将从干涉图中消失。

当把检偏镜的光轴旋转至水平方向时，光线 AB'和 BA'就会被分离出来并产生干涉，其光程差为

$$D_{BA'} - D_{AB'} = 4W_{奇} \tag{7.3}$$

此时只有畸变和彗差这类非对称像差，以及参考镜的任意倾斜（这相当于引入一个额外的奇次项）才会同时出现在干涉图中。

用一个未校正的像差透镜得到的一组典型干涉图如图 7.2 所示。其中图 7.2a 为泰曼-格林干涉仪的常规干涉图；图 b 和图 c 为双通干涉图，它们分别表示波像差的偶次分量和奇次分量。通过绘制最主要像差项的表达式而得出的图样，如图 7.2 中各干涉图下面的图像所示。

7.1.2　相干条件的抑制

平行玻璃板的残余楔形误差一般用菲佐干涉仪测量。这有一个缺点，即干涉波面之间的光程差是被检玻璃平板光学厚度的两倍。因此，在检验厚玻璃平板时，必须使用经过正常对准的单色光光束。即使是在使用激光光源的情况下，也必须使用一个得到良好校正的物镜。然而，如果干涉仪是双通式的，这一缺点可以克服，此时在被检玻璃平板及其倒像之间会形成重叠的条纹。

有一种方法可以把透过被检玻璃平板的波前和由一个辅助远焦系统反射回被检玻璃平板的波前利用起来（Cagnet，1954）。在这种情况下，必须对被检玻璃平板的两表面镀膜，以使之具有足够高的反射率 R。当采用宽带光源，例如高压水银蒸气灯照明时，产生的干涉条纹光强分布将与使用普通菲佐干涉仪中较纯单色光源及反射率为 R^2 的表面所获得的条纹相同。

另一种方法不需表面镀膜，并且几乎不涉及辅助光学系统，而是利用一个多条纹的双反射系统（Sen and Puntambekar，1965）。其光路如图 7.3 所示，除了针孔光源位于平面反射镜的反射面上这一点外，其他结构都和传统菲佐干涉仪的结构相同。如果此针孔稍稍偏离轴

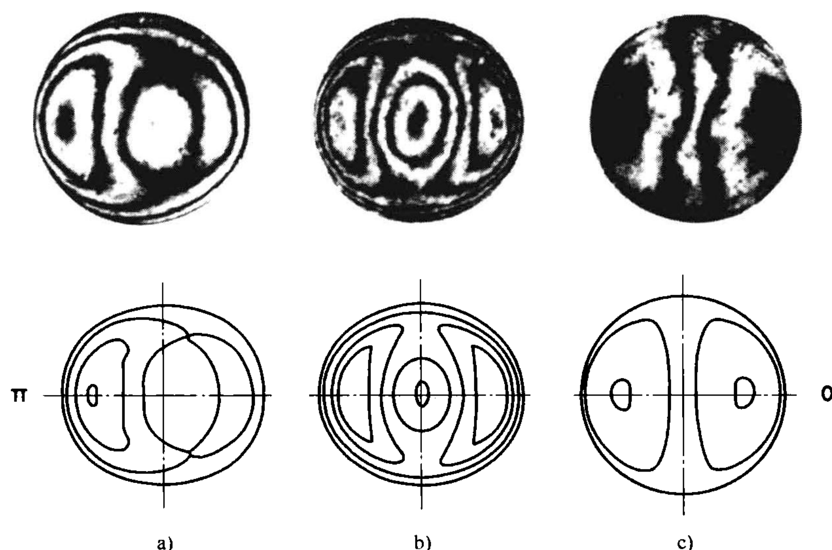


图 7.2　用双通泰曼-格林干涉仪得到的干涉图

a）常规干涉图　$2W=0.25+1.85r\cos\phi-3.99r^2-2.75r^2\cos^2\phi-1.57r^3\cos\phi+4.33r^4+1.72r^4\cos^2\phi$

b）只表示出偶次项的双通干涉图　$4W_{偶}=0.50+7.98r^2-5.50r^2\cos^2\phi+8.66r^4+3.44r^4\cos^2\phi$

c）只表示出奇次项的双通干涉图　$4W_{奇}=3.70r\cos\phi-3.14r^3\cos\phi$（Hariharan and Sen，1961d）

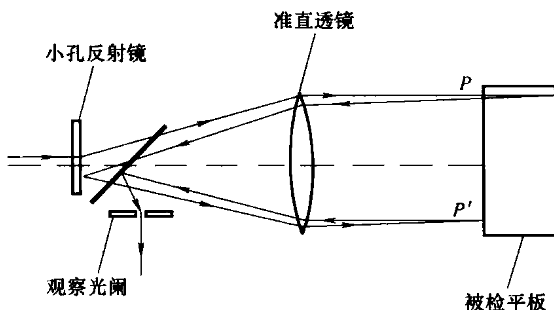


图 7.3　检验平行平面玻璃板用的双通菲佐干涉仪（Sen and Puntambekar，1965.）

线，从被检玻璃平板上反射回来的光束就会在位于光轴另一侧的反射镜上聚焦，因此，这些光线将通过系统再次被反射回来。最后，这些双通光束将通过分光镜在观察光阑位置聚焦为一点。

一条光线在第一通道上的 $P(x,\ y)$ 点位置穿过被检验玻璃平板，在第二通道上光线则是经过 $P'(-x,\ -y)$ 点位置穿过平板。用 $t(x,\ y)$ 表示 P 点位置的玻璃板光学厚度，则 $\zeta=(2\pi/\lambda)[t(x,y)+t(-x,-y)]$，$\psi=(2\pi/\lambda)[t(x,y)-t(-x,-y)]$，且假定光源的谱带宽度不会对相位差 ζ 产生任何干涉，在此带宽范围内 ψ 的变化也可以忽略不计。对于那些未镀膜的反射率 R 很低的玻璃平板来说，其任意一点的条纹强度则为

$$I(x,y)=2I_0R^2(2+\cos2\psi) \tag{7.4}$$

式中，I_0 为原入射光线的强度，它与双光束干涉条纹中可见度为 0.5 时的光强分布相对应，这种能见度对大多数测量来说是足够的。

此干涉图只显示出被检玻璃的非对称误差（即楔形差），因为其灵敏度是普通菲佐干涉仪的两倍。

双通道菲佐干涉仪可用于检验直角棱镜和三面直角棱镜（Sen and Puntambekar，1966），其光路如图 7.4 所示。图中棱镜对角面的一半被挡掉了，以便将两个反射面分离开，其中一个波面是由棱镜对角面未挡掉的一半反射回来。另一个波面是透过棱镜并从棱镜被挡掉的那一半对角面反射回来。这两个波面之间的夹角在第二通道上增加了一倍，因此，角误差灵敏

度也比用泰曼-格林干涉仪能够获得的灵敏度高了一倍。

如图7.5所示的另一种干涉仪，它可用于检验凹面（Puntambekar and Sen，1971）。在采用热光源的情况下，传统非佐干涉仪中基准面和凹面镜之间的距离不能太大，因此，一定的基准面只能用于检验有限范围内的曲率。如果采用激光光源就可以克服这一问题，但是会出现由其他表面的反射而引起的多余条纹。采用双通道干涉则可在使用单一基准面和热光源情况下，大大扩展被测面的曲率范围。

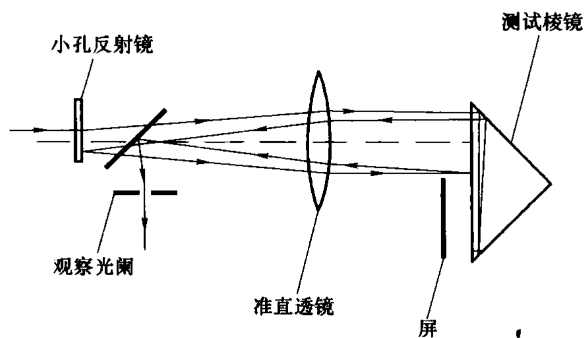


图7.4 检验反射棱镜用的双通非佐干涉仪（Sen and Puntambekar，1966.）

同样是在这种情况下，当第一和第二通道之间的光路与被检系统的光轴对称时，干涉图中只会出现非对称误差。然而，如果将有小孔的反光镜绕其表面的轴线旋转，并且使其通过共同的曲率中心，在反向的两波面之间则会产生一个附加的剪切；因此，就可从合成干涉图中估计出对称误差。虽然剪切和非剪切干涉图利用的是基准面的不同部分，但如果基准面是一个非常精确的球面，那就不会产生任何误差。

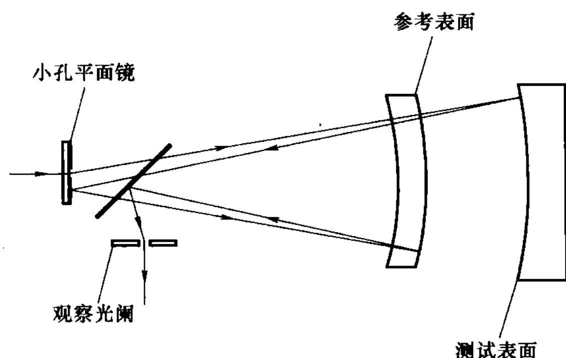


图7.5 检验凹表面用的双通非佐干涉仪（Puntambekar and Sen，1971）

7.1.3 提高精度的双通道干涉仪

用传统双光束干涉仪进行测量时所能达到的精度，取决于确定干涉条纹的局部误差 ΔQ 所能达到的精度，即能精确到平均条纹间距 Q 的几分之一。该精度受双光束条纹中正弦光强分布的限制。要想大幅度提高条纹的测量精度，方法之一就是采用本书第6章所介绍的多光束干涉技术。采用双通干涉技术（Hariharan and Sen，1960a、1961b）也可以在某些情况下起到一定的作用。

假定有如图7.6所示的泰曼-格林双通干涉仪，并假定反射镜 M_1 和 M_2 与垂直平面内的原始入射光束正交，但在水平面内与原始入射光线成 $(\pi/2)+\alpha$ 的角度，因此，M_2 在分光镜所成的虚像 M_2' 和 M_1 之间就构成了一个 2α 的楔角。在这种情况下，唯一存在的像差就是“奇次”倾斜项，且根据式（7.1）可以得出，从距离水平面内视场中心 x 长度位置的干涉仪射出的四条双通光线的总光程表达式如下

$$
\begin{aligned}
D_{AA'} &= D(\text{假定}) \\
D_{AB'} &= D + 4x\alpha + 2d \\
D_{BA'} &= D - 4x\alpha + 2d \\
D_{BB'} &= D + 4d
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

式中，d 为视场中心位置上 M_1 和 M_2' 之间的距离。

如果这四束光线都进行干涉，则 x 点位置的合振幅 A_P 可表示为

$$A_P = A\exp\left(-\frac{2\pi iD}{\lambda}\right)\{1+\exp[-2i(\eta-\xi)]+\exp[-2i(\eta+\xi)]+\exp(-4i\eta)\} \tag{7.6}$$

式中，$\xi=(2\pi/\lambda)2x\alpha$，$\eta=(2\pi/\lambda)d$，$A$ 为与单光束对应的振幅。该点位上的光强 I_P 则通过将 A_P 值与其共轭复数相乘求出，即

$$I_P = 4I_0(\cos2\xi+\cos2\eta)^2 \tag{7.7}$$

式中，I_0 为单光束引起的光强。

当视场中心两光路之间的相位差 η 分别为三个不同数值时，按式（7.7）算出的条纹系统光强分布如图 7.7 所示。η 的变化不会引起条纹的位移，而只是引起光强分布的变化。当 $\eta=0$或 $n\pi$（这里 n 为整数）时，条纹交替消失；而当 $\eta=(2n+1)\pi/2$ 时，所有条纹都具有相同的光强。在后一种情况下，当 η 值有微小变化时，就会使相邻条纹之间的光强产生明显的差别。利用这一效应再配合一个合适的补偿器，就可实现精确的补偿调整，测出 $\lambda/500$的光程变化量。

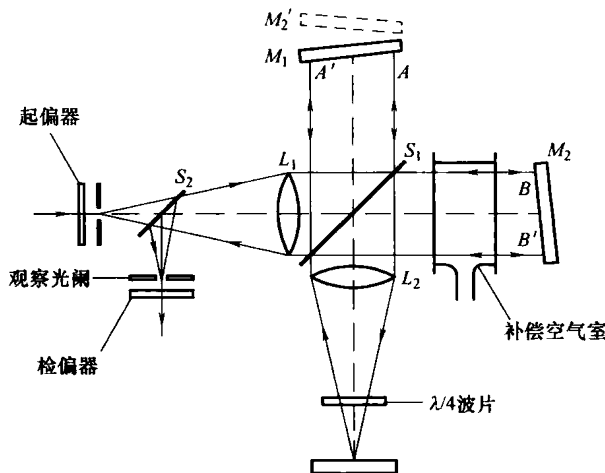


图 7.6 用泰曼-格林双通干涉仪得到调制干涉条纹（Hariharan and Sen，1960a、1961b）

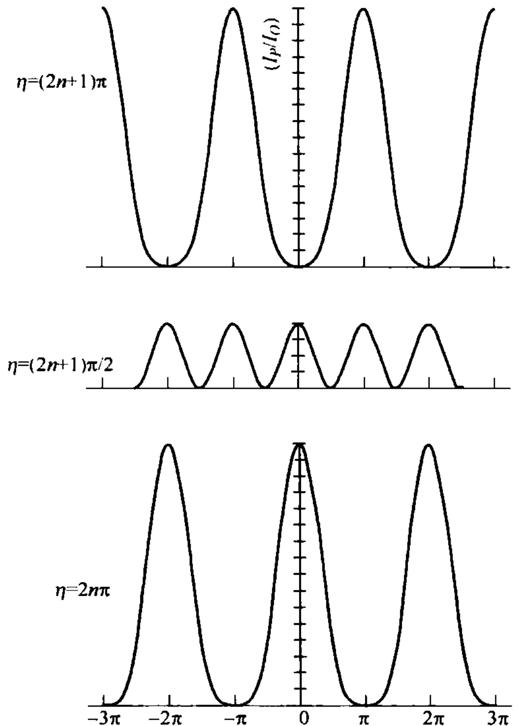


图 7.7 用泰曼-格林双通干涉仪得到的各个不同 η 值时干涉条纹图的光强分布（η 为两束之间的相位差）（Hariharan and Sen，1960a）

此技术非常适合于测量薄膜的折射率和厚度（Hariharan and Sen，1961c）。即使要求更高的精度，利用双通非佐干涉仪也是可能达到的（Hariharan and Sen，1960b、1961a）。

7.2 多通道干涉仪

用多通道干涉技术可以得到高精度、直观的波面误差图。在这种测量技术中，事实上波面的总变形量与波面在被检光学系统中的反射和透射次数成正比，利用这一点可以提高条纹偏移量 ΔQ 与平均条纹间距 Q 的比值。

多通道泰曼-格林干涉仪（Langenbeck，1967）的光学系统如图7.8所示，在干涉仪的一个光臂中加入了一个附加分光镜。如果使附加分光镜与被检反射镜之间形成一个很小的楔角，在楔角之间形成的多次反射光束将在透镜 L_2 的焦平面附近产生一系列横向分离的光源图像。这样，通过位于 L_2 焦平面内的小孔光阑就可以将位于被检反光镜位置并经过任意所需次数反射的光束筛选出来。如果调节参考反射镜的倾斜角度，使由它反射的光线也通过该小孔光阑，在参考波面和位于被检反光镜位置经过了 n 次反射的波面之间，则将形成双光束干涉条纹，并由此显示出 $2n\Delta t$ 的波面变形量，其中 Δt 是被检表面的平面度偏差。

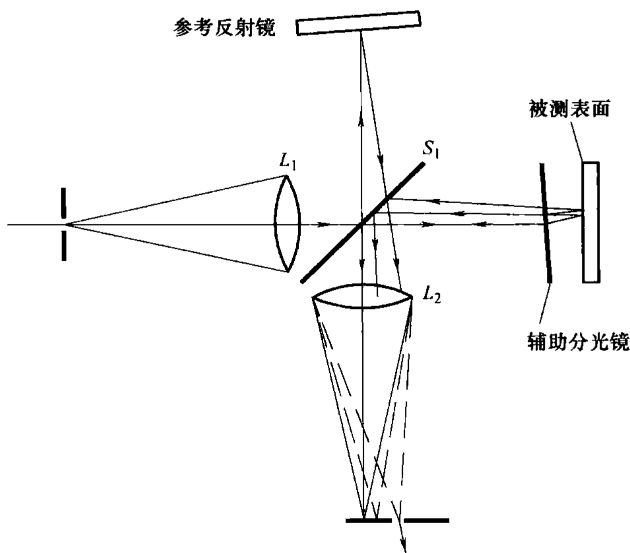


图7.8 多通道泰曼-格林干涉仪（Langenbeck，1967）

在所形成的干涉图中，$\Delta Q/Q = 2n\Delta t/\lambda$。因此，其灵敏度是用普通泰曼-格林干涉仪所获得的灵敏度的 n 倍。

如果辅助分光镜的透过率很高，并且将一块表面未镀膜的玻璃作为参考反射镜，就可使两条干涉光束的光强大致相同，并使条纹的能见度达到最好。一种比较好的解决办法（Langenbeck，1969a）就是采用一个改进型光学系统，其中参考光束以布儒斯特角从未镀膜的玻璃表面上反射出。通过旋转一个 $\lambda/2$ 波片，使照明光束的偏振面随之旋转，就能够控制参考光束的衰减量。

图7.9所示为一系列典型的正方形平面多通道干涉图，其中心位置的厚度阶跃函数为 $\lambda/8$。其中图7.9a为一阶反射的普通泰曼-格林干涉图。图7.9b～e分别为二阶、三阶、四阶、五阶反射的多通干涉图，由图7.9可见，条纹的相对位移量 $\Delta Q/Q$ 随反射阶次的增加而增加。

布比斯（Bubis，1972）曾经介绍过一种用于检验大型凹面镜的改进型多通道干涉仪。它实际上是一种使用激光光源的不等路径干涉仪，在其测量光臂中装有一辅助凹面镜。

检验大凹面镜的多通干涉仪如图7.10中所示，从激光光源发出的会聚光束在分光镜位置被分成两束，其中一束从一块小凹面镜反射回去并形成参考波面。在被反射回去与参考波面相干涉之前，另一道光束则在由被检凹面镜和辅助凹面镜组成的系统中经过了预定的反射

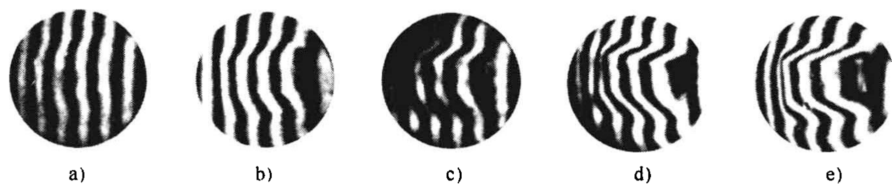


图 7.9 用泰曼-格林多通干涉仪得到的一组平面检验干涉图
（被检平面中心有一深度为 λ 的低洼）
a）普通干涉图（一阶） b）二阶 c）三阶 d）四阶 e）五阶（Langenbeck，1969a）

次数（光束的反射次数可通过使被检反射镜和辅助反射镜的曲率中心相对偏移而加以控制）。通过使用检偏器和比较光臂中的 $\lambda/4$ 波片可使两条干涉光束的振幅相等。仪器的测量灵敏度可提高五倍。

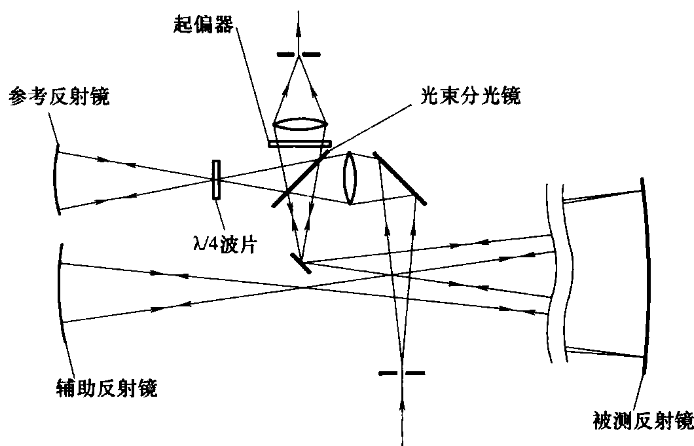


图 7.10 检验大凹面镜的多通干涉仪（Bubis，1972）

如果零阶反射光束与高阶反射光束的某一条发生干涉，菲佐干涉仪也可以在多通道结构中运行（Langenbeck，1969a、1969b）。为此，要求两表面之间的楔角足够大，以使各个不同反射次数的光束在焦平面上能彼此分开。多通菲佐干涉仪如图 7.11 所示，用一个开有两个小孔的光阑可以把零阶和某一适当高阶反射光束分选出来。采用一个前焦面与光阑面重合的辅助透镜就可以表示两个名义平面波前之间的干涉条纹。

通过一个简单的偏振系统就可以使两条干涉光束的相对振幅相等。零阶光束从一个局部未镀膜的反射镜上以布儒斯特角反射出来，高阶光束则是从邻近的镀有金属膜的部分反射出来。通过旋转带有 $\lambda/4$ 波片的照明光束偏振平面，就可以使零阶光束衰减到任何要求的程度。

因为零阶光束和第 n 阶光束之间的夹角较大，所形成的干涉条纹太过狭窄以至于无法进行直接观察，所以最好是通过莫尔技术来观察干涉图。为此，在像面上放了一块刻线间距与平均条纹间距相等的光栅。所观察到的莫尔条纹拥有相同的间距，根据干涉图旋转光栅，就可以控制莫尔条纹的间距。

利用一块刻线间距等于平均条纹间距 $1/m$ 的光栅也能得到较高阶次的莫尔条纹。这时相对灵敏度就像通过视场中的莫尔条纹数那样，也增加了 m 倍，但这是以牺牲条纹对比度

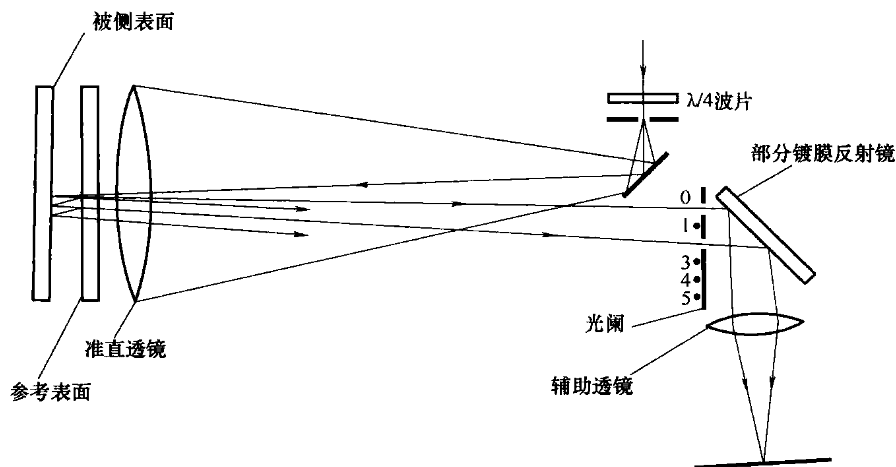


图7.11　多通菲佐干涉仪（Langenbeck，1969a、1969b）

为代价的。

在多通干涉技术中最严重的一个问题是光束“发散”。它使被检表面上一定范围内的面形误差彼此累积，甚至能够在被检表面上没有面形误差的区域内产生条纹偏移。光束发散的程度取决于多通反射镜分开的距离和楔角。通过使与入射光束相对的干涉仪倾斜就可以使其最小化，因此，虽然入射光束最初是朝着测试光路中的楔形顶点反射，最后却是通过辅助分光镜以垂直入射方式反射回来并且是沿原路返回。然而，在大多数情况下，反射阶次必须是选定的，因此光束的发散量与被检面形误差的横向尺寸相比是很小的⊖。

多通干涉图的判读错误也可能是由焦平面内光阑的调整误差造成的。如果该光阑由于偶然的原因截断了光源像中的低空间频率部分，就会观察到在傅科检验中所见到的那种强衍射效应。

多通干涉技术还可用于测量玻璃平板的均匀性，以及精密测定需要高精度的屋脊棱镜和三面直角棱镜上的90°或45°角（Langenbeck，1969b）。另一个有趣的应用例子（Langenbeck，1969a）是用于掠射干涉测量中。掠射干涉测量（Linnik，1941；Saunders and Gross，1959）可以用相对小口径的系统去测量大口径表面。另外，它还可以测量许多的非光学表面，比如精密的玻璃材料和金属，通过这些非光学表面的小角入射也能获得一个足够强度的镜面反射（Birch，1973；Hariharan，1975；Murty，1976）。

当入射角为 α 时，一直径为 d 的光束作用区域的长度为

$$L=\frac{d}{\cos\alpha} \tag{7.8}$$

然而，测试表面的平整度偏离 Δt 将导致条纹的平直度偏离，其数学表达式为

$$\frac{\Delta Q}{Q}=\frac{4\Delta t\cos\alpha}{\lambda} \tag{7.9}$$

式中，ΔQ 为局部条纹位移；Q 为条纹的平均间距。

⊖ 这一限制在某些情况下并不适用，例如在测量均匀薄膜的厚度时。图波依索特和罗斯特斯（Dupoisot and Lostis，1973）曾介绍过一种专门用于测量均匀薄膜厚度的光学系统，就利用了窄光束并且能使光束来回通过50次。

因此，干涉仪的灵敏度降低与入射角的余弦成函数比。通过利用一个双通系统，即使是在反射率很低的地表，干涉仪的灵敏度也可以提高两倍。在该双通系统中，需要将光束分光器的反射调整到使两条光束的强度相等（Wilson，1983）。如果测试表面反射率足够高，甚至可以采用多通结构，检验有小孔的光学系统的大型表面所使用的掠射多通干涉仪如图7.12所示（Langenbeck，1969a）。此时，当入射角为 α 时，在条纹模式下用第 n 阶反射光束获得的条纹平直度偏移量为

$$\left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)_n=\frac{4\Delta t\cos\alpha}{\lambda} \tag{7.10}$$

因此，通过选择适当的高阶光束就可以恢复由大入射角引起的灵敏度损耗。

多通道干涉测量的另一个有趣应用是精确测量具有很长曲率半径的凹面的曲率半径，在这种情况下可用到的操作距离是有限的（Gerchman and Hunter，1979）。

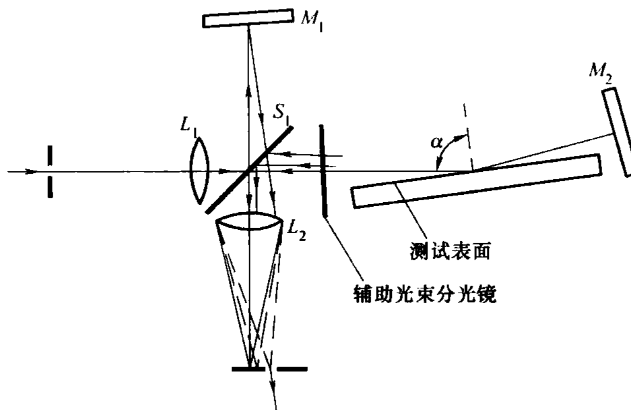


图7.12 检验有小孔的光学系统的大型表面所使用的掠射多通干涉仪（Langenbeck，1969a）

在这个测量过程中，参考平面和测试凹面组成一个共焦腔。通过平面透射进入共焦腔的准直光束会聚到焦点位置，如图7.13所示，该焦点在表面的任意一侧。在这种共焦结构中，经过适当次数反射的准直光束会作为一道准直光束被反射回来。因此，通过使用一个与菲佐干涉仪类似的装置，就可以通过观察干涉条纹而准确地确定该焦点的设置，干涉条纹由来自平面和共焦腔的反射光束形成。

阶次数量 n 为偶数的结构使光线在平面上的焦点汇聚，而 n 为奇数的结构会使光线在凹面上聚焦。Z_n，是 n 阶结构中表面间距，R 是凹面的曲率半径，它们都可以通过近轴分析获得。该分析表明，奇数结构的表达式与第一类偶数阶次切比雪夫多项式相似，$T_{n+1}(x)$，$(n=1, 3, 5\cdots)$，其中 $x=Z_n/R$。类似地，偶数结构的表达式与第二类偶数阶次切比雪夫多项式相似，$U_n(x)$，$(n=2, 4, 6\cdots)$。在这两种情况下，其多项式的解都是第一个正根。

因此，如果可以测量出两个连续共焦腔反射镜之间的距离变化，那就可以计算出凹面的半径。表7.1列出了 Z_n 的值，它是连续共焦结构的腔长，也是凹面的曲率半径 R 的函数。表7.2所示为腔长和曲率半径之间的关系变化，其中的 Z_n-Z_{n+1} 的值为两个连续共焦腔腔长的差值。

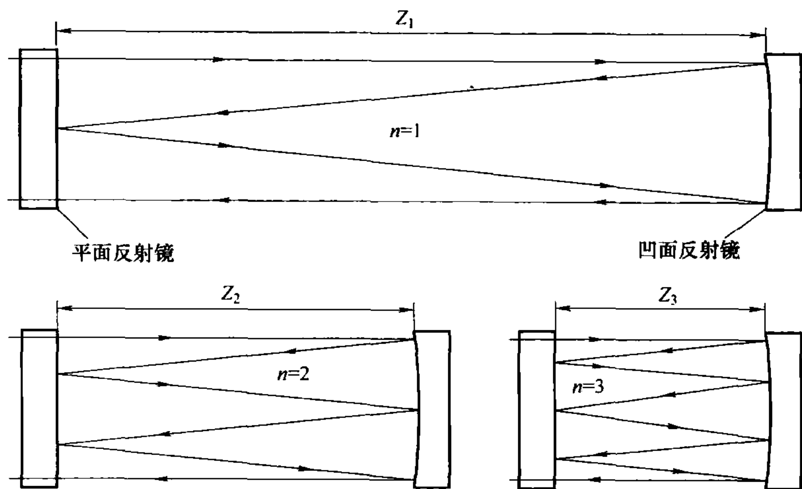


图7.13 阶次为1，2，3的共焦腔中的光线路径（Gerchman and Hunter，1979）

表7.1 腔长和曲率半径

n	Z_n
1	0.5
2	0.25
3	0.146 446 6
4	0.095 491 5
5	0.066 987 3
6	0.049 515 6
7	0.038 060 3
8	0.030 153 7
9	0.024 471 7

表7.2 腔长和曲率半径之间的关系变化

$R=4\ (z_1-z_2)$
$R=9.656\ 85\ (z_2-z_3)$
$R=19.625\ 12\ (z_3-z_4)$
$R=35.082\ 55\ (z_4-z_5)$
$R=57.235\ 25\ (z_5-z_6)$
$R=87.295\ 84\ (z_6-z_7)$
$R=126.477\ 41\ (z_7-z_8)$
$R=175.994\ 37\ (z_8-z_9)$

正如我们所看到的，在高阶结构中反射表面的间距比凹面的曲率半径小很多，故必须在连续结构之间穿过的距离甚至更小。因此，通过使用一个短的测量滑板，可以在一个受限操作空间下测量大曲率半径表面。其测试的精度受限于两个因素：一个是最优焦点位置的估计精度，另一个是测量反射镜移动的精度。受限于条纹清晰度的下降，高阶检验结构也会受到限制。为了优化高阶结构的能见度，平面表面的反射率必须达到0.6左右，而凹面还应该有更高的反射镀膜。那么，即使采用 $n=9$ 的结构也能获得可接受的条纹能见度，并且能够以高于0.01%的精度测量曲率半径。

参考文献

Birch, K. G., "Oblique Incidence Interferometry Applied to Non-Optical Surfaces," *J. Phys. E.*, **6**, 1045 (1973).

Bubis I. Y., "Multipass Interferometer for Surface Shape Inspection," *Sov. J. Opt. Technol.*, **39**, 411–413 (1972).



Cagnet M., "Méthodes Interférometriques Utilisant les Franges de Superposition (voir Erratum, p. 552)," *Rev. Opt.*, **33**, 113 (1954).

Dupoisot H. and P. Lostis, "Interférométrie à Passages Multiples et Mesure des Très Faibles Epaisseurs," *Nouv. Rev. Opt.*, **4**, 227 (1973).

Gerchman M. C. and G. C. Hunter, "Differential Technique for Accurately Measuring the Radius of Curvature of Long Radius Concave Optical Surfaces," *Proc. SPIE*, **192**, 75 (1979).

Hariharan P., "Improved Oblique-Incidence Interferometer," *Opt. Eng.*, **14**, 257 (1975).

Hariharan P. and D. Sen, "Double-Passed Two-Beam Interferometers," *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 357–361 (1960a).

Hariharan P. and D. Sen, "The Double-Passed Fizeau Interferometer," *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 999–1001 (1960b).

Hariharan P. and D. Sen, "Double-Passed Fizeau Interferometer. II: Fringe Systems Formed by the Reflected Beams," *J. Opt. Soc. Am.*, **51**, 400–404 (1961a).

Hariharan P. and D. Sen, "Fringes of Equal Inclination in the Double-Passed Michelson Interferometer," *J. Opt. Soc. Am.*, **51**, 617–619 (1961b).

Hariharan P. and D. Sen, "Double-Passed Two-Beam Interferometers, II: Effects of Specimen Absorption and Finite Path Difference," *J. Opt. Soc. Am.*, **51**, 1212–1218 (1961c).

Hariharan P. and D. Sen, "The Separation of Symmetrical and Asymmetrical Wave-Front Aberrations in the Twyman Interferometer," *Proc. Phys. Soc.*, **77**, 328 (1961d).

Hopkins H. H., *Wave Theory of Aberrations*, Clarendon Press, Oxford, 1950, p. 48.

Langenbeck P., "Multipass Twyman–Green Interferometer," *Appl. Opt.*, **6**, 1425–1426 (1967).

Langenbeck P., "Multipass Interferometry," *Appl. Opt.*, **8**, 545–552 (1969a).

Langenbeck P., in: *Optical Instruments and Techniques*, J. Home Dickson, Ed., Oriel Press, Newcastle-Upon-Tyne, 1969b.

Linnik V. P., "An Interferometer for the Investigation of Large Plane Surfaces," *Computes Rendus (Doklady) Acad. Sci. URSS*, **32**, 189 (1941).

Murty M. V. R. K. and Shukla R. P., "An Oblique Incidence Interferometer," *Opt. Eng.*, **15**, 461–463 (1976).

Puntambekar P. N. and D. Sen, "A Simple Inverting Interferometer," *Opt. Acta*, **18**, 719–728 (1971).

Saunders J. B. and F. L. Gross., "Interferometer for Large Surfaces," *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, **62**, 137 (1959).

Sen D. and P. N. Puntambekar, "An Inverting Fizeau Interferometer," *Opt. Acta*, **12**, 137–149 (1965).

Sen D. and P. N. Puntambekar, "Shearing Interferometers for Testing Corner Cubes and Right Angle Prisms," *Appl. Opt.*, **5**, 1009-1014 (1966).

Wilson I. J., "Double-Pass Oblique Incidence Interferometer for the Inspection of Non-optical Surfaces," *Appl. Opt.*, **22**, 1144-1148 (1983).

第8章 傅科刀口法、细丝法及调相法

J. 欧捷达-卡斯坦达（J. Ojeda-Castan ~ eda）

8.1 引言

已经证明傅科（Foucault，1858、1859）所提出的刀口检验法，以及在一般情况下托普勒（Topler，1864、1866、1868）、朗奇（Ritchey，1904）、哈特曼（Hartmann，1908）、普拉兹特和盖维俄拉（Platzeck and Gaviola，1939）、沃特（Wolter，1949、1956）等人发明的各种阴影技术在检验光学表面方面极其有效。光学像差、衍射或变形的粗糙面可能使光线偏离原有的轨迹（或可能使波面变形）。阴影技术的基本概念是通过遮挡或改变这些位移的光线来测定光线的横向位移。把光阑放在被检验光学表面透射或反射的光线所会聚的任意一个平面上，即可遮挡或改变光线。

阴影技术的主要优点是设备简单和定性分析灵敏度高（至少从几何的观点来看是如此）。当然，为了在同类方法中评价某一种方法比其他方法的优越之处，有必要在下面两种情况下研究该方法的特性：①像差大于照明辐射波长时（成像的几何原理）；②像差小于照明辐射波长（成像的物理原理）。

8.2 傅科检验法和刀口检验法

8.2.1 说明

一般可以把刀口检验法看做是一种检验有无横向像差的方法。做法是把光线或衍射光所穿过的一个平面的某一部分遮挡住，使有像差的范围内出现阴影，如图8.1所示。傅科检验法的操作简便、识别容易，在众多光学检验方法中是独一无二的。完全可以把傅科刀口检验法看做是光学车间使用的一种最重要的检验方法，其余各种光学检验法都是在其基础上发展而成的。

傅科检验法是把一个针孔大小的发光光源放在凹球面镜曲率中心的一侧，如图8.2所示。该针孔光源的像呈点光源形状，并位于球面镜曲率中心的另一侧。

当插入刀口并切割成像照明光束时，观察者（置于像后方）在未被均匀照明的镜面上观察到一个阴影图（参见图8.1和图8.3）。如果是“理想”的球面镜，在焦点以内（靠近球面镜）放上刀口，阴影图中就会明显地分出暗区和明区，如图8.4和图8.5所示。当刀口移动时，暗区就会按刀口移动的同一方向移过镜面。反之，如果在焦点以外（远离球面镜）放置刀口，阴影图的暗区就会按刀口移动的相反方向移过镜面。如果把刀口准确地放在焦点上，则镜面立刻变暗，阴影图没有任何明显的移动。这是一种极其精确的确定曲率中心的方法。

此外，如果凹面镜不是球形，那么镜面上每一个区域都有不同的曲率半径。在这种情况下，放置刀口时，相应的暗区也会随着刀口在光轴上的不同位置而出现。

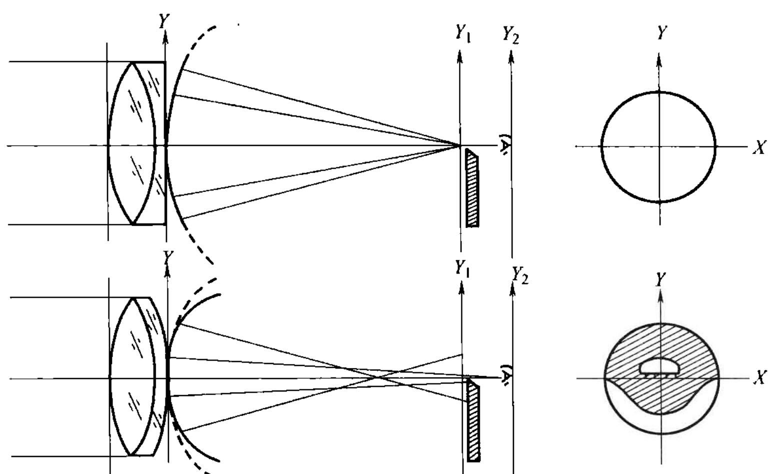


图 8.1 用傅科检验法检验一个透镜

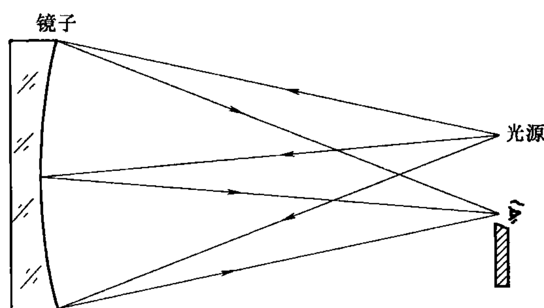
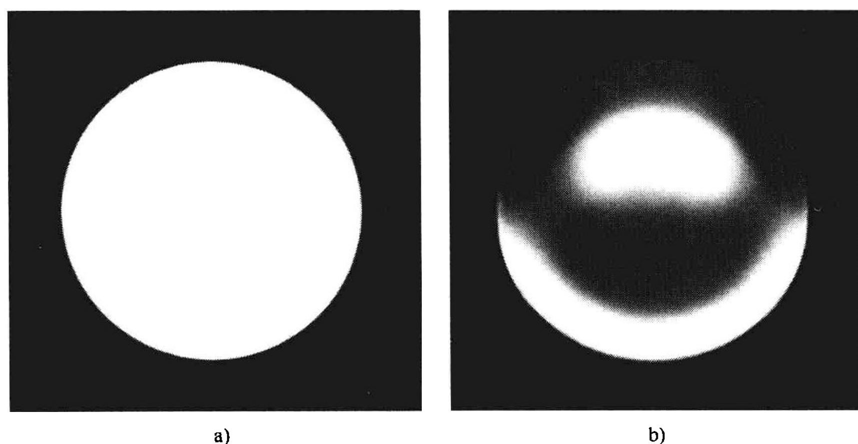


图 8.2 检验一个凹球面镜的刀口检验装置



a) b)

图 8.3 一个抛物面镜的傅科图
a）没有刀口 b）有刀口

一个不规则的凹面镜有许多不同的曲率半径和不同曲率中心的区带。在这种情况下放置刀口，整个镜面上许多不相同区带都变暗了。一种形象地说明怎样形成这一阴影图像的直观

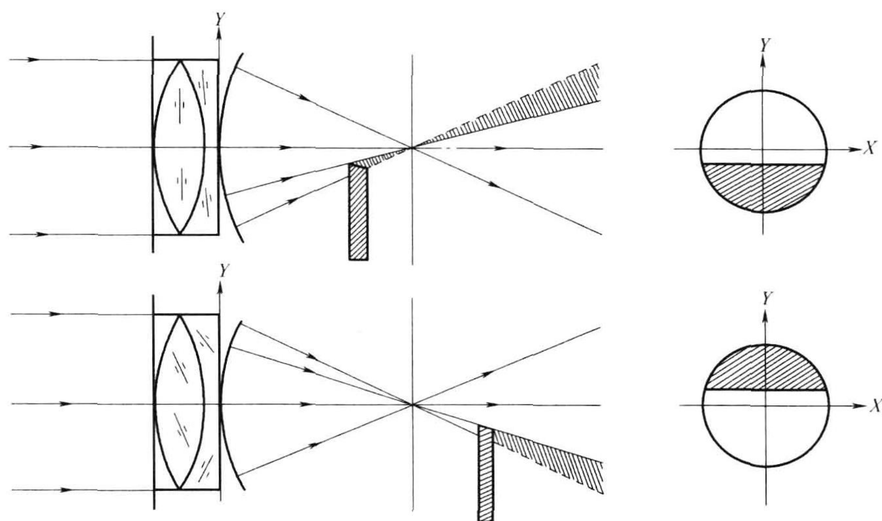
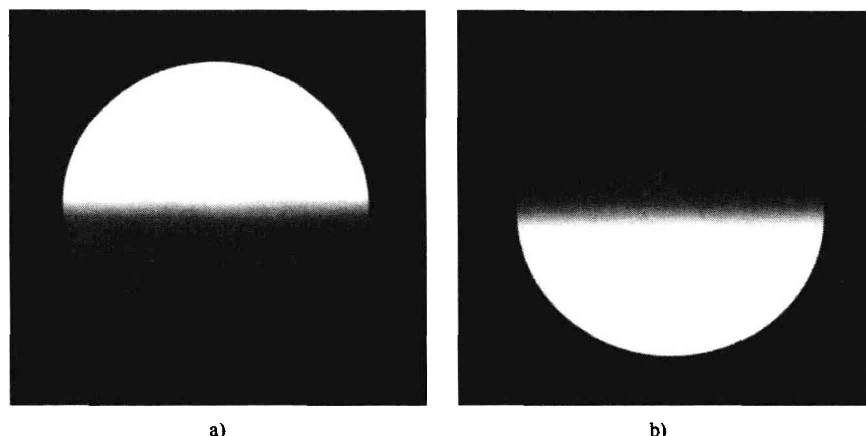


图8.4 无像差透镜的刀口检验



a) b)

图8.5 带焦点误差的无像差镜子的傅科图
a) 在焦点以内 b) 在焦点以外

方法（Porter，1953）就是：在与刀口相反的位置使照明光源在反射镜某一侧成像，如图8.6所示。用这种方法照明，它遵循一个规律，即正斜率的区域都得到照明，而负斜率的区域就得不到照明，反之亦然，非规则镜的傅科图如图8.7所示。

总而言之，傅科检验法可用于：①测量反射镜上各个带区的曲率半径；②作为零位检验法，用于检查球形波面的所有带区是否拥有相同的曲率半径。

实践中发现，采用一个发光狭缝代替点光源（见图8.8a），也可以使傅科检验法取得理想的效果，如图8.8b和8.8c所示。这是由于狭缝光源上的每一个点都产生一个形状相同并与到刀口的距离相等的图像。因此，所有点都生成完全相同的傅科图案，由此使所观察到的图形亮度有很大的增益。但是，如果要保持一定的精度，这些图案必须完全相同。也就是说，狭缝与刀口必须严格平行。为了避免在调整刀口与狭缝严格平行时出现麻烦，达金（Dakin，1967）设计了一种如图8.8d所示的结构。

图8.9和图8.10所示为进行傅科刀口检验的仪器。这种仪器装在一个滑动支架上，能

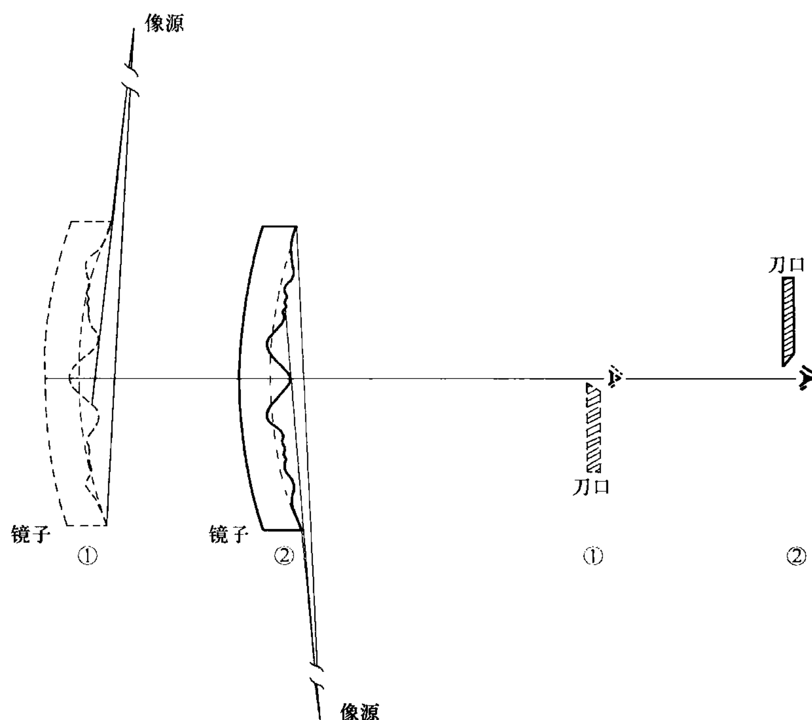


图 8.6　刀口检验时形成的阴影图的变化
（需要注意的是像源和刀口分别在光轴的两侧）



图 8.7　非规则镜的傅科图

够沿光轴或垂直于光轴横向或者上下移动。

8.2.2　几何原理

在傅科检验法中，刀的边沿线与主光线交点（X_1-Y_1 平面的原点）的距离为 r_1，Y_1 轴与刀口之间的夹角为 ϕ_1，如图 8.11 所示。如果刀口的斜率为正，角 ϕ_1 也就为正，刀的边

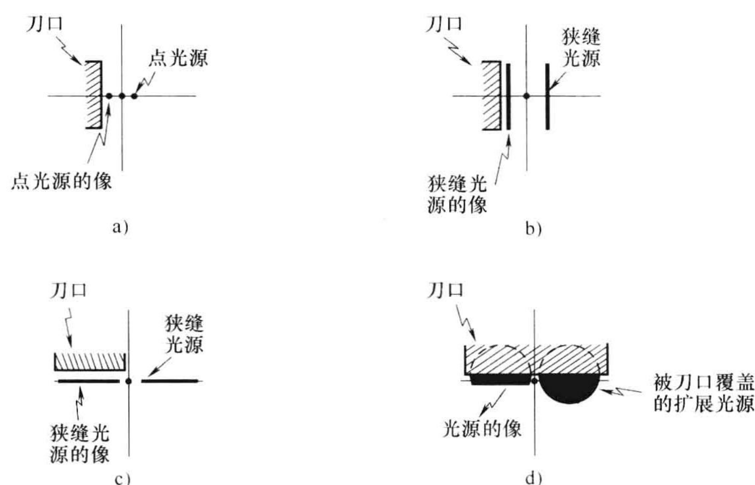


图 8.8　不同光源和刀口的不同排列

a）点光源　b）狭缝光源1　c）狭缝光源2　d）扩展光源

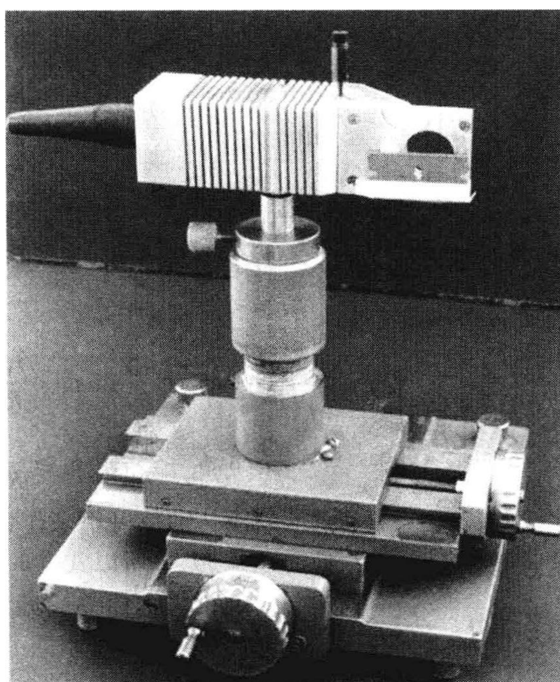


图 8.9　傅科检验的装置

沿线则由式（8.1）确定

$$x_1\cos\phi_1 - y_1\sin\phi_1 = r_1 \tag{8.1}$$

该平面上的透过率可表示为

$$T(x_1,y_1) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x_1\cos\phi_1 - y_1\sin\phi_1 < r_1 \\ 0 & \text{当 } x_1\cos\phi_1 - y_1\sin\phi_1 \geqslant r_1 \end{cases} \tag{8.2}$$

但是，由于理想的波面 W 的会聚近轴平面由 $X_1 - Y_1$ 平面所规定，所以这一平面上的任意一点（x_1，y_1）大致上都有如下特征（Rayces，1964）

$$(x_1, y_1) = \left(-R\frac{\partial W}{\partial x}, -R\frac{\partial W}{\partial y}\right) \tag{8.3}$$

式中，R 为 $X-Y$ 平面与 X_1-Y_1 平面之间的距离。

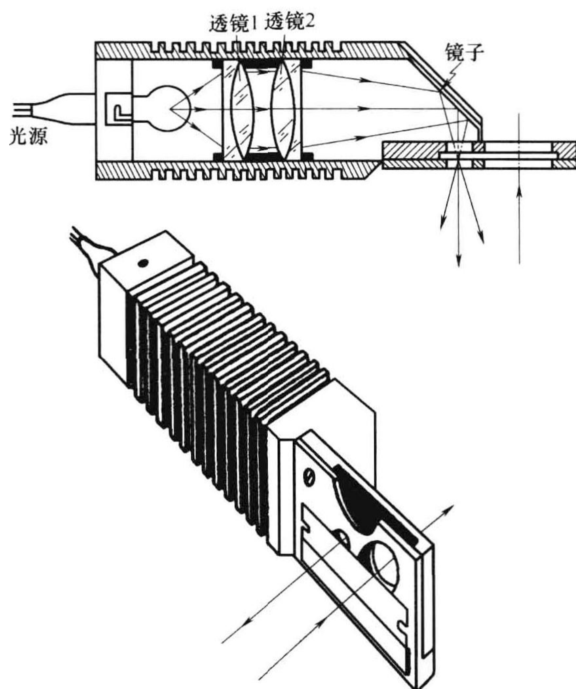


图 8.10 傅科装置图

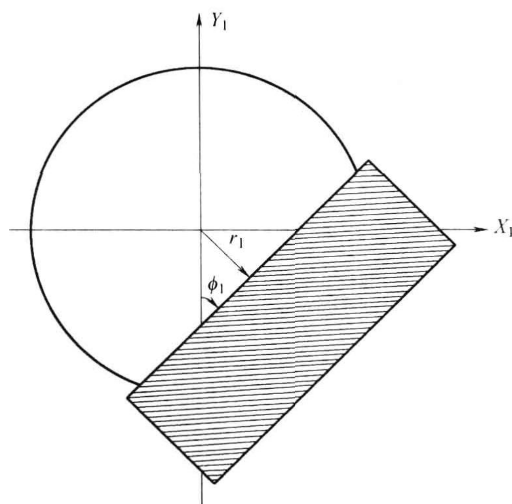


图 8.11 观察系统的入瞳面的刀口位置

将所得值代入式（8.2），透过率函数变为

$$T\left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}\right) = \begin{cases} 1 & \text{当} -\dfrac{\partial W}{\partial x}\cos\phi_1 + \dfrac{\partial W}{\partial y}\sin\phi_1 < \dfrac{r_1}{R} \\ 0 & \text{当} -\dfrac{\partial W}{\partial x}\cos\phi_1 + \dfrac{\partial W}{\partial y}\sin\phi_1 \geqslant \dfrac{r_1}{R} \end{cases} \tag{8.4}$$

对于特殊的旋转对称像差，X_1-Y_1 平面上的任一轴都可用来作为规定刀口位置的基准。就我们的要求而言，选择 X 轴比较方便，因此 $\phi_1 = 90°$，所以式（8.4）可简化为

$$T\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right) = \begin{cases} 1 & \text{当}\dfrac{\partial W}{\partial y} < \dfrac{r_1}{R} \\ 0 & \text{当}\dfrac{\partial W}{\partial y} \geqslant \dfrac{r_1}{R} \end{cases} \tag{8.5}$$

（1）焦点误差 现在研究第一种情况。在这种情况下有一个无像差的光学面，把刀口放在离会聚平面 X_1-Y_1 的某一距离上。换言之，在波面像差函数中只存在焦点误差，即

$$W(x, y) = D(x^2 + y^2) \tag{8.6}$$

根据式（8.5），当 $D \neq 0$ 时，暗区与明区的边界（明区，若 $y_1 < r_1$，则 $T=1$）可表示为

$$y_1 = \frac{r_1}{2DR} \tag{8.7}$$

因此，根据刀口放在焦点以内（D 为负）或焦点以外（D 为正）的不同情况，沿 Y 轴的阴影（即与 X 轴平行）就会由这一侧换到另一侧，如图 8.5 所示，分别从 Y 轴的负侧转

换到 Y 轴的正侧。

这一情况恰恰在前面描述过，在置人刀口时，指出在“理想”球面镜的那一侧将出现暗区。

刀口接触光轴时，出现了特殊情况。阴影图一半是暗半圆，另一半是亮半圆。换句话说，亮区与暗区的边界线是在任何 $D\neq 0$ 的情况下，当 $r_1=0$ 时，$y_1=0$ 的位置处。

（2）初级球差　当存在初级球差和焦点误差时，像差函数表示为

$$W(x,y)=A(x^2+y^2)^2+D(x^2+y^2)$$

因此，通过式（8.5），求阴影图边界的方程式为

$$y^3+\left(\frac{D}{2A}+y^2\right)y-\frac{r_1}{4AR}=0 \tag{8.8}$$

应注意，由于式（8.8）是随 x 而变化的，故阴影边界一般不限于直线。

在这种情况下，设式（8.8）中的 $x=0$ 而得出沿 Y 轴的阴影边界，则式（8.8）可改写为

$$y^3+\frac{D}{2A}y-\frac{r_1}{4AR}=0 \tag{8.9}$$

式（8.9）为三次方程，因此有三个根。当然，我们所关心的只是实数根。参数 Δ 的定义为

$$\Delta=\left(\frac{r_1}{8AR}\right)^2+\left(\frac{D}{6A}\right)^3 \tag{8.10}$$

从代数的已知结果，可得

1）若 $\Delta<0$，则有三个不相等的实根。

2）若 $\Delta=0$，则有三个实根，共中至少有两个相等。

3）若 $\Delta>0$，则只有一个实根和两个共轭虚根。

因此，如果符合条件1）和2），阴影图将会出现一个以上的暗区。这一情况只是在散焦系数和初级像差系数的符号相反时才会出现。换而言之，设 $\Delta\leqslant 0$，可以由式（8.10）得出

$$\left(\frac{r_1}{R}\right)^2\leqslant\frac{\left(-\frac{2}{3}D\right)^3}{A} \tag{8.11}$$

由于式中左边项总是正值，因此当把刀口放在焦点以内（D 为负值），并有正的初级像差时，或者同样的，当把刀口放在焦点以外，有负的初级像差时，阴影图则会出现两个暗区。

另外，当刀口接近光轴时，上述结果就会出现特殊情况。在这种情况下，$r_1=0$，式（8.9）变为

$$y\left(y^2+\frac{D}{2A}\right)=0 \tag{8.12}$$

解式（8.12）得

$$y=0 \tag{8.13a}$$

和

$$y=\pm\sqrt{-\frac{D}{2A}} \tag{8.13b}$$

事实上很明确，D 和 A 的符号必须相反，以便求出式（8.13b）的实根。图 8.1、图 8.12 和图 8.13 所示为球差的傅科图形。关于球差的不同处理方法，读者可参考康拉第（Conrady，1924）和金斯莱克（Kingslake，1937）的著作。

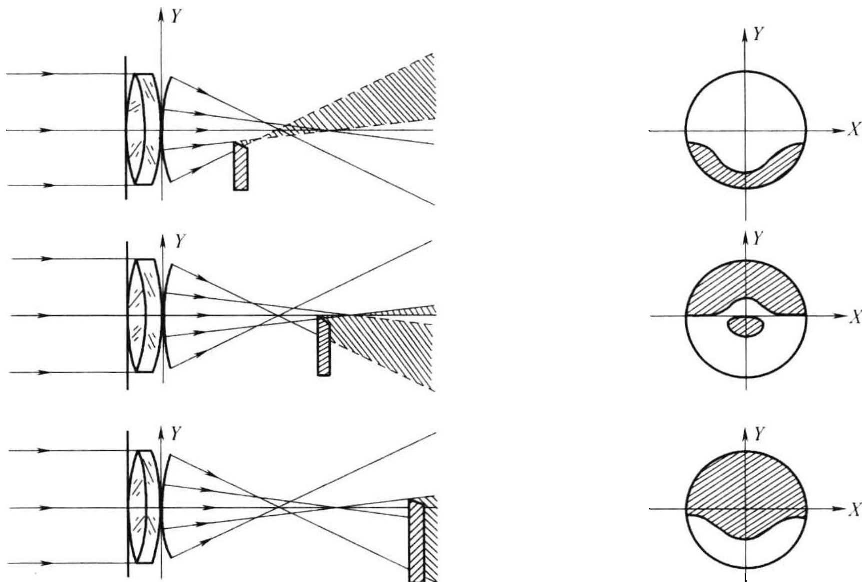


图 8.12 具有球差的透镜的刀口检验

（3）初级彗差 如果出现初级彗差和焦点误差，则像差函数由式（8.14）表示

$$W(x,y)=By(x^2+y^2)+D(x^2+y^2) \tag{8.14}$$

因为初级彗差没有径向对称性，因此将考虑刀口分别沿 X_1 轴及 Y_1 轴移动的两种情况。采用和上面举例相同的步骤，如果把刀口放在 X_1 轴上，与原点的距离为 r_1 时（与 Y_1 轴平行，$\phi_1=0$），则将得到符合式（8.15）的阴影图

$$2Bxy+2Dy=\frac{-r_1}{R} \tag{8.15}$$

为便于使用，可将式（8.15）写为

$$\left(y+\frac{D}{B}\right)x=\frac{-r_1}{2RB} \tag{8.16}$$

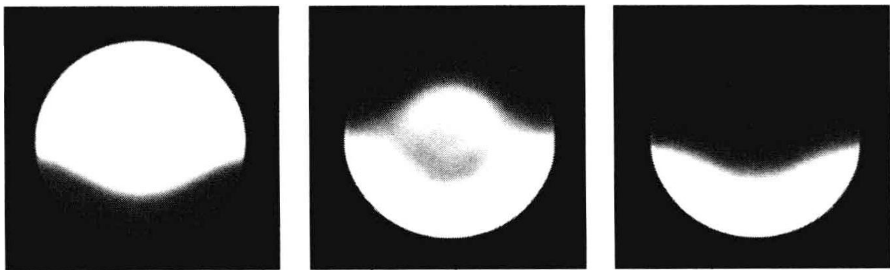


图 8.13 非球面镜的傅科图

显然，阴影图成为以$[O, -(D/B)]$点为中心的等轴双曲线，如图 8.14a 所示。

另一方面，在把刀口放在 Y_1 轴上的某点时（与 X_1 轴平行，$\phi_1=90°$），对于 y 的波面像差函数的偏导数为

$$\frac{\partial W}{\partial y}=B(x^2+3y^2)+2yD \tag{8.17}$$

因此，阴影图边界可从式（8.18）得到

$$x^2+3\left(y+\frac{D}{3B}\right)=\frac{r_1}{RB}+\frac{1}{3}\left(\frac{D}{B}\right)^2 \tag{8.18}$$

式（8.18）是一个以$[O,-(D/3B)]$为中心的椭圆方程，椭圆的长轴与 X 轴平行，而短轴将与 Y 轴方向一致，如图 8.14b 所示。

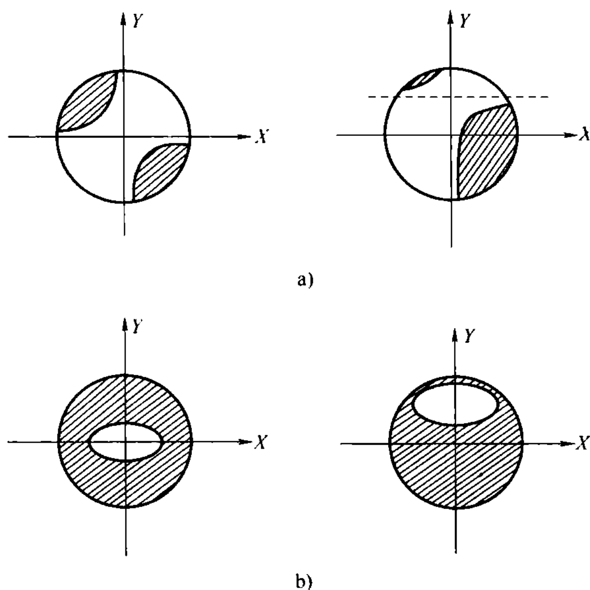


图 8.14　具有彗差模型的图形

a）刀口平行于 Y_1 轴　b）刀口平行于 X_1 轴

在刀口检验法中，通常采用的方法是把刀口放在近轴平面内。这样，上述阴影图就会以被检光学表面的原点为中心。这时在阴影图上放一块标尺，可以容易地得出等轴双曲线或椭圆图形的参数。换言之，把刀口放在近轴平面内，这时 $D=0$。因此，当刀口方向与 Y_1 轴平行时，在高斯平面中，从式（8.16）可知阴影图将由式（8.19）表示

$$yx=\frac{-r_1}{2RB} \tag{8.19}$$

因为，沿 X_1 轴的刀口位置 r_1 及被检光学表面与近轴平面之间的距离 R 均是已知参数，因此通过测量比值 $r_1/2RB$ 即可得出 B 值。

用类似的方法，刀口的方向与 X_1 轴平行时，在高斯平面内，式（8.18）中的阴影图可写成

$$x^2+3y^2=\frac{r_1}{RB} \tag{8.20}$$

在式（8.20）中，仍可通过求出参数 r_1 和 R，并且测出比值 r_1/RB 即可确定彗差量。

（4）像散　如果被检的光学表面有像散，并且（为了在任一平面内配置刀口位置）在

波面像差函数上再加上焦点误差，可得

$$W(x,y)=C(x^2+3y^2)+D(x^2+y^2) \tag{8.21}$$

正如在彗差的情况中一样，因为像散没有径向对称性，因此必须考虑刀口插入方向的效应。接着，要考虑沿着与 Y_1 轴相交夹角为 ϕ_1 的某轴的方向引入刀口而产生的各种情况。因为对于 x 的波面像差函数的偏导数为

$$\frac{\partial W}{\partial x}=2Cx+2Dx \tag{8.22a}$$

而且对于 y 的波面像差函数的偏导数为

$$\frac{\partial W}{\partial y}=6Cy+2Dy \tag{8.22b}$$

因此由式（8.4），得到阴影图的边界表达式为

$$-(C+D)x\cos\phi_1+(3C+D)y\sin\phi_1=\frac{r_1}{2R} \tag{8.23}$$

因此很清楚，有像散的光学表面会出现一条具有斜率 ψ 的直线，它由式（8.24）表示

$$\tan\psi\frac{3C+D}{C+D}\tan\theta_1 \tag{8.24}$$

如果沿 X_1 轴放置刀口（方向与 Y_1 轴平行，即 $\phi_1=0°$），则由式（8.24）得出阴影图边界为与 Y 轴平行的直线，如图 8.15a 所示，即

$$x=\frac{-r}{2R(C+D)}\quad 且\ \psi=90° \tag{8.25}$$

另一方面，当刀口（方向与 X_1 轴平行，即 $\phi_1=90°$）沿 Y_1 轴放置时，则阴影图的边界也有一条与 X_1 轴平行的直线，如图 8.15b 中所示，即

$$y=\frac{r_1}{2R(3C+D)}\quad 且\ \psi=90° \tag{8.26}$$

如同在朗奇检验中（参见第 9 章内容）一样应用式（8.24）求出刀口与阴影图边界线的夹角相关的斜率。在分析像散中利用这个斜率比较方便

$$\tan(\psi-\phi_1)=\frac{C\sin2\phi_1}{D+C(2-\cos2\phi_1)} \tag{8.27}$$

由此可见，在近轴平面（$D=0$）内，刀口与阴影图边界之间的夹角与被检光学表面射出的波面内存在的像散数量无关。

此外，由于刀口沿光轴移动（即 D 在变化），所以当 ϕ_1 在 0°和 90°之间（不包括 0°和 90°）变化时，阴影边界线斜率也随之变化。结果，当被检的光学表面有像散时，可观察到如图 8.15 所示的阴影图边界线的旋转状况。

值得注意的是，当用一个离轴放置的针孔光源检验一块小 f 数的凹面镜时（参见图 8.2），即使是理想的凹面镜，也会产生像散波面（参见第 18 章内容）。为了避免这种假像散误差的影响，可以用如图 8.16 所示的傅科检验装置在光轴上检验该凹面镜。

8.2.3 物理原理

如本章引言中所指出的，我们对依据衍射原理的刀口检验的分析只限于像差小于照明辐射波长的情况。对更详细的叙述感兴趣的读者，可参阅下列作者文献：瑞利（Rayleigh，1917），巴纳吉（Banerji，1918），泽尼克（Zernike，1934a、1934b、1942），盖斯科恩

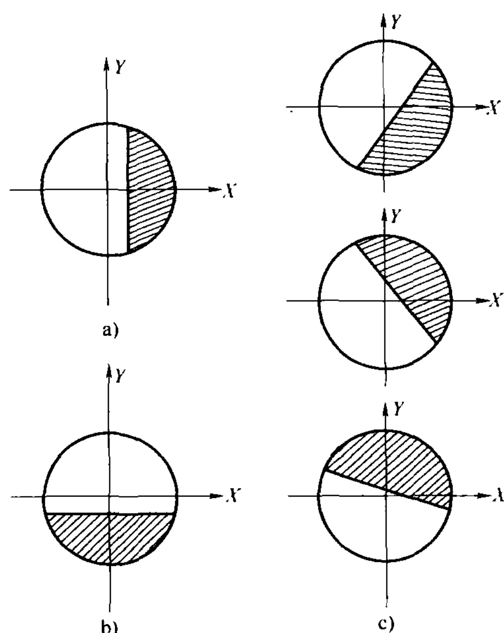


图 8.15　带有像散的阴影图

a) 刀口平行于 Y_1 轴　b) 刀口平行于 X_1 轴　c) 刀口与 Y_1 轴的夹角为 ϕ

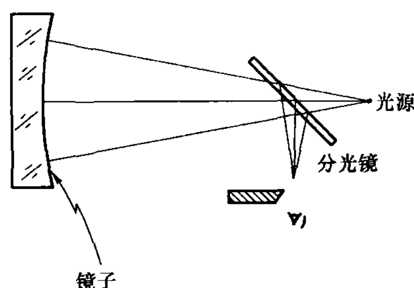


图 8.16　光轴上的傅科检验装置

(Gascoine, 1944), 林福特 (Linfoot, 1945、1946、1955) 和巴拉凯特 (Barakat, 1969)。

为了得到傅科图，先定义描述被测系统出瞳位置合成振幅的光瞳函数 $A(x,y)$ 如下

$$A(x,y)=A_0(x,y)\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}W(x,y)\right]\approx A_0(x,y)\left(1+i\frac{2\pi}{\lambda}W(x,y)\right) \tag{8.28}$$

如果在被测系统的出瞳处采用均匀照明，则

$$A_0(x,y)=\begin{cases}1 & 当\ x^2+y^2\leqslant S_{max}^2\\0 & 当\ x^2+y^2>S_{max}^2\end{cases} \tag{8.29}$$

S_{max}为出瞳半径，波前变形量 $W(x,\ y)$ 为相对于参考球面波来度量的，参考球面的球心在光轴与所选定近轴像面的交点处（所选像面为近轴像面）。如果波前变形量 $W(x,\ y)$ 小于光波波长，则合成振幅可以看做是两个波前的叠加：①振幅为 1，位相为 0 的一个完全无像差系统；②具有可变振幅的波前直接与 $W(x,\ y)$ 成比例，其位相恒为 $\pi/2$。

现计算观察平面的合成振幅 $B(f_x,f_y)$，其位于参考球面的曲率中心，且在测量中没有刀口。它为光瞳函数的傅里叶变换，为

$$B(f_x, f_y) = F\{A(x,y)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(x,y)\exp[i2\pi(f_x x + f_y y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{8.30}$$

式中，f_x和f_y位于参考球面曲率中心的傅里叶平面的空间频率。它们与平面坐标 x_1和 y_1的关系为

$$f_x = \frac{x_1}{\lambda r},\ f_y = \frac{y_1}{\lambda r} \tag{8.31}$$

r 为参考球面的曲率半径。

其傅里叶逆变换可以得到系统出瞳的合成振幅

$$A(x,y) = F^{-1}\{B(f_x, f_y)\} = F^{-1}\{F\{A(x,y)\}\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B(f_x, f_y)\exp[-i2\pi(f_x x + f_y y)]\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{8.32}$$

如果在平面（x_1, y_1）内引入一个位相振幅调制器（滤波器），其由合成传播函数 $M(f_x, f_y)$定义。则出瞳平面的滤波器合成振幅 $A'(x,y)$ 为

$$A'(x,y) = F^{-1}\{M(f_x, f_y)B(f_x, f_y)\} \tag{8.33}$$

计算 $A'(x,y)$ 的另一种方法是用 $B(f_x, f_y)$ 的傅里叶变换 $A(x,y)$ 和滤波器函数 $M(f_x, f_y)$的傅里叶变换 $G(x,y)$ 作卷积

$$G(x,y) = F^{-1}\{M(f_x, f_y)\} \tag{8.34}$$

此时，利用卷积定理

$$A'(x,y) = A(x,y) * G(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(u,v)G(u-x, v-y)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{8.35}$$

式中，符号 * 表示卷积。

利用式（8.35）和式（8.33）可以求得被测系统光瞳的像的合成振幅，其中，波前变形量的大小和光瞳函数的傅里叶变换平面的滤波器种类都可以是任意的。

傅科检验中的滤波器是刀口，其平行于 x_1 轴。因此，滤波函数可以由式（8.36）表示

$$M(x_1, y_1) = \begin{cases} 1 & y_1 > -d \\ 0 & y_1 > -d^{\ominus} \end{cases} \tag{8.36}$$

因此，$G(x, y)$ 为

$$G(x,y) = \frac{1}{2}\left[\delta(x,y) - i\frac{1}{xy}\delta(x)\exp\left(-i\frac{2\pi y d}{\lambda r}\right)\right] \tag{8.37}$$

在一般的情况中，我们描述两种特别有趣的情况：

1）没有像差，且刀口位于爱里斑中心（$d=0$）。

在这种情况中，将式（8.28）和式（8.37）代入式（8.35）中，则观察面得合成振幅变为

$$A'(x,y) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A_0(u,v)\left[\delta(u-x, v-y) - i\frac{1}{\pi(y-v)}\delta(u-x)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{8.38}$$

利用单位脉冲函数的特性，式（8.38）可变为

$$A'(x,y) = \frac{1}{2}A_0(x,y) - \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A_0(x,v)\frac{1}{y-v}\mathrm{d}v \tag{8.39}$$

第二项是希尔伯特变换，其包含了我们想要的内容。当 $A_0(x,y)$ 取 1 时，整理式（8.39）得

⊖ 原著公式有误，此处应为 $y_1 \leqslant -d$。

$$A'(x,y)=\text{常数}\times\ln\left|\frac{y+(S_{\max}^2-x^2)^{1/2}}{y-(S_{\max}^2-x^2)^{1/2}}\right| \tag{8.40}$$

在这里，ln 表示自然对数，从式（8.40）中，我们可以得出被测系统光瞳周围会出现亮环，即瑞利衍射环，不应该将其看成为是边缘误差或者与其他实际误差混淆。威尔福特（Welford，1970）曾证明，在实际情况中，这些环的亮度因受到观测系统光瞳尺寸的限制而减弱。

2）像差很小，但是刀口足够大而遮盖了部分图像，但又因为其足够远，所以爱里斑的尺寸没有被遮盖。

在前面的假设中，波前不是球面的，而是异常的。波前像差 $W(x,\ y)$ 比波长小得多，将式（8.28）中的近似值代入式（8.30）中，可以得到 $B(f_x,f_y)$ 的表达式如下

$$\begin{aligned}B(f_x,f_y)&=F[A_0(x,y)]+i\frac{2\pi}{\lambda}F[A_0(x,y)W(x,y)]\\&=F[A_0(x,y)]+iB_2(f_x,f_y)\end{aligned} \tag{8.41}$$

其中

$$B_2(f_x,f_y)=\frac{2\pi}{\lambda}F[A_0(x,y)W(x,y)] \tag{8.42}$$

因此，由式（8.33），同时考虑到刀口不会遮盖直径为爱里斑的图像的中心部分

$$A'(x,y)=A_0(x,y)+iF^{-1}[M(f_x,f_y)B_2(f_x,f_y)] \tag{8.43}$$

如果将表达式写为

$$A'(x,y)=A_0(x,y)+i[W'_{\text{real}}(x,y)+iW'_{\text{imag}}(x,y)] \tag{8.44}$$

傅科图的观察亮度为

$$I(x,y)=A'(x,y)A'^*(x,y) \tag{8.45}$$

故观察亮度变为

$$I(x,y)=A_0^2(x,y)+W'^2_{\text{imag}}(x,y)+W'^2_{\text{real}}(x,y)-2A_0(x,y)W'_{\text{imag}}(x,y) \tag{8.46}$$

但是因为 W'_{imag} 和 W'_{real} 的值很小，式（8.46）可以近似为

$$I(x,y)\approx\text{常数}-2A_0(x,y)W'_{\text{imag}}(x,y) \tag{8.47}$$

显然，成像面的亮度变化表明存在像差，为了得到 $W'_{\text{imag}}\neq 0$，就需要在成像面的光瞳函数上加上一个修正器，即刀口滤波器。同一背景下的图像亮度变化对比度为

$$\gamma=\frac{4\pi}{\lambda}W'_{\text{imag}}(x,y) \tag{8.48}$$

因为肉眼能区分的最小对比度为 $\gamma=2\%$，所以能得到的傅科检验的灵敏度的理论极限为

$$\frac{\lambda}{200\pi}=W'_{\text{imag}}(x,y) \tag{8.49}$$

这与 $\lambda/600$ 很吻合。这个值是泰克斯劳（Texereau，1957）发表的，当时他将此方法与利奥特（Lyot，1946）相位对比技术进行了对比，检查了该方法的灵敏度。

奥杰达-卡斯泰达（Ojeda-Castañda，1978、1979、1980a、1980b）研究过成像面光强与被测波前像差的详细数学描述的关系。

8.3　细丝检验法

从 8.2 节可以清楚地知道傅科刀口法在探测环带误差方面是十分灵敏的；然而，傅科刀

口法对测量环带误差量并不敏感。因此，由于不能检验出非球面形的微小细节，傅科图在检验非球面误差时用处不大。

为了测量非球面反射镜，朗奇（Ritchey，1904）提出，在用傅科法检验非球面镜时，使用一块不同环带开缝的光阑。这样，就有可能计算各个带区的横向像差量（当刀口沿在光轴移动到达某一位置时，带区正好变暗），还可以把位于光轴两侧的这一带区的两个开缝照度进行对比，以检查开缝后面的镜面部分是否规则，并使其互相匹配。

因为抛物镜面是最常用的镜面，所以为检验这种光学表面而设计了一种遮光光阑，只允许镜面上的三个区域受到照射，即中心（近轴）区、轮缘（边缘）区和上两者之间的中间区。这三个区分别与焦散的两端和中心有关（参见图 8. 18）。只要将光阑屏放到镜面上，就可用刀口沿着光轴找出从给定带区两端发出的光线会聚的位置。换而言之，通过找出上述三个带区变暗时的位置，就能够确定焦散区间隔的两极及其中点的位置。

假定光源与刀口同时移动，由于法线的横向像差量（与曲率中心被检抛物面中存在的球差有关）等于 cS^2。其中 $S^2=x^2+y^2$，仍为镜面任意带区的半径，c 等于镜面近轴区的近轴区曲率半径的倒数，那么，如果想要使带区的理想横向像差为边沿位置理想横向像差的一半，以使光轴在焦散线的中心位置与其相交，遮光的中间带区半径就必须是 $S=0.707S_{max}$。

光阑上开缝的宽度必须通过实验来确定，开缝必须足够窄，以便提高局部精确度，但又不能过窄以免产生衍射的影响。

柯德（Couder，1932）设计了一种通用性更强的遮光光阑，如图 8. 17b 所示。这种光阑上只有外区（边缘区）的宽度必须由实验来确定，而内区的半径和宽度可根据下述情况来确定：各带区彼此直接相连而且相邻两个带区的半径平方之差为一常数。换而言之，如果边缘径向宽度的实验值为 δS，由于 n 倍开缝的半径是 n 倍带区的外径，这一 $n-1$ 倍带区的内外半径之差为

$$S_n-S_{n-1}=(\delta S)^2 \tag{8.50}$$

因此 $n-1$ 倍带区的内径，或 $n-2$ 倍带区的外径可由式（8. 51）求出

$$S_{n-1}-S_{n-2}=(\delta S)^2 \tag{8.51}$$

这样，所有区域的半径都可以确定。

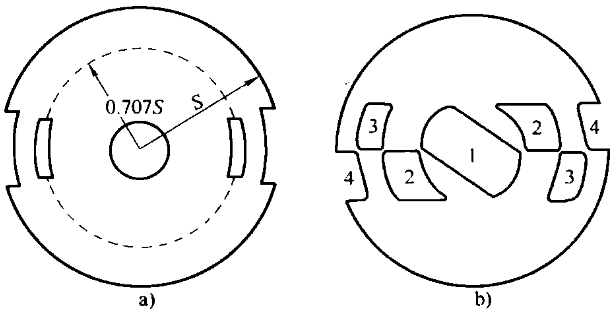


图 8. 17 带区傅科检验法中使用的光阑

a）带区光阑 b）柯德式光阑

这种光阑的优点是能够观察整个镜面，而且能够检验表面的整个形状。另一方面，任何一种光阑检验方法都有一个缺点，即测量的误差约等于抛光光学表面的允差（Schroader，1958），因此，需要一种更精密的非球面检验方法，在这种情况下，细丝检验法和普拉兹克-

盖维俄拉（Platzeck-Gaviola）检验法（见8.4节）的效果比较好。细丝检验法只适用于非球面镜、锥形表面或者非锥形表面，其使用方式与带区刀口检验法相类似，即在一个非常窄的带区内遮挡偏离光线（或衍射光）。为此，在靠近各种环状带区的法线与被检反射镜或表面的光轴相交的位置放置一根不透明细丝，检验透镜用的细丝法光路结构如图8.18所示。这样，当被检验的环带在均匀的明亮背景下变暗时，就能在光学表面上找到一个特殊环带法线的特殊交点。实际上，这是通过将细丝和针孔大小的光源一起移动来完成的（例如，移动带有细线和针孔尺寸光源的平面）。针孔光源不一定是单色光源。

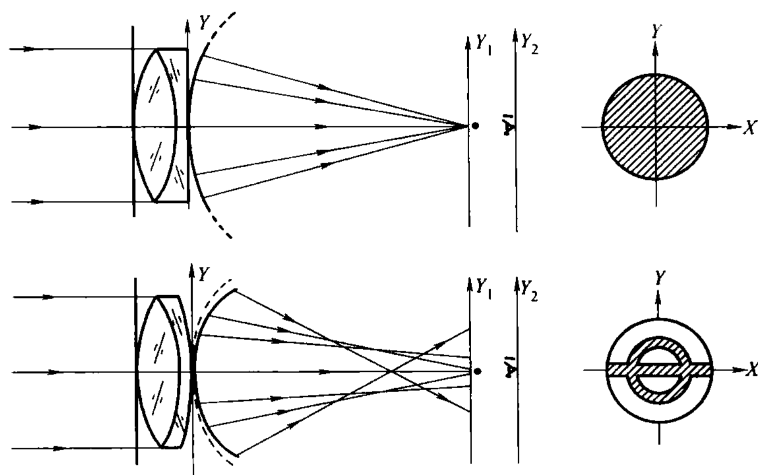


图8.18　检验透镜用的细丝法光路结构

相比遮挡被检光学面时使用的带区刀口检验法，细丝检验法的主要优势是能使遮挡作用只限制在被检环带的非常窄的区域里。另外，对环带区来说，衍射效果是对称的。因此，法线与光轴交点的测定就变得更为精确，而且采用这种方法还可测出交点实验值与理想值之间的偏差。换而言之，可确定各个法线的像差，细丝检验法示意图如图8.19所示。

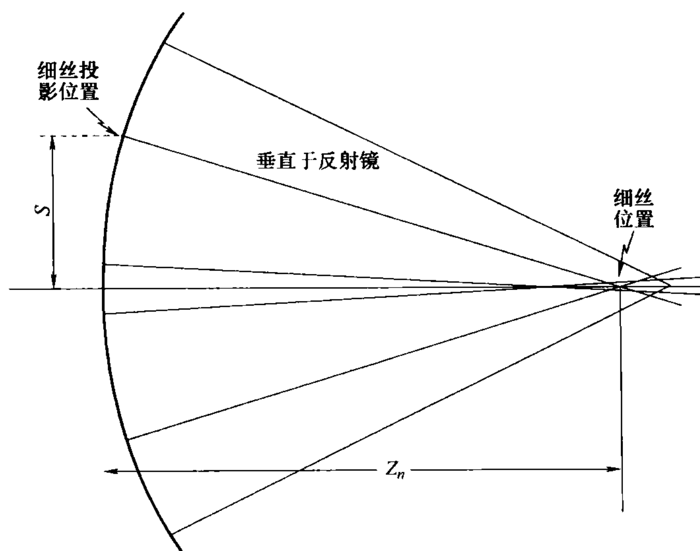


图8.19　细丝检验法示意图

此外，细丝法的优点是光轴与法线交点的测量值与第一环带或近轴环带的交点界理论值有关。这个优点对于检验有中心孔的光学零件毛坯极为有用。

因为细丝遮盖的区域仅仅相当于傅科检验法中刀口的边缘，所以用细丝检验法获得的阴影图只包含有细的、暗黑的轮廓线，如图 8.20 所示。请把这些细丝法阴影图同图 8.21 中傅科刀口检验法的对应阴影图进行比较。

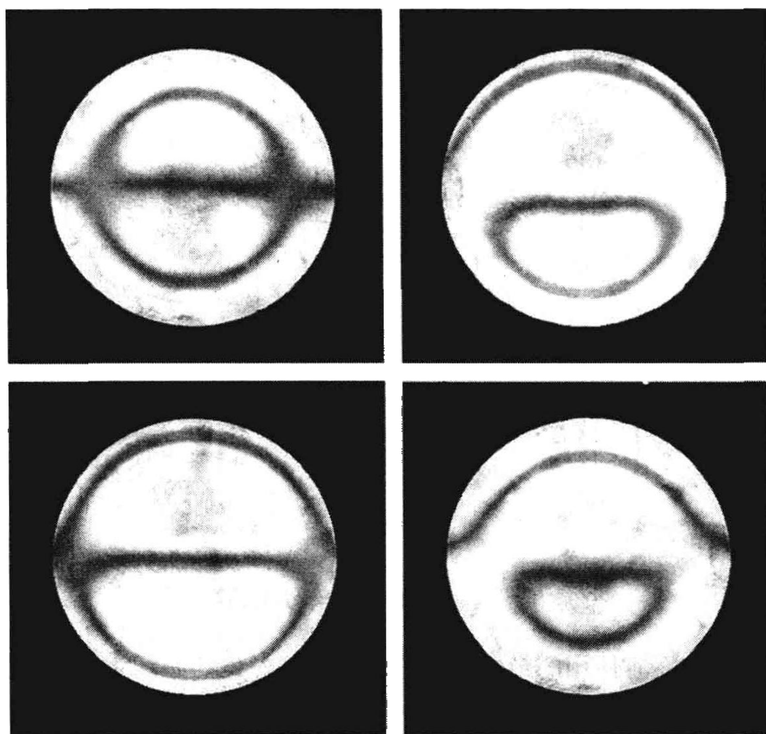


图 8.20 使用细丝检验法所得的阴影图

实践证明，细丝检验法是检验正在修磨的非球形光学面的一种好方法，也是检验纵向像差的有效方法。使用数学积分还可以获得波面像差（Buchroader et al.，1972；Fell，1968；Loomis，1968；Smith，1966）。细丝法的主要缺点是当细丝沿光轴移动时阴影图的宽度有时会掩盖整个阴影的微小位移。

梅尼尔（Meinel，1968）指出，通过判定环形阴影是否是圆形，还可用于检验像散。

如果用 r_1 表示细线中心部分的位置，细丝宽度用 $2\delta r$ 表示，则近轴平面中的振幅透过率由式（8.52）表示

$$T(x_1,y_1)=\begin{cases}1 & \text{当}\ |x_1\cos\phi_1-y_1\sin\phi_1|>\delta r\\ 0 & \text{当}\ |x_1\cos\phi_1-y_1\sin\phi_1|<\delta r\end{cases} \tag{8.52}$$

用细丝检验法所获得的暗轮廓线中心与用傅科刀口法所获得的阴影图明、暗区之间的边界是一致的。当然，因为细丝没有刀口连接部分的遮挡现象，所以暗区将变为沿边界位置的暗线条。

在本节中，我们将介绍用于在光轴与法线交点的实验测量中，获取被检光学面的波面像差的方法。设被检光学面法线与光轴交点的实验值和理论值分别为 Z'_n 和 Z_n 横向像差可由式（8.53）得出

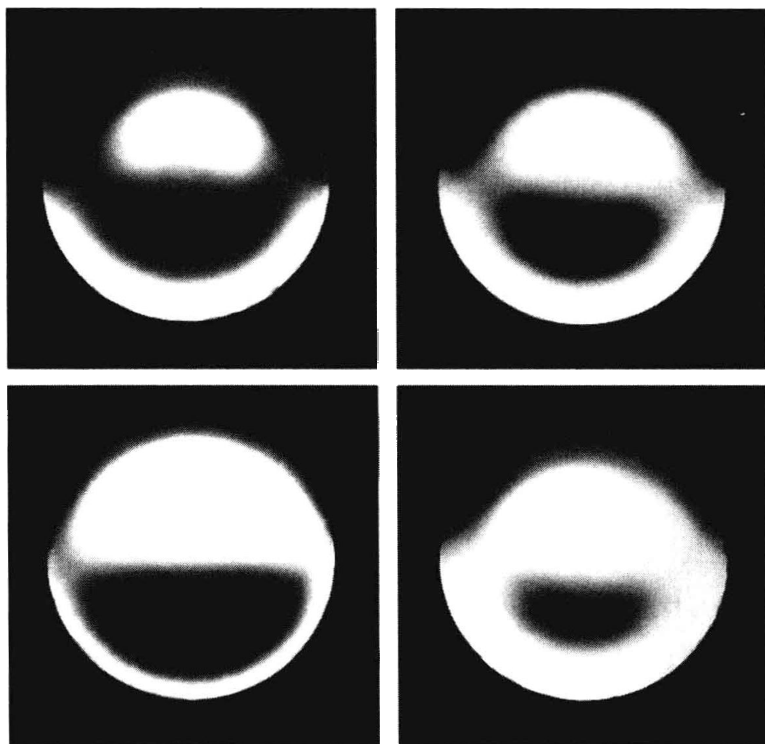


图 8.21　使用傅科刀口法所得的阴影图

$$TA = (Z'_n - Z_n)Sc \tag{8.53}$$

式中，c 为中心区曲率半径的倒数；$S^2 = x^2 + y^2$。

由式（8.54）可得波面像差

$$W = c^2\int_{S-0}^{S}(Z'_n - Z_n)S\mathrm{d}S \tag{8.54}$$

用梯形法则求此积分的数学解（将此积分区分为 M 个子区间），即

$$W_M = \frac{c^2}{2}\sum_{m=1}^{M-1}[(Z'_n - Z_n)_{m+1}S_{m+1} + (Z'_n - Z_n)_m S_m](S_{m+1} - S_m) \tag{8.55}$$

用这个公式可由实验值 Z'_n、S_m、S_{m+1}及理论值 Z_n计算出波面向差。

计算过程如下：

1）法线与光轴交点的理论值为

$$Z_n = \frac{1}{c} - Kz \tag{8.56}$$

式中，$K = -e^2$，e 为二次曲面偏心率；z 是通过由 S_m实验值得到的。

2）计算（$Z'_n - Z_n)_m S_m$各项的值，最后得出被检光学表面上的波面像差 W_u。

8.4　普拉兹克-盖维俄拉检验法

由普拉兹克-盖维俄拉（Platzeck-Gaviola）介绍的所谓焦散检验法，其事实根据为“理想”抛物面反射镜上所有离轴分块镜的曲率中心不是位于光轴上，而是如魏兹沃斯（Wadsworth，1902）所指出的，在中心之外的一条所谓焦散曲线上。为了证明这一点，普拉兹克-

盖维俄拉做了一个极好的实验。将抛物面反射镜上除两个对称椭圆形带区以外的部分全都遮挡住。然后，用一狭缝光源照明该抛物面镜，并根据照明狭缝光源的不同位置记录下该光学系统所形成的图像。

从镜子的焦内和焦外不同位置拍摄的一组照片（表示照明狭缝的像）清楚地表明（这是普拉兹克和盖维俄拉所摄的照片示意图，如图8.22所示）：当两束光与光轴交叉时，图像并不清晰。但是当光学系统存在聚焦误差时，衍射斑纹与所获得的图像有关。此外，在同一组照片中发现了这些图像的焦平面，似乎是位于两幅图像与光轴相交的区域后面。

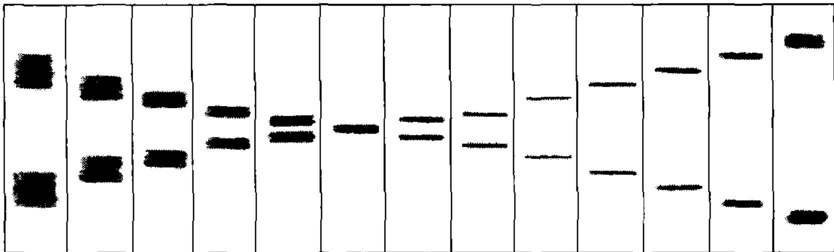


图8.22 普拉兹克和盖维俄拉使用两个在镜面上的狭缝所摄取的照片的示意图

因此，普拉兹克-盖维俄拉得出结论：为了获得精确测量结果，必须将该焦平面与光轴外侧的图像用做修正平面。而且，由于细丝与照明狭缝的图像一致，所以用一根不透明的细丝做修正屏更为适合。

这种方法本身已证明了它的有效性与精确性。正如斯柯罗德（Schroader，1953）所指出的，这种方法的主要优点是：

1）一次能够观察遮光屏的一个孔。

2）可以在遮光屏上打一些比检验带区误差的振幅刀口法使用的孔大得多的孔。

3）在光轴上使用刀口检验时，获知由遮光屏上一个孔所曝光的反射镜部分的曲率中心的标准（即通过一不透明细丝或窄条带的最小照度），比在两个光孔内匹配的光强分布的标准更可靠。

关于该检验法的几何原理，首先要说明如何计算所有回转二次曲线某部分的理论曲率中心（Corncjo and Malacara，1977），然后再说明根据被检光学面上几个部分的曲率中心的实验和理论数据来测量镜面形状的方法。

定义一组新的坐标（η,ξ），又称焦散坐标，即平面的原点位于中心带区的曲率中心，如图8.23所示。任何带区的曲率中心都以这一原点为基准。

任意回转二次曲线的曲率中心坐标（η,ξ）可由式（8.57）得出

$$\frac{\xi}{2(\eta+Kz)}=\frac{S}{(1/c)-(K+1)z} \qquad (8.57)$$

图8.23中，虚线所示的三角形。从同一图中，镜面上坐标为（z,S）的一点和在（$1/c+\eta,\xi/2$）的曲率中心之间的距离R可由式（8.58）求出

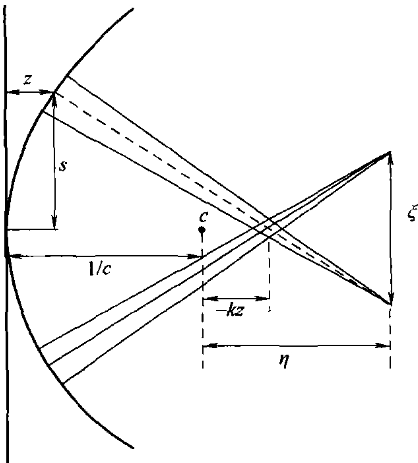


图8.23 焦散的几何图

$$R^2=\left(S+\frac{\xi}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{c}+\eta-z\right)^2 \tag{8.58}$$

当然，R 是曲率半径，它也可用求任意函数 S 的曲率半径的著名计算公式得出，即

$$R=\frac{[1+(\mathrm{d}z/\mathrm{d}S)^2]^{3/2}}{\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}S^2} \tag{8.59}$$

所以，z 对于 S 的一阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}S}=cS[1-(K+1)c^2S^2]^{-1/2} \tag{8.60}$$

从式（8.60）可计算二阶导数，得

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}S^2}=c[1-(K+1)c^2S^2]^{-3/2} \tag{8.61}$$

如果将这两个结果代入式（8.58），可得

$$R=\frac{1}{c}(1-Kc^2S^2)^{3/2} \tag{8.62}$$

但如果将式（8.57）中的 $\xi/2$ 值代入式（8.58），可得

$$R^2=\left(\frac{1}{c}+\eta-z\right)^2\left\{1+\frac{S^2}{[(1/c)-(K+1)z]^2}\right\} \tag{8.63}$$

所以，从式（8.62）和式（8.63）可得 η 的值，即

$$\eta=\frac{(1/c)(1-Kc^2S^2)^{3/2}}{\left\{1+\frac{S^2}{[(1/c)-(K+1)z]^2}\right\}^{1/2}}+z-\frac{1}{c} \tag{8.64}$$

为消去 S，可用 z 的表示式代入式（8.64）。

$$\eta=-Kz\{3+cz(K+1)[cz(K+1)-3]\} \tag{8.65}$$

以 η 值代入式（8.57）而得 ξ 值，即

$$\xi=-2ScKz\left\{\frac{2+cz(K+1)[cz(K+1)-3]}{1-cz(K+1)}\right\} \tag{8.66}$$

根据式（8.66），可以计算出反射镜上坐标为（z,S）的某一特定区带的曲率中心（$\eta,\xi/2$）的理论位置。

使用焦散法时，一般程序如下（Schroader，1953）：

1）根据反射镜中心带区的曲率半径测量 c。

2）在遮光屏上切割出许多奇数带区，以便得到一个中心带区。

3）当细丝沿光轴移动时，依照镜面的阴影图形确定中心带区的曲率中心。

4）当细丝挡住遮光屏每一个开口发出的光线时，计算出某特定带区的曲率中心的（η,ξ）的理论值及（η',ξ'）的实验值。

应注意的是，只有用此法才能对特定带区的每一开缝进行单独的检验。因此，这种方法对检验非对称分布的误差可能特别有用。

5）用理论值减实验值，如果所得出的差是正值，则对特定带区的校正过度，反之亦然。

西蒙（Simon，1971）和普拉兹克（Platzock and Simon，1974）曾经研究了这种检验法的衍射原理。特罗卡瑞斯和杜托斯（Teocaris and Gdoutos，1976）介绍了这种检验法的有趣的变化。

8.5 调相检验法

泽尼克（Zernike，1934a）用衍射理论分析过傅科刀口检验法。同时，他还提出一种刀口法的改进形式，称为“相衬法”（Linfoot，1946b）。利奥特（Lyot，1946）独自一人发现了与相衬法基本上相同的检验法。后来沃尔特（Wolter，1956）进一步发展了调相检验技术的应用。

8.5.1 泽尼克检验及其与斯马特干涉仪的关系

之前，在第3章已经对点衍射干涉仪作过介绍。这种干涉仪将被测量的畸变光波在衍射平面上聚焦生成一幅图像。衍射面中心处有一个半径为 a 的小圆形区域，其振幅透射率比围绕它的环形区域的要小，斯马特干涉仪衍射面的振幅透射率如图 8.24 所示。

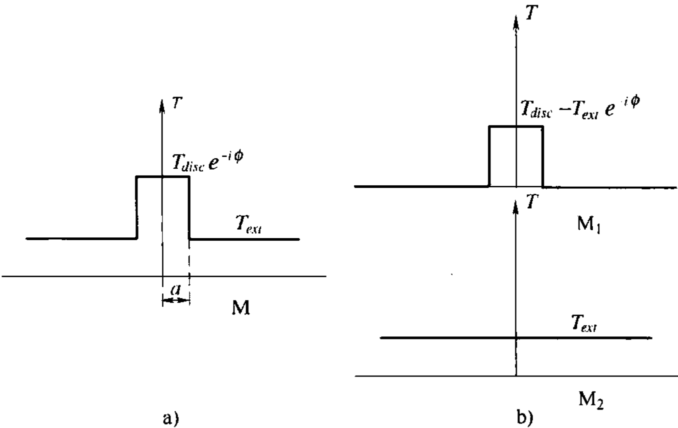


图 8.24 斯马特干涉仪衍射面的振幅透射率

a）总透射率 b）两部分各自的透射率

环带部分的振幅透射率为 T_{ext}，通常小于 1，中心区域的振幅透射率为 T_{disc}，通常取 1。为了使通过两部分的光的相位差为 90°，需要在中心区域覆盖一层光学厚度为 ϕ 的膜，以便使通过中心区域的光的相位比通过环带区域的光的相位大。在 3.8 节中我们已经得到了被测波前与由中心区域衍射产生的参考波前之间的相位差 γ 为

$$\tan\gamma = \frac{T_{disc}\sin\phi}{T_{disc}\cos\phi - T_{ext}} \tag{8.67}$$

要使 $\gamma = \pi/2$，就需要满足

$$\cos\phi = \frac{T_{ext}}{T_{disc}} \tag{8.68}$$

为了获得高对比度的干涉条纹，被测光波与参考光波在观察屏上应该有相同的幅值。这需要控制好平均传送率 T_a 和 T_b，以及中心斑的直径（Golden，1977a、1977b）。

相衬法在检验像差小于照明辐射波长的光学表面时，具有以下优点：

1）像差作为一种在均匀背景光强上的线性迭加项而存在。

2）通过减小背景照明的光强度，也就是减小透过 $\lambda/4$ 区的光透射率来增大这一均匀背

景光强上的像差对比度。

下面将讨论与此有关的数学公式。

在相衬检验法中所使用的修正函数可以看做是一个圆斑，其复振幅透射率为 $TA_{disc}\exp(i\phi)$，半径 a 近似等于爱里圆斑的半径。在圆斑之外环带处的复振幅透射率为 T_{ext}，即衍射面的振幅透过率函数为

$$M(\sigma)=T_{disc}\exp(i\phi) \quad 当 \quad \sigma<\frac{a}{\lambda r}$$

$$M(\sigma)=T_{ext} \quad 当 \quad \sigma>\frac{a}{\lambda r} \tag{8.69}$$

和

$$V>\frac{a}{\lambda r} \tag{8.70}$$

如图8.25所示，也可以将式（8.69）等价地写成 $M(\sigma)=M_1(\sigma)+M_2(\sigma)$，其中

$$M_1(\sigma)=T_{disc}\exp(i\phi)-T_{ext} \quad 当 \quad 0<\sigma<\frac{a}{\lambda r}$$

$$M_2(\sigma)=T_{ext} \quad 当 \quad 0<\sigma<\infty \tag{8.71}$$

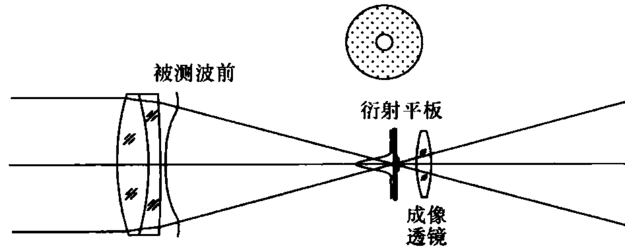


图8.25　用斯马特干涉仪进行透镜检验

在像平面上观察到的经过衍射面过滤后的光波复振幅为

$$A'(x,y)=\mathfrak{F}^{-1}(M_1(f_x,f_y)\mathfrak{F}(A(x,y)))+\mathfrak{F}^{-1}(M_2(f_x,f_y)\mathfrak{F}(A(x,y))) \tag{8.72}$$

应用式（8.55）中的过滤函数的值后有

$$A'(x,y)=T_{ext}A(x,y)+\mathfrak{F}^{-1}(M_2(f_x,f_y)\mathfrak{F}(A(x,y))) \tag{8.73}$$

在双光束干涉或多光束干涉中常常使用相衬法（Françon，1952；Françon and Nomarski，1952；Golden，1977a；Smartt，1975），式（8.73）中的第一项表示振幅为 T_{ext} 的被测波前，第二项表示参考波前。图像中心处（光轴）的复振幅 B_0 可以表示为

$$B_0=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{8.74}$$

假设中心圆斑足够小，以至于圆斑上像上的振幅和相位都为常数且等于 B_0，则方程（8.56）中的第二项可以写为

$$2\pi a^2[T_{disc}\exp(i\phi)-T_{ext}]B_0\frac{J_1(2\pi\rho a)}{2\pi\rho a} \tag{8.75}$$

所以，光轴位置的参考波前的振幅为

$$2\pi a^2[T_{disc}\exp(i\phi)-T_{ext}]B_0 \tag{8.76}$$

达到最大条纹可见度的条件是被测波前和参考波前具有相同强度，因此

$$2\pi a^2[T_{disc}\exp(i\phi)-T_{ext}]B_0=T_{ext} \tag{8.77}$$

如果波前像差与波长相比很小，且两相干波前之间的相位差为 $\pi/2$，则像的强度变化与像差函数成比例。当然，如果像差是一个平稳变化的函数并均匀地分布在目标上，则它的衍射条纹可能会穿过中心圆斑。所以，其在像强度分布上仍然不可见。这时，可以通过降低图像的背景强度，也就是增加中心圆斑处的吸光率来增加条纹对比度，正如前文所述。

为了进一步弄清干涉仪中两相干光是如何相互作用的，我们将从被测表面发出的光波的复振幅表示为

$$A(x,y)=A_0(x,y)\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}W(x,y)\right) \tag{8.78}$$

其中，$W(x,y)$ 是波前变形。如第 3 章中的图 3.23 所示，通过衍射面后的光波的复振幅可方便地写为

$$\begin{aligned}A'(x,y)&=T_{ext}A_0(x,y)\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}W(x,y)\right]\\&\quad+K[T_{disc}\exp(i\phi)-T_{ext}]A_0(x,y)\end{aligned} \tag{8.79}$$

其中，第一项是被测波前，第二项是“理想”球面参考波。由式（8.75）得 K 因子为

$$K=2\pi a^2B_0\frac{J_1(2\pi\rho a)}{2\pi\rho a} \tag{8.80}$$

8.5.2 利奥特检验法

最后，如泰克斯劳（Texereau，1957）所指出的，虽然已经证明相衬技术在显微技术方面极为有用，但它在光学检验方面的价值似乎是有限的。问题在于这种检验涉及光度学，即以光强度变化为基础，并且对所得结果的解释和应用都不是直接的。从物理光学的观点来看，当对这种检验方法的性质缺乏了解时，上述问题尤为明显。在光学检验中，相衬法用得最多的是检验小面积和小振幅的表面缺陷。

如前所述，泽尼克检验法通常采用点光源（白光或单色光）和有一小圆斑的相位板（小圆斑比爱里斑小或者一样大）进行。另外一种方法是采用圆形或者环形扩展光源，以及阻滞带区与光源的几何图像完全一致的相位板，现代相衬显微镜使用的就是这种方法。该方法的优点在于使用了更多的光，而且制作更大的相位板比较容易。利用这一原理，利奥特（Lyot，1946）成功研究出一种与泽尼克检验法不同的技术，他采用较宽的狭缝（100～240μm）作为照明光源。这一狭缝通过被检验光学面在一个光学厚度为 $\lambda/4$ 的相位阻滞狭缝上成像。为了提高对比度，阻滞狭缝的透过率减低至大约 $T=10^{-D}$，D 为光学密度，其范围为 1.5～3.0。

因为光源是一狭缝，而不是圆形的，所以在狭缝方向，衍射光不会改变与非衍射光相对的相位。这样，就不能检验出相应误差。也就是说，只能够测到垂直于狭缝方向变化的误差。这种误差的择优取向如图 8.26 所示，是用垂直狭缝拍摄的 Lyot 图。假定真实误差为随机取向，误差的取向则可以忽略不计。

利奥特相衬法相当灵敏，以至于可以观察到对比度等于 15% 的与平均表面偏差为 1Å 的缺陷。

如果使用一个多色光源，则调相光阑对不同的波长有不同的光学厚度，而且图像的光强可以呈现出彩色变化。

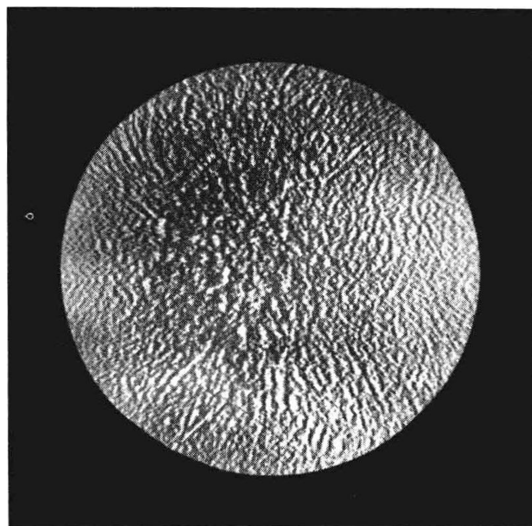


图 8.26　用垂直相位狭缝拍摄的 Lyot 图　(Francon, 1963)

关于实际制作相位板或相位狭缝的方法，可参阅伯奇 (Burch, 1934)、泽尼克 (Zernike, 1942) 弗朗松和诺玛斯基 (Françon and Nomarski, 1952) 及哥登 (Golden, 1977b) 的文章。

8.5.3　沃尔特检验法

由沃尔特 (Wolter, 1949) 和卡斯特勒 (Kastler, 1950) 分别独立提出的 $\lambda/2$ 相位边缘或相位刀口检验法，可看做是对细丝检验法或带区傅科刀口法的一种改进。这种方法的基本概念不像在使用刀口法时那样遮住衍射光，而是有效地利用一侧的衍射光。

这种方法基于使通过一半平面的复振幅的符号反向，而经过另外一半平面的符号不变。采用光学厚度等于 $\lambda/2$ 的透明半平面即可做到这一点。此法也称为希尔伯特 (Hilber) 变换法 (Lowenthal and Belvaux, 1967; Belvaux and Vareille, 1970、1971)，因为在对物体作希尔伯特变换时，图像是用数学方法获得的。

由于在这一检验中，更多的衍射光进入观察者的眼睛，所以，这是一种产生有较高对比度的阴影图的理想方法。因此，这种 $\lambda/2$ 相位刀口检验法在确定被检非球面上相位刀口的投影位置方面，要比一般刀口检验法更灵敏和更精确。在这里，与在相衬法中类似，不可能用几何光学的观点来解释在近轴焦平面附近引入相位刀口时图像平面上的光强度变化。然而，兰德格雷夫 (Landgrave, 1974) 又提出另外一种假设：即只有通过 $\lambda/2$ 相位刀口边沿的光线才会有相消干涉。

虽然这种方法可能比较原始，但是符合以下事实：一个 $\lambda/2$ 相位刀口的非涅耳衍射图像在对应相位刀口边缘处的图像光强度值为零 (Kastler, 1950; Hopkins, 1952; Ojeda-Castaneda, 1976)，如图 8.27 所示。事实上，由于 $\lambda/2$ 相位刀口被看做是与细丝检验法等效的，可以证明沃尔特检验法是极其有效的。换而言之，可以把 $\lambda/2$ 相位刀口的边缘看作是不透明的刀口边缘，而且可以把 $\lambda/2$ 相位刀口的“暗”侧看作和“明”侧一样，其透过率等于 1。因此，根据几何光学的观点，可以把用 $\lambda/2$ 相位刀口得到的阴影图形看做完全等同于用细丝检验法得到的阴影图形。然后，经过分析得出，阴影图形的边界完全等同于 8.2.2

节中所提出的边界。注意图 8.9 中的傅科刀口检验法的图形和图 8.28 中一个有彗差的透镜的相位刀口照片（Landgrave，1974）之间的相似之处。

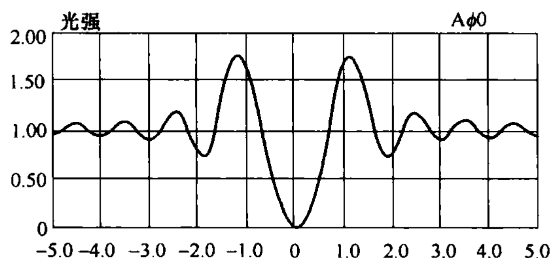


图 8.27 在被检光学面上观察到的 λ/2 相位刀口的菲涅耳衍射图

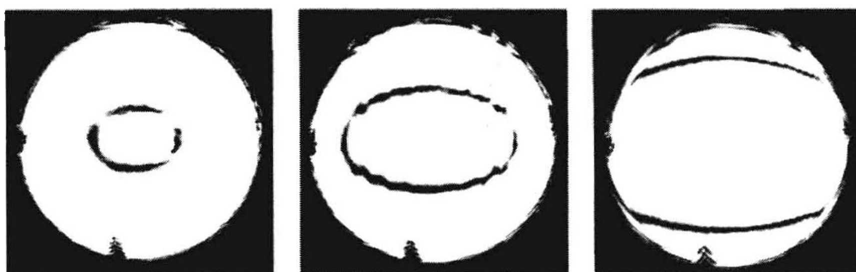


图 8.28 用 λ/2 相位刀口法检验一个有彗差的透镜时所得的阴影图

曾经有文章介绍过，用 λ/2 相位刀口得到的阴影图的暗线对背景光强的对比度，要比用刀口检验法和细丝检验法得到的暗线对背景光强的对比度好（Vasil'ev，1971；Landgrave，1974）。因此，λ/2 相位刀口检验法的灵敏度比使用不透明刀口法或细丝检验法所取得的灵敏度要高。图 8.29 中的四幅照片是用细丝检验法和相位刀口检验法检验同一个非球面镜所得的阴影图。请分别把图 8.29a 与 b 和图 8.29c 与 d 进行对照。

显然，对灵敏度的形式化分析实际上更加复杂，在此就不讨论了。但是，可以证明对于那些小于入射射线波长的像差，λ/2 相位刀口法产生的图像其对比度要比用不透明刀口法所产生的对比度高（Ojeda-Castaneda，1976、1979）。下面将重复研究这个问题。

相位刀口法的调制函数为

$$M(x_1,y_1)=\begin{cases}-1, & x_1<-r_1\\ 1, & x_1>-r_1\end{cases} \tag{8.81}$$

从调制平面向像平面传播的复振幅，在通过式（8.81）调制以后，又可由 $M(x_1, y_1)$ $a(x_1, y_1)$重新得出。分布在像平面上的复振幅可由傅里叶逆变换来计算，为

$$A'(x_2,y_2)=1+i\frac{2\pi}{\lambda}W'(x_2,y_2) \tag{8.82}$$

式中，$W'(x_2, y_2)$ 仍是 $M(x_1, y_1)$ $w_1(x_1, y_1)$ 的傅里叶逆变换。

在计算像的光强时，忽略不计 λ^{-1} 中的二次项，可以进行同样的近似运算。通过近似运算，正如有关刀口法和细丝法衍射理论的各节中所指出的一样，只有调制函数的实奇数分量才能在像光强变化中得出可见项。因为在此情况下，函数为

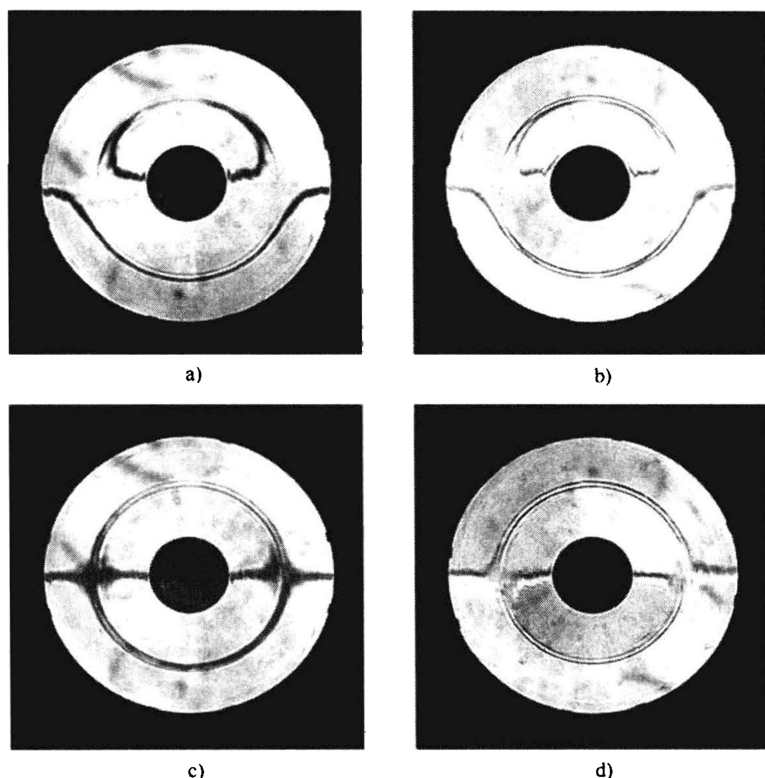


图8.29　双曲面镜的阴影图

a）离轴细丝法　b）离轴外相位刀口法　c）轴上细丝法　d）轴上相位刀口法

$$g(x_1,y_1)=\begin{cases}-1, & x_1<-r_1\\0, & |x_1|<r_1\\1, & x_1>r_1\end{cases} \tag{8.83}$$

不必计算图像光强，因为我们知道其结果会与使用刀口法计算图像光强时得出的结果一样。除此之外必须注意的是，式（8.83）有两个振幅透过率，如图8.17a、b所示。因此，在使用相位刀口法时，图像光强变化的对比度是使用刀口法时所得对比度的两倍，即

$$\gamma_{pe}=2\gamma_{ke}=\frac{8\pi}{\lambda}W_i(x_2,y_2) \tag{8.84}$$

沃尔特检验法的其他特性与本书中所列出的那些刀口法和细丝法的相同。

8.6　朗奇-康芒检验法

朗奇（Ritchey，1904）介绍，这种检验法是由康芒（Common）提出的一种检验大口径光学样板的方法。为此，要使用一块高质量球面镜，并把样板也作为反射镜，以便组装一台类似于刀口法使用的检验装置，朗奇-康芒检验法的光路结构图如图8.30所示。

在照明点光源图像中，被检表面的任何微小球形凹陷或凸起都会呈现出像散像差。据此可以准确地找到与弧矢焦点和子午焦点有关的两个焦平面（如8.1节中指出的使用刀口检验法），且运用这一数据可以计算出被检表面的曲率半径。当然，也可以观察到所有局部变

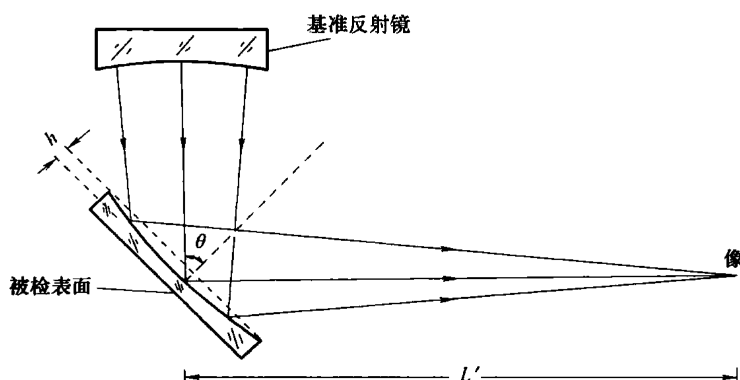


图 8.30 朗奇 - 康芒检验法的光路结构图

形或平整度偏差。

朗奇-康芒检验法与其他方法相比的优越之处在于，它不需要像牛顿或菲佐干涉检验那样使用基准样板。自动准直法要求有一个与被检平面最大尺寸一样大小的抛物面。相反，朗奇-康芒法使用的辅助镜是一个球面镜，这是最易制作和检验的。另一个优点是，如果被检反射镜像望远镜或其他仪器上使用的许多直角反射镜那样呈椭圆形状，那么只需要使球面镜和小直径（短轴）一样大。

如果测量像散，便可得到"样板"镜的凹陷或凸起的量，但前提是假定该反射镜的形状是球面的，而不是环形的。如果反射镜不是圆形而是椭圆形，它在抛光时变成环形的可能性是很大的。这种环形会产生额外的像散，使分析复杂化。有兴趣的读者可参考泰蒂安（Tatian，1967），斯凡纳尔（Silvernail，1973）和舒（Shu，1983）的著作。

这里所作的数学描述是假设被检镜面不是环形的并且遵循柯德（Conuder，1932）和斯特朗（Strong，1938）所采用的方法，即用求像散的考丁登（Coddington）方程求出曲率。在以下的步骤中，假设针孔光源与细线在同一平面中同时移动。因此，在计算横向像差值时，必须将在此法中所得值乘以 0.5，以得到横向像差的实际值。然而，由于在朗奇-康芒检验中，被检光学样板上的双反射会使波面像差重复，所以在计算横向光线像差值时，可以省略掉双重反射系数 2 和 0.5。

用著名的考丁登像散方程来求一个反射面的像散时，可以用下面的公式表示入射到光学反射面上的会聚光束的弧矢焦线，一个像散波面及其有关的焦线像如图 8.31 所示。

$$\frac{1}{s'}=\frac{1}{s}+\frac{2\cos\theta}{r} \tag{8.85}$$

子午焦线由式（8.86）表示

$$\frac{\cos^2\theta}{t'}=\frac{\cos^2\theta}{t}+\frac{2\cos\theta}{r} \tag{8.86}$$

式中，θ 为光射向被检表面的入射角；r 为被检光学表面的曲率半径。

如果我们假定入射光束没有像散，即 $s=t$，则可用式（8.85）及式（8.86）得出

$$\frac{s'-t'}{s't'}=\frac{2\sin^2\theta}{r\cos\theta} \tag{8.87}$$

然后，设 $s'=L'+\delta L'$和 $t'=L'$，并将其代入式（8.87），可得

$$r=2L'\left(1+\frac{L'}{\delta L'}\right)\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \tag{8.88}$$

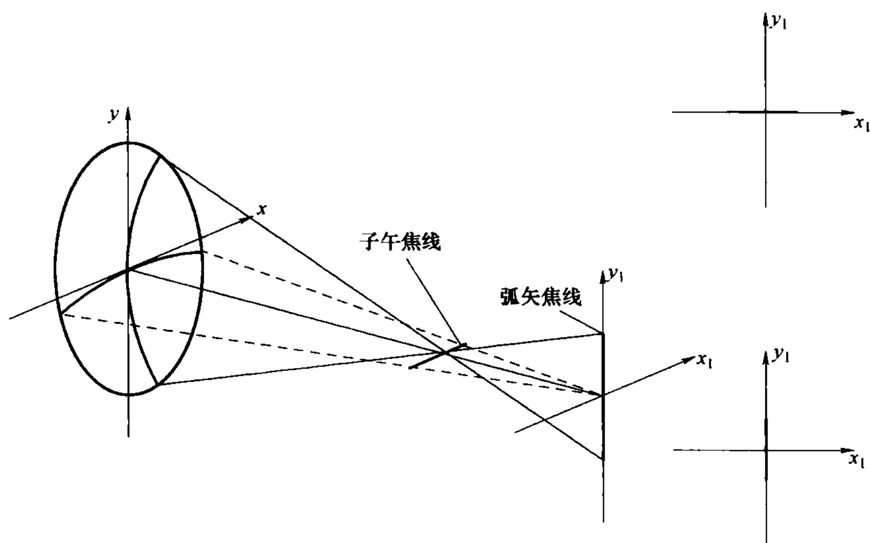


图 8.31 一个像散波面及其有关的焦线像（应注意在使用图 8.30 的装置时，图像的方向就会改变，即弧矢像为水平线，子午像为垂直线）

由于 $|L'/\delta L'|>1$，当弧矢焦线大于子午焦线时（$\delta L'>0$），从式（8.88）可得被检表面有一正曲率半径，即表面是凸面。否则，当弧矢焦线小于一子午焦线时（$\delta L'<0$），表面则有一负曲率半径，因此是凹面。直径为 D，曲率半径为 r 的表面矢高 h 的近似值，可由式（8.89）求出

$$h=\frac{D^2}{8r} \tag{8.89}$$

将式（8.88）代入式（8.89）可得

$$h=\frac{D^2\cos\theta}{16L'(1+L'/\delta L')\sin^2\theta} \tag{8.90}$$

因为 $L'\gg\delta L'$（$|L'/\delta L'|\gg 1$），将式（8.90）简化为

$$h=\frac{D^2\delta L'\cos\theta}{16L'^2\sin^2\theta} \tag{8.91}$$

上式可得出被检光学面任一入射角 θ 的矢高。对于 $\theta=45°$ 的特殊情况，矢高由式（8.92）给出

$$h=\frac{D^2\delta L'}{11.3L'^2} \tag{8.92}$$

柯德（Counder, 1932; Texereau, 1957）曾经指出检验光学样板的最佳角为 $\theta=54°45'$。当然，实际上设 $\theta=60°$ 更为方便。实践中还普遍使用一目镜来代替刀口，通过确定图 8.31 中右边表示的图形的位置来直观地确定弧矢焦线和子午焦线的位置。

8.7 结束语

正如在本章引言中所提到的，上述例子说明了阴影技术及有关的调相检验法的灵活性和实用性。当然，应根据具体情况需要选用合适的检验方法。

参考文献

Belvaux Y. and J. C. Vareille, "Controle de L'etat de Surface ou d'Homogeneite de Materiaux Optiques par Contrast de Phase a Dephasage Quelconque," *Optics Comm.*, **2**, 101 (1970).

Belvaux Y. and J. C. Vareille, "Visualisation d'Objects de Phase par Transformation de Hilbert," *Nouv. Rev. Opt.*, **2**, 149 (1971).

Banerji S., "On Some Phenomena Observed in the Foucault Test," *Astrophys. J.*, **48**, 50 (1918).

Barakat R., "General Diffraction Theory of Optical Aberration Tests, from the Point of View of Spatial Filtering," *J. Opt. Soc. Am.*, **59**, 1432 (1969).

Bescós J. and L. R. Berriel-Valdos, "Foucault Test in White Light Imagery," *Opt. Commun.*, **57**, 10 (1986).

Buchroader R. A., L. H. Elmore, R. V. Shack, and P. N. Slater, "The Design Construction and Testing of the Optics for a 147 cm Aperture Telescope," Technical Report No. 79, University of Arizona, Tucson, AZ, 1972a.

Buchroader R. A., L. H. Elmore, R. V. Shack, and P. N. Slater, Optical Sciences Center Technical Report No. 79, 1972b.

Burch C. R., "On the Phase-Contrast Test of F. Zernike," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **94**, 384 (1934).

Conrady H. G., "Study of the Significance of the Foucault Knife-edge Test When Applied to Refracting Systems," *Trans. Opt. Soc.*, **25**, 219 (1924).

Cornejo-Rodriguez A. and D. Malacara, "Caustic Coordinates in Platzeck-Gaviola Test of Conic Mirrors," *Appl. Opt.*, **17**, 18 (1978).

Couder A., *Recherches sur les Deformations des Grands Miroirs Employes aux Observations Astronomiques*, Thesis Faculte des Sciences Paris, *Bull. Astron.*, 7 (1932).

Dakin R. K., "An Improved Focault Testing Device," *Sky Telesc.*, **33**, 45 (1967).

Fell B., "Optical Surfaces: Computer Program Facilitates Work in Optical Shop," *Opt. Sci. Newslett.*, **2**, 5 (1968).

Foucault L. M., "Description des Procedees Employes pour Reconnaitre la Configuration des Surfaces Optiques," *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, **47**, 958 (1858).

Foucault L. M. "Memoire sur la Construction des Telescopes en Verre Argente," *Ann. Obs. Imp. Paris.*, **5**, 197 (1859).

Françon M., Modern Applications of Physical Optics, Interscience, New York, 1963.

Françon M. Ed., *Etude Theorique Comparative du Contraste de Phase et de Methods Interferentielles, Contraste de Phazse et Contraste par Interferometrie*, Edition de la Revue d'Optique Théorique et Instrumentale, Paris, 1952, p. 48.

Françon M. and G. Nomarski, Eds., *Les l'Ames de Phase par Reflexion Contraste de Phase et Contraste par Interferometrie*, Edition de la Revue d'Optique Theorique et Instrumentale, Paris, 1952, p. 136.

Gascoine S. C. B., "The Theory of the Foucault," *Test. Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **104**, 326 (1944).

Gaviola E., "On the Quantitative Use of the Foucault Knife-Edge Test," *J. Opt. Soc. Am.*, **26**, 163 (1936).

Golden L. J., "Zernike Test. 1: Analytical Aspects," *Appl. Opt.*, **16**, 205 (1977a).

Golden L. J., "Zernike Test. 2: Experimental Aspects," *Appl. Opt.*, **16**, 214 (1977b).

Hartmann J., "An Improvement of the Foucault Knife-Edge Test in the Investigation of Telescope Objectives," *Astrophys. J.*, **27**, 254 (1908).

Hopkins H. H., "Phase Structures Seen in the Ordinary Microscope," in *Contraste de Phase et Contraste par Interferometrie*, M. Françon, Ed., Rev. d'Opti. Theor. et Inst, Paris, 1952, p. 142.

Kastler A. "Un Systeme de Franges de Diffraction a Grand Contraste," *Rev. Opt.*, **29**, 307 (1950).

Kastler A. and R. Momtarnal, "Phase Contrast in Polarized Light," *Nature*, **161**, 357 (1948).

Kingslake R., "The Knife-Edge Test for Spherical Aberration," *Proc. Phys. Soc.*, **49**, 376 (1937).

Landgrave J. E. A., *Phase Knife Edge Testing*, M.Sc. Report Imp. Coll. Sc. and Tech., London, 1974.

Linfoot E. H., "Astigmatism Under the Foucault Test," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **105**, 193 (1945a).

Linfoot E. H., "A Contribution to the Theory of the Foucault Test," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **105**, 193 (1945b).

Linfoot E. H., "A Contribution to the Theory of the Foucault Test," *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, **186**, 72 (1946a).

Linfoot E. H., "On the Zernike Phase-Contrast Test," *R. Astron. Soc.*, **58**, 759 (1946b).

Linfoot E. H., "On the Interpretation of the Foucault Test," *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, **193**, 248 (1946c).

Linfoot E. H., "The Foucault Test," in *Recent Advances in Optics*, Oxford University Press, Dover, 1955, Chap. II.

Loomis D. A., "Testing Techniques Arouse Interest," *Opt. Sci. Newslett.*, **2**(3), 73 (1968).

Lowenthal S. and Y. Belvaux, "Observation of Phase Objects by Optically Processed Hilbert Transform," *Appl. Phys. Lett.*, **2**, 49 (1967).

Lyot B., "Procedes Perme Hand d'Etudier les Irregularities d'une Surface Optique Bien Polie," *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, **222**, 765 (1946).

Meinel A. B., "Quantitative Reduction of a Wire Test (Azimuthal is Explained)," *Opt. Sci. Newlett.*, **2**(5), 134 (1968).

North R. J., "A Colour Schlieren System Using Multicolor Filters of Simple Construction," National Physics Laboratory, England, Aero, 1954, p. 26.

O'Hare J. E. and J. D. Trolinger, "Holographic Colour Schlieren," *Appl. Opt.*, **8**, 2047 (1969).

Ojeda-Castañeda J., *Images of Certain Type of Phase Objects*, Ph.D. Thesis, University of Reading, England, 1976.

Ojeda-Castañeda J., "Nota Sobre el Microscopio de Contraste de Modulación," *Bol. Inst. Tonantzintla*, **2**, 293 (1978).

Ojeda-Castañeda J., "Necessary and Sufficient Conditions for Thin Phase Imagery," *Opt. Acta*, **27**, 905 (1980a).

Ojeda-Castañeda J., "A Proposal to Classify Methods Employed to Detect Thin Phase Structures under Coherent Illumination," *Opt. Acta*, **27**, 917 (1980b).

Ojeda-Castañeda J. and L. R. Barriel-Valdos, "Classification Scheme and Properties of Schlieren Techniques," *Appl. Opt.*, **18**, 3338 (1979).

Platzeck R. P. and E. Gaviola, "On the Errors of Testing a New Method for Surveying Optical Surfaces and Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, **29**, 484 (1939).

Platzeck R. P. and J. M. Simon, "The Method of the Caustic for Measuring Optical Surfaces," *Opt. Acta*, **21**, 267 (1974).

Porter R. W., "Mirror Making for Reflecting Telescopes," in: *Amateur Telescope Making, vol. I*, A. G. Ingalls, Ed., Scientific American, New York, 1953, p. 1.

Rayces J. L., "Exact Relation Between Wave Aberration and Ray Aberration," *Opt. Acta*, **11**, 85 (1964).

Rayleigh Lord, "On Methods for Detecting Small Optical Retardations, and on the Theory of Foucault's Test," *Philos. Mag.*, **33**, 161 (1917).

Ritchey G. W., "On the Modern Reflecting Telescope and the Making and Testing of Optical Mirrors," *Smithson. Contrib. Knowl.*, **34**, 3 (1904).

Schardin H., "Die Schlierenverfahren und ihre Anwendungen," *Ergebn Exakt Naturw.*, **20**, 303 (1942a).

Schardin H. and G. Stamm, "Prüfung von Flachglass mit Hilfe Eines Farbigen Schlierenverfahrens," *Glastechn. Ber.*, **20**, 249 (1942b).

Schroader I. H., "The Caustic Test," in: *Amateur Telescope Making*, vol. 3, A. G. Ingalls, Ed., Scientific American, New York, 1953, p. 429.

Shu K. L., "Ray-Trace Analysis and Data Reduction Methods for the Ritchey-Common Test," *Appl. Opt.*, **22**, 1879 (1983).

Silvernail C. J., "Extension of the Ritchey Test," *Appl. Opt.*, **12**, 445 (1973).

Simon J. M., "Diffraction Theory of the Method of the Caustic for Measurement of Optical Surfaces," *Opt. Acta*, **18**, 369 (1971).

Simon J. M., "Difracción en el Método de Foucault por Zonas," Physics 01/76, University of Buenos Aires, Argentina, 1976.

Simon M. C. and J. M. Simon, "Testing of Flat Optical Surfaces by the Quantitative Foucault Method," *Appl. Opt.*, **17**, 132 (1978).

Simon M. C., J. M. Simon, and E. L. Zenobi, "Testing Optical Surfaces by the Method of the Caustic Using a Phase-Stripe as Spatial Filter," *Appl. Opt.*, **18**, 1463 (1979).

Smartt R. N. and W. H. Steel, "Theory and Application of Point Diffraction Interferometers," Proceedings of the ICO Conference on Optical Methods in Scientific and Industrial Measurements, Tokyo, 1974; *Jap. J. Appl. Phys.*, **14**, Suppl. I, 351 (1975).

Smith W. J., *Modern Optical Engineering*, Mc-Graw Hill, New York, 1966, p. 439.

Stolzenburg W. A., "The Double Knife Edge Technique for Improved Schlieren Sensitivity in Low Density Hypersonic Aerodynamic Testing," *J. SMPTE*, **74**, 654 (1965).

Strong J., *Procedures in Experimental Physics*, Prentice-Hall, New York, 1938.

Tatian B., An Analysis of the Ritchey–Common Test for Large Plane Mirrors, Internal Report, ITEK Corporation, Massachusetts, 1967.

Texereau J., *How to Make a Telescope* (Translation and Adaptation from *La Construction du Telescope d'Amateur*), American Museum of Natural History, Anchor Books Doubleday, New York, 1957.

Teocaris P. S. and E. E. Gdoutos, "Surface Topography by Caustics," *Appl. Opt.*, **15**, 1629 (1976).

Töpler A., *Beobachtungen Nach Einer Neuen Optischen Methode*, Max. Cohen. und Sohn, Bonn, 1864.

Töpler A., "Beobachtungen Nach Einer Neuen Optischen Methode," *Pogg. Ann.*, **127**, 556 (1866).

Töpler A., "Beobachtungen Singender Flammenmit clem Schlierenapparat," *Pogg. Ann.*, **128**, 126 (1866); also in 131, 33 and 180 (1867) and 134, 194 (1868).

Vasil'ev L. A., *Schlieren Methods*, Israel Prog. for Scient. Transl., New York, 1971.

Wadsworth F. L. O., "Some Notes on the Correction and Testing of Parabolic Mirrors," *Pop. Astron.*, **10**, 337 (1902).

Weinberg F. J., *Optics of Flames*, Butterworth, London, 1961.

Welford W. T., "A Note on the Theory of the Foucault Knife-Edge Test," *Opt. Commun.*, **1**, 443 (1970).

Wolter H., Minimum Strahl Kenn Zeichnung, German Patent No. 819925, assigned to E. Leitz, Wetzlar, 1949.

Wolter H., "Schlieren-Phase Kontrast und Lichtschnittverfahren," in: *Handbuch der Physik*, vol. 24, Springer-Verlag, Berlin, 1956, p. 582.

Zernike F., "Diffraction Theory of Knife-Edge Test and Its Improved Form, the Phase Contrast," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **94**, 371 (1934a).

Zernike F., "Begungstheorie des Schneidenver-Fahrans und Seiner Verbesserten Form, der Phasenkontrastmethode," *Physica*, **1**, 44 (1934b).

Zernike F., "Phase Contrast, a New Method for the Microscopic Observation of Transparent Objects," *Physica*, **9**, 686 (1942).

第9章　朗奇（Ronchi）检验法

A. 科尼约-罗杰格兹（A. Cornejo-Rodriguez）

9.1　引言

自从发明了朗奇检验法以来，人们一直广泛地应用这种方法定性或者定量地检验光学表面。由于朗奇检验法比较简单，并且检验结果也比较容易识别，人们常常从几何光学的角度概念性地解释这种检验方法。本章的9.2节和9.5节详细地介绍了这种概念。然而，作者相信，通过以下两方面对朗奇检验法比较全面地介绍，我们能更深入地了解这种检验法。这两方面是：①定量分析数据的需要；②从物理光学的角度来研究朗奇检验法，并与几何光学的方法相比较（Toraldo di Francia，1941a）。本章的9.3节和9.4节分别介绍了这两个研究内容，当然，在这两节中不可避免地需要用到数学运算。可能有些读者对这两节不感兴趣（这样做并不会影响阅读的连贯性），而另外一些需要更全面了解朗奇检验法的读者会发现这两节的内容是很有价值的。本章的9.6节简单讲述了一些与经典的朗奇检验法相关的检验方法。

针对本书的以前几个版本，在这个版本中，作者对原来的一些公式、图表做了修正，并增加了一些新的应用和参考文献。

朗奇检验法是评价和测量一个光学系统像差的最简单、最有效的方法之一。意大利物理学家朗奇（Ronchi，1923a）发现当把一个刻线光栅放置在接近反射镜的曲率中心时，光栅的图像又回落在光栅上，产生一种莫尔条纹，朗奇就称其为组合条纹。由于这些组合条纹的形状取决于被检反射镜的像差，所以朗奇联想到利用这种现象检验反射镜的质量。然而，如何解释这些组合条纹现象是极为困难的。我们现在所知道的朗奇检验法是他在意大利比萨高等师范学校（Scuola Normale Superiore di Pisa）求学时发表的毕业论文（Ronchi，1923b）。

朗奇检验法的最初应用之一是测量伽利略望远镜（Ronehi，1923c）和托里赛利（Torrieelli）制作的透镜（Ronchi，1923d）的像差。最早利用朗奇检验法检验天文望远镜的是安德森和波特（Anderson and Porter，1929），从此以后专业天文学家和业余天文爱好者开始广泛应用朗奇检验法检验天文望远镜（King，1934；Strong，1938；Kirk-ham，1953；Porter，1953；Phillips，1963）。

在朗奇发明了这种检验方法之后的几个月，莱努维尔（Lenouvel，1924a、1924b、1925a、1925b）在法国发表了这种检验方法的扩展性研究成果，与朗奇所遵循的路线基本相同。

在许多评论文章里都能看到论述朗奇检验法的内容（Ronchi，1925；Morais，1958；Adachi，1962a；Wehn，1962；Murty，1967；Briers，1972；Briers，1979；Briers and Cochrane，1979；Cornejo-Rodriguez，1983；Rosenbruch，1985）。朗奇本人也曾经精辟地论述了这种检验法的发展史（1962a，1962b，1964）。

舒尔茨（Schulz，1948）把用朗奇光栅得到的图样命名为“朗奇图”。值得注意的是曾

经有人试图用朗奇检验法测定透镜的光学传递函数（Adachi，1962b），甚至测量透镜的色差（Malacara and Coruejo，1971；Toraldo di Francla，1942b）。萨尔兹曼（Salzmann，1970）用朗奇检验法评价了棒状激光晶体材料的质量。斯道兹曼（Stoltsman，1978）曾利用这种检验方法评价了一个大口径平面镜的质量，阿萨陶等人（Assa et al.，1977）测量出了弯曲平板的倾斜和曲率等高线，布鲁克曼（Brookman，1983）等人测量了高斯光束的，卡萨那（Kasana，1984）等人曾测量了玻璃的常数。在评价光学性能方面，朗奇光栅检验法已经突破了传统的结构模式。例如，帕套斯卡（Patorski，1979）利用傅里叶成像现象测量了小口径激光光束的波前曲率，凯瑟拉和夏克（Kessler and Shack，1981）完成了对高速多边形的动态光学测试。最近，何格曼等人（Hegeman et al.，2001）利用这种方式对极紫外光刻元件进行测量，徐等人（Xu et al.，2004）实现了对柱面镜的测量而艾古锐夫（Agureev，1995）则对表面的梯度指数做了研究。

为了提高朗奇检验法的灵敏度并拓展其使用范围，近期，一些工作人员在进行研究后得出了新的发现和结论。例如：帕托斯基描述了一种倒置光路的朗奇检验法（Patorski，1984），两年后他又提出了一种基于光谱滤波的测试技术（Patorski，1986），林等人（Lin et al.，1990）也提出了一种三光束的定量朗奇检验法。

9.2 几何原理

朗奇检验法可以用两个等同的原理解释：几何原理和物理原理。几何原理把条纹看做是光栅带的阴影；物理原理把条纹看做是由衍射和干涉作用而形成的阴影。正如本章论述的一样，在光栅刻线密度不是很高的时候，两种模型所得到的结果相同。朗奇在他早期发表的文章中对几何和物理两种模型都做了叙述。延奇（Jentzsch，1928）进一步对几何原理做了很好的论述，马丁（Martin，1960）也扼要地解释了朗奇检验法的几何原理。

正如马拉卡拉（Malacara，1965c）所解释的，朗奇检验法实际上是直接测量横向像差 TA 的方法，如图 9.1 所示。图 9.1 中物体和像都位于光轴上，所以从光轴上能够测定并观察到横向像差，其中包括离焦和其他几种像差。

利用雷瑟斯（Rayces，1964）给出的以下公式，确定在被检光学系统出射光瞳上的波像差

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{TA_x}{r - W} \quad \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{TA_y}{r - W} \tag{9.1}$$

如果把式（9.1）改写成下列形式，就能够在任何实际应用得到非常精确的结果

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{TA_x}{r} \quad \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{TA_y}{r} \tag{9.2}$$

式中，r 为出射光瞳或者被测试的表面到朗奇光栅的距离。

如果光栅的离焦量比较小，则该距离可以近似地表示为波前的曲率半径。因此，假定一个朗奇光栅的刻线间距为 d，则通常可以用式（9.3）表示第 m 个条纹上的点（x，y）

$$\frac{\partial W}{\partial x}\cos\varphi - \frac{\partial W}{\partial y}\sin\varphi = -\frac{md}{r} \tag{9.3}$$

其中，假定朗奇光栅刻线与 y 轴之间的夹角为 φ，如图 9.2 所示。这个表达式是朗奇检验法几何原理的基本公式。

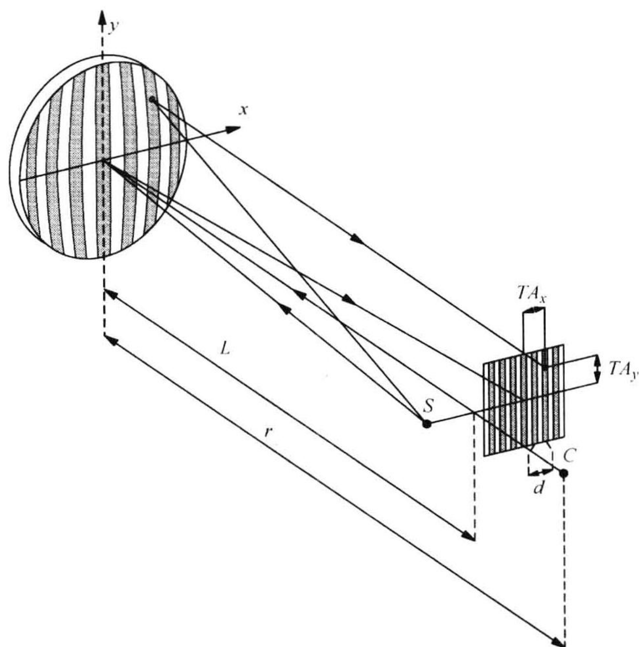


图9.1　朗奇检验法的示意图

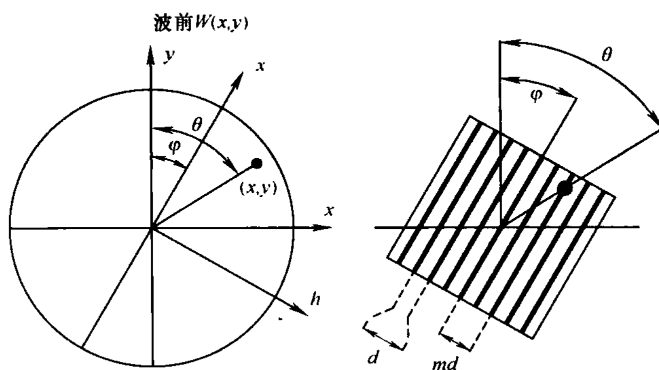


图9.2　波前和光栅刻线的方向关系

9.2.1　初级像差的朗奇图

有许多关于得到初级像差的朗奇图的研究性文章。埃德奇（Adachi，1960a、1960b）、克里诺（Criao，1933）、舒尔茨（Schul，1928）和特拉多·弗兰西萨（Toraldo di Francla，1947、1954）等人曾经发表了有关朗奇图的综述文章。

用式（9.4）能够表示带有初级像差的光学系统的波面

$$W=A(x^2+y^2)^2+By(x^2+y^2)+C(x^2+3y^2)+D(x^2+y^2) \tag{9.4}$$

式中，A、B 和 C 分别表示球差系数、彗差系数和像散系数；最后一项的系数 D 表示离焦系数，是用朗奇光栅到近轴焦点的距离 l'来表示

$$D=\frac{l'}{2r^2} \tag{9.5}$$

由于朗奇检验法对倾斜不灵敏，所以不包括倾斜项。如果把式（9.4）代入式（9.3）

中，则可得到

$$4A(x^2+y^2)(x\cos\varphi-y\sin\varphi)+B[2xy\cos\varphi-(3y^2+x^2)\sin\varphi]$$
$$+2C(x\cos\varphi-3y\sin\varphi)+2D(x\cos\varphi-y\sin\varphi)=-\frac{md}{r} \tag{9.6}$$

在研究各个像差时，借助于下列关系式将转角 ψ 带入上面的表达式中往往会更加方便

$$x=\eta\cos\psi+\xi\sin\psi$$
$$y=-\eta\sin\psi+\xi\cos\psi \tag{9.7}$$

式中，η 和 ξ 是两个新的坐标轴。

（1）离焦　将 $\psi=\varphi$ 代入离焦项，得出

$$2D\eta=-\frac{md}{r} \tag{9.8}$$

因此，得出等间距直带状条纹，这些带状条纹相互平行并平行于光栅刻线缝。这些条纹在被研究的波面上的间距 S 为

$$S=\frac{d}{2Dr} \tag{9.9}$$

图 9.3 所示为带离焦的朗奇图样。

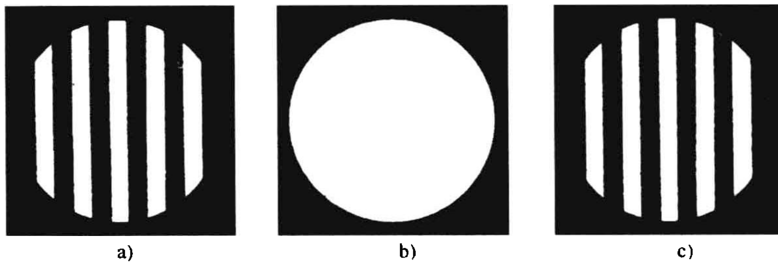


图 9.3　带离焦的朗奇图样

a）焦点外部　b）焦点上　c）焦点内部

（2）带有离焦的球差　博克奇诺（Bocehino，1943）和斯坎（Seandone，1933）最早研究了球差的朗奇图。代入 $\psi=\varphi$，得出球差项和离焦项

$$4A(\eta^2+\xi^2)\eta+2D\eta=-\frac{md}{r} \tag{9.10}$$

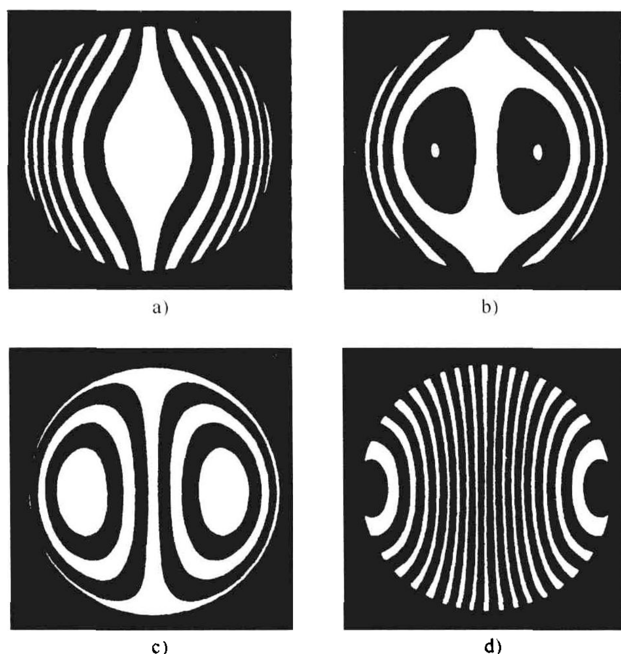
由此可以看出图 9.4 中的对称轴平行于光栅狭缝。这些条纹可以用 η 的三次曲线表示。这种没有离焦的朗奇图与用泰曼-格林干涉仪检验彗差时得到的干涉图完全相同。在这幅朗奇图中加上离焦就和在泰曼-格林干涉图中加上倾斜的效果是一样的。

在没有离焦时，中心条纹非常宽，因此，把这个近轴焦点称为纺锤形焦点或均匀焦（Crino，1999；DiJorio，1939a；Ricei，1939）。

博克奇诺（Bocehino，1940）、埃多斯（Erdas，1959）和斯坎多恩（Seandone，1930）研究了五级球差的朗奇图。

（3）彗差　布鲁斯卡格莱昂尼（Bruscaglioni，1932b）和维拉尼（Villani，1990、1932）研究了彗差的朗奇图。把转角 $\psi=\varphi/2+\pi/4$ 代入式（9.6）中的彗差项，得出

$$B[-\eta^2(1+2\sin\varphi)+\xi^2(1-2\sin\varphi)]=-\frac{md}{r} \tag{9.11}$$



a)　b)　c)　d)

图9.4　带球差的朗奇图（$A=-20$）

a）近轴焦点　b）近轴和边缘焦点之间　c）边缘焦点　d）焦点之外

根据 φ 的不同值（刻线倾斜于子午面），得到以下不同的图，如图9.5所示。

1）$\varphi=0°$，双曲线。

2）$\varphi=90°$，半轴线比为$\sqrt{3}$的椭圆线。

3）$0°<\varphi<30°$，倾斜 ψ 角的双曲线。

4）$\varphi=90°$，直带状条纹。

5）$30°<\varphi<90°$，倾斜 ψ 角的椭圆线。

如果把式（9.11）改写成

$$B[-2(1+\sin\varphi)(\eta^2+\xi^2)+(\eta^2+3\xi^2)]=-\frac{md}{r} \tag{9.12}$$

可以看出这个图全同于检验带有离焦像散的泰曼-格林干涉图，其中表观离焦的大小可以用角 φ 表示。

（4）带离焦的像散　布鲁斯卡格莱昂尼（Bruscaglioni，1932b）、克拉梅（Calamai，1938）、斯坎多恩（Seandone，1931a）和维拉尼（Villani，1930、1932）曾经广泛研究了像散朗奇图。把转角 $\psi=\varphi$ 代入式（9.6）中相应的项中，可得出

$$2C[\eta(2-2\cos2\varphi)-\xi\sin2\varphi]+2D\eta=-\frac{md}{r} \tag{9.13}$$

可以看出朗奇图是由等间距平行直条带组成的，这些直条带与光栅狭缝之间的倾角可用式（9.4）表示，如图9.6所示。

$$\tan\alpha=\frac{C\sin2\varphi}{D+C(2-2\cos2\varphi)} \tag{9.14}$$

直条带与 ξ 轴的交点是固定不变的，与离焦项 D 无关，在等间隔的点上其间隔 $\Delta\xi$ 是

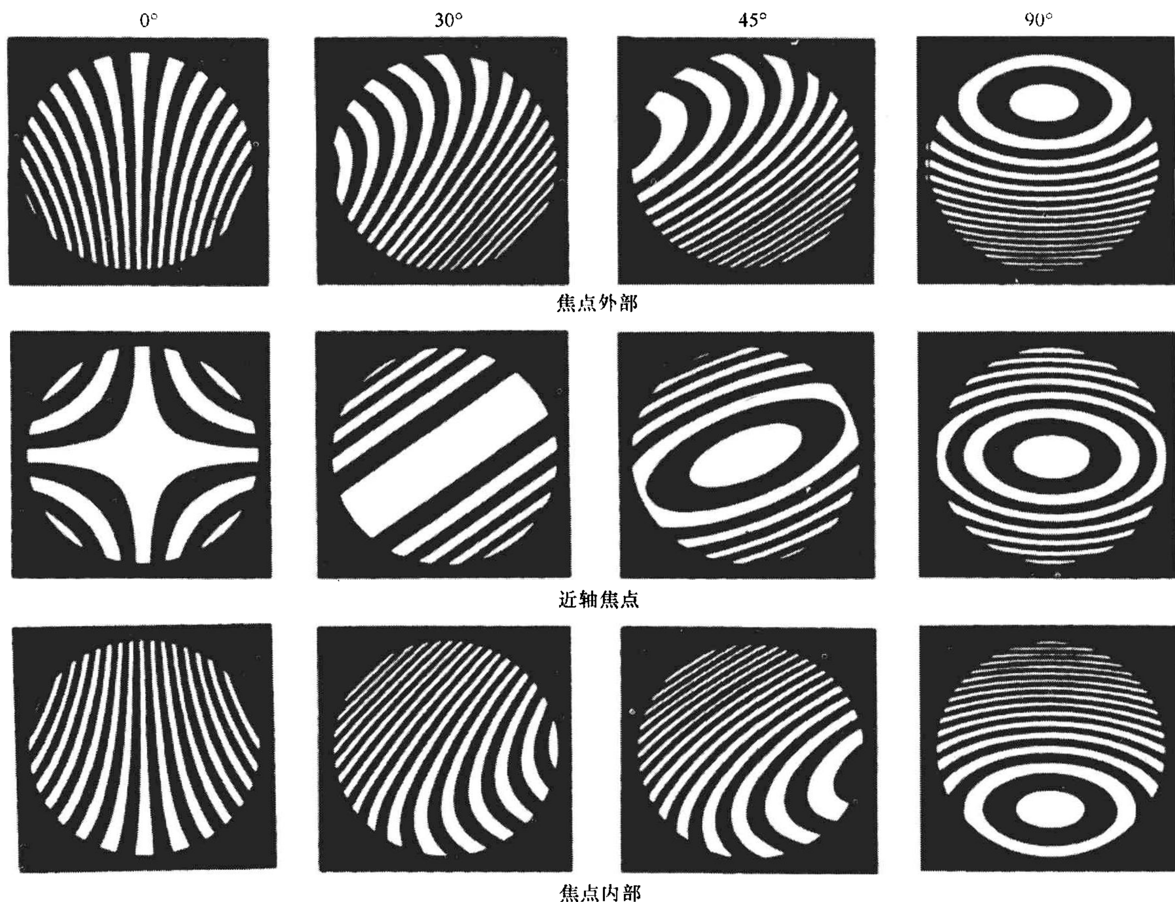


图 9.5 具有彗差的朗奇图（$B=-30$）

$$\Delta\xi=\frac{d}{2rC\sin2\varphi} \tag{9.15}$$

α 的值随离焦项 D 而变化（光栅沿光轴定位），使得直条带在光栅沿光轴移动时发生旋转。布鲁斯卡格莱昂尼（Bruscaglioni，1932a）和斯坎多恩（Scandone，1931b）详细地研究了这种所谓“原地跳跃”的效应。在

$$D+C(2-\cos2\varphi)=0 \tag{9.16}$$

即出现 D/C 值在 -1（当 $\varphi=0°$，在弧矢焦点上）$D/C=-3$（$\varphi=90°$，在子午焦点上）之间的情况下，干涉直条带变为垂直于光栅的狭缝。其中不包括等于 -1 和 -3 的 D/C 精密度，因为在这两个点上 $\sin2\varphi=0$，所以 $\Delta\xi\to\infty$，而使像散的检验变得不灵敏了。当 $\Delta\xi$ 与波面的直径相比尽可能小的时候，就能够达到最高灵敏度。因此，测量像散的最佳角度是 $\varphi=45°$，并且当 $D/C=-2$ 时，$\Delta\xi$ 直条带垂直于光栅狭缝（$\alpha=90°$）。

（5）带像散和离焦的球差　斯坎多恩（Scandone，1931a，1931b）研究了这种混合像差的干涉图。将转角 $\psi=\varphi$ 代入式（9.6）的相应项中，得到

$$4A\eta(\eta^2+\xi^2)+2\eta[D+C(2-\cos2\varphi)]-2C\xi\sin2\varphi=-\frac{md}{r} \tag{9.17}$$

斯坎多恩描述了这种像差混合产生的“S”形条纹，如图 9.7 所示。式（9.17）中的第一项表示球差，该项与泰曼-格林干涉法中的彗差项完全相同。第二项表示离焦 D（光栅位

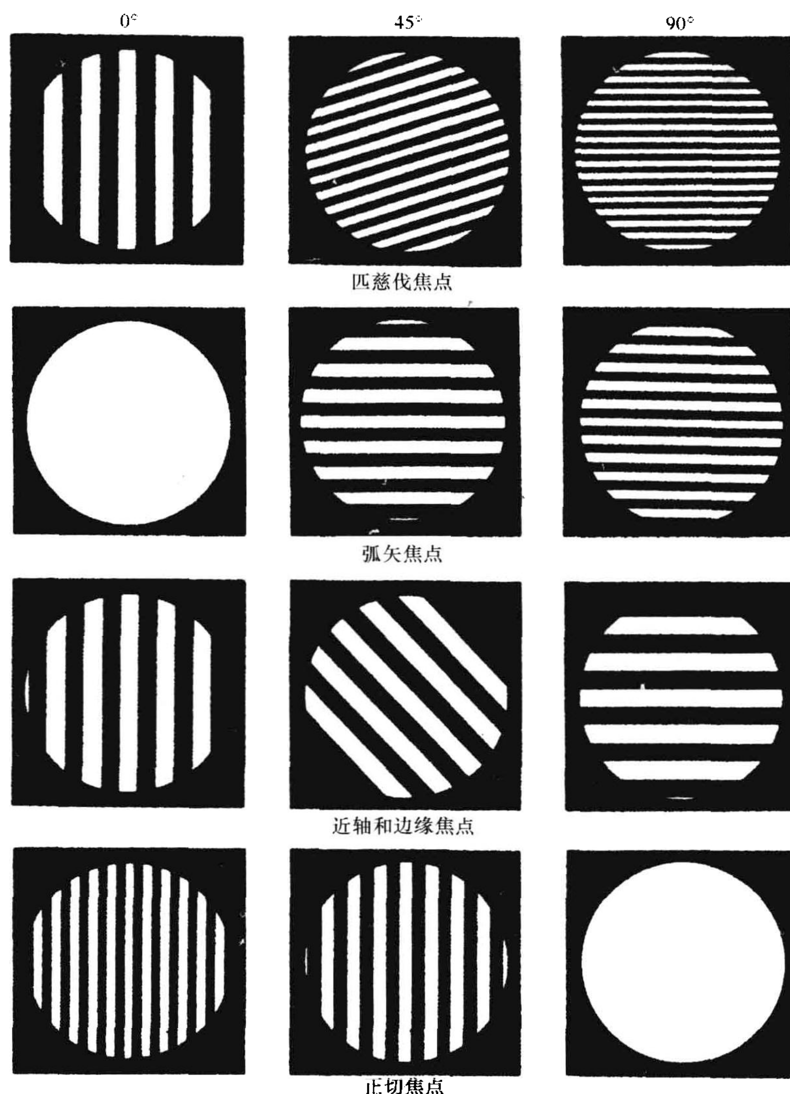


图 9.6 带像散的朗奇图（$C=-20$）

置）和像散 C，该项与泰曼-格林干涉法中绕 ξ 轴的倾斜项完全相同。第三项表示像散，该项与泰曼-格林干涉法中绕 η 轴的倾斜项完全相同。

默迪（Murty，1971）根据朗奇检验中的像散与泰曼-格林干涉中的倾斜的相似性，提出用引进像散的方式把绕 η 轴的假想倾斜加进朗奇检验中。他把一面柱透镜放在光束中使其轴线与光栅狭缝成45°角来产生像散。为了使得到的仅仅是绕 η 轴的假想倾斜，要求

$$D+C(2-\cos 2\varphi)=0$$

$$C\sin 2\varphi\neq 0 \tag{9.18}$$

对于 $\varphi=45°$的特殊情况

$$D=-2C \tag{9.19}$$

式（9.19）是在绕 ξ 轴产生零倾斜时，假定离焦项恰好足够抵消像散的影响。为了在边缘焦点上产生绕朗奇图的 η 轴的假想倾斜，必须引入一个等于 $-2A$ 的附加离焦，因此得出



图 9.7　只有球差（$A=-10$）的朗奇图和有球差和像散混合（$C=-10$）的朗奇图

$$D=-2(C+A) \tag{9.20}$$

9.2.2　非球面的朗奇图

朗奇检验法对于检验包括天文望远镜使用的大口径反射镜在内的非球面是非常有用（Popov，1972）。假定下列近似关系式能够成立，那么就能够在式（9.3）中 $\varphi=0°$时计算任何非球面的理想朗奇图

$$z(x,y)-z_0(x,y)=2W(x,y) \tag{9.21}$$

式中，z 为非球面的矢高；z_0为最接近球面的矢高。

但是这种计算方法只是近似求值法，并不精确。另外一种比较精确的方法是用反射定律追迹光线。值得指出的是，最早试图用朗奇检验法检验非球面的是沃兰德（Waland，1938）和舒尔茨（Schulz，1948）。

舍伍德（Sherwood，1958）和马拉卡拉（Malacara，1965a、1965b）各自用不同的方法证明，当使用图 9.1 的检验光路结构时，朗奇光栅平面的横向像差 TA 用下式表示

$$TA(S)=\frac{(l+L-2z)\left[1-\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}S}\right)^2\right]+2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}S}\left[S-\frac{(l-z)(L-z)}{S}\right]}{\frac{l-z}{S}\left[1-\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}S}\right)^2\right]+2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}S}} \tag{9.22}$$

式中，S 为从光轴到反射镜上一点的距离。

从图 9.1 中可以看出

$$TA = \frac{md}{\sin\theta} \tag{9.23}$$

先给定几个 S 值，然后计算不同 m 值时的 θ，就可以得到朗奇图。通常在拍摄照片时，总希望在平行并接近反射镜的平面上得到朗奇图。在大多数情况下，考虑到反射镜表面上的条纹引起的误差是非常小的，但是在反射镜的曲率半径比其直径小的情况下，误差分析就显得尤为重要。

在描绘朗奇图时，如果用 S_p 代替计算得到的 S，那么就能够补偿这个误差，条纹在平面上的投影如图 9.8 所示（Malacara，1985b），其中 S_p 用式（9.24）表示

$$S_p = S\left\{1 - \left[\frac{z(S_{\max}) - z(S)}{l - z(S)}\right]\left(1 - \frac{TA}{S}\right)\right\} \tag{9.24}$$

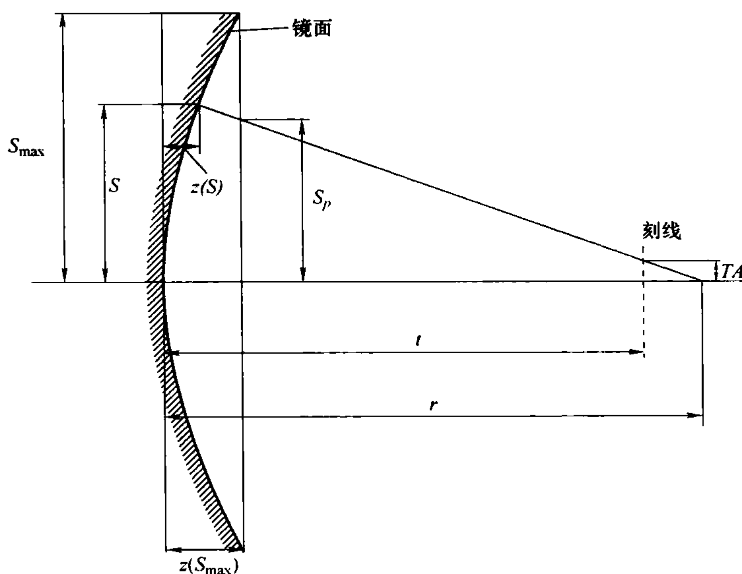


图 9.8　条纹在平面上的投影

拉姆利（Lumley，1960、1961）和舍伍德（Sherwood，1960）计算了供业余天文爱好者使用的抛物面镜的理想朗奇图。

为了便于识别朗奇图，避免产生任何闭合的环形条纹，只有焦散范围之外，才有可能避免出现这种闭合条纹，在不同的光栅位置上涉及离焦的一个非球面的朗奇图如图 9.9 所示。从图 9.9 中可以明显看出，当光栅位于边缘焦点上时，在反射镜里面只有闭合环状条纹，而外面的一个条纹靠近反射镜边缘。

还应当认识到，当出现弯曲条纹时，例如在近轴焦点上时，靠近反射镜中心的许多信息被丢失。因此，为了得到最多的信息，如果 $K>0$，就要在近轴焦点上获取朗奇图，如果 $K<0$，就要在焦散的末端获取朗奇图。

9.2.3　补偿朗奇光栅

已经证明，当被检表面是非球面时，朗奇条纹不是直条纹，而是弯曲的。根据条纹对理想形状的偏差能够计算出被检表面的误差。用计算机处理所得数据后，能够得到很好的结果，本章的 9.3 节将讲述这种方法。对于技术人员来说，如果不使用计算机，根据直线比根

据曲线更容易检验出形状偏差。另外，在条纹是弯曲的时候，衍射效应容易造成条纹的扩散，从而使测量更加困难。

使用一种具有弯曲刻线的特殊朗奇光栅，可以克服这些缺点。为了产生固定宽度的直条纹，用刻线曲率补偿表面的非球面性。这种概念是帕斯特（Pastor，1999）首先定性地提出来的，之后分别由波波夫（Popov，1972）、马拉卡拉和科尼约（Malacara and Cornejo，1974c）定量地发展了这种概念。他们采取的方法是先用光线追迹法，然后列出并解五个线性方程。莫斯贝（Mobsby，1973、1974）提出了一种设计这些用于抛物面补偿的朗奇光栅的近似计算方法。

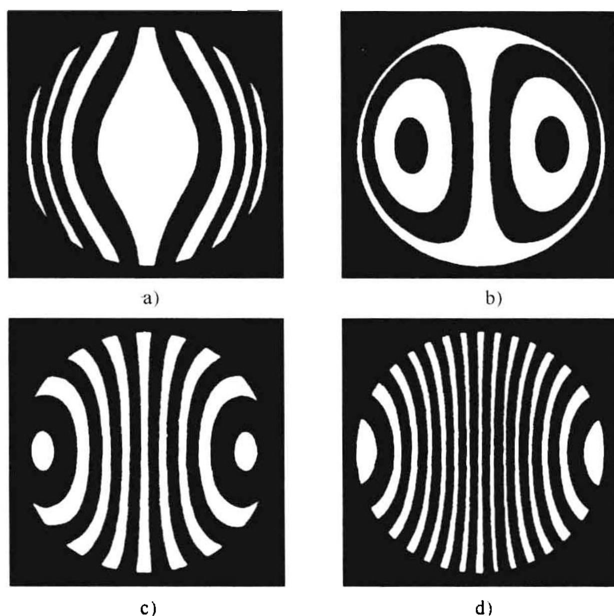


图 9.9 在不同的光栅位置上涉及离焦的一个非球面的朗奇图
a）近轴焦点 b）边缘焦点 c）在边缘焦点和焦散末端之间 d）焦散末端

另一个精确的方法是用式（9.22）计算从反射镜中心到边缘的各个不同 S 值的横向像差 $TA(S)$。然后取非球面上理想直条纹与计算出 $TA(S)$ 的圆的相交点。对于每个相交点都有一个角 θ，在将被计算的光栅刻线上角 θ 都相等。对于反射镜上半径为 S 的圆来说，光栅上的径向坐标即是计算得出的 $TA(S)$。

另外还有一种以计算三段横向球差为基础的近似方法（Malacala and Coraeno，1979b）。设 $\bar{x}$ 和 $\bar{\rho}$ 分别是补偿朗奇光栅中某一条纹上一个点的坐标和径向坐标，可用下式计算出光栅刻线

$$\bar{\rho}^2 = -\frac{r^2\bar{x}^3}{Km^3(\Delta x)^3} - \frac{r\Delta r\,\bar{x}^2}{Km^2(\Delta x)^2} \tag{9.25}$$

式中，r 为反射镜的曲率半径；K 为圆锥常数；m 为条纹级次；Δx 为反射镜上的条纹间距；Δr 为光栅对近轴焦点的位移量，如果位移是在焦点之外，则 Δr 是正的。

计算光栅的方法是先给定 $\bar{x}$ 一些值，然后计算 $\bar{\rho}$，从 $\bar{x}_{\min}$ 开始计算，$\bar{x}_{\min}$ 用式（9.26）表示

$$\bar{x}_{\min} = -\frac{Km^3(\Delta x)^3}{r^2} - \frac{m(\Delta x)(\Delta r)}{r} \tag{9.26}$$

这里假定光源位于曲面的曲率中心。现已证明这个近似方法在大多数实际应用中能够得到十分精确的结果。

图 9.10 所示为计算补偿朗奇光栅的两个实例。图 9.11 所示为一个非球面的正常朗奇图和补偿朗奇图。很明显，在补偿检验中条纹不仅是直的，而且也更容易识别，如图 9.11b 所示。

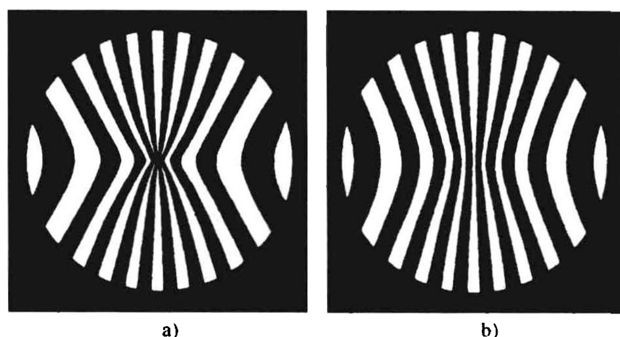


图9.10 计算补偿朗奇光栅的两个实例
a）在近轴焦点上 b）在近轴焦点内部

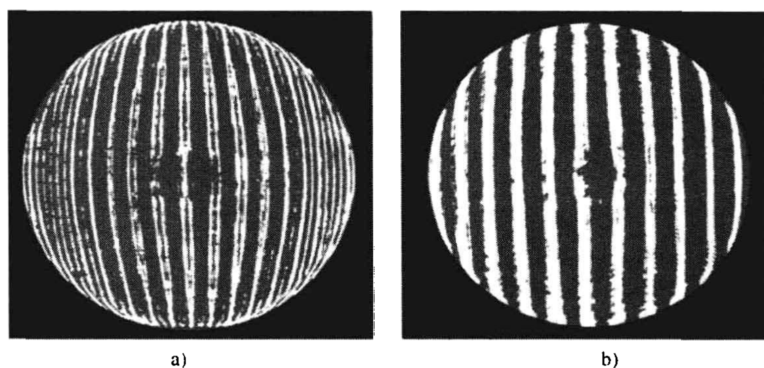


图9.11 一个非球面的正常朗奇图和补偿朗奇图
a）正常朗奇图 b）补偿朗奇图

与常规检验法相比，补偿检验法的缺点是在检验时，必须把光栅非常精确地放置在沿光轴的预先计算好的位置上。在光栅上面标记一个圆对非球面性的补偿有很大帮助，这是因为这个圆在反射镜上的投影与反射镜表面的外缘相重合。

另一个重要的限制是光源不能用光栅可遮挡的扩展光源，就像在通常的朗奇检验中一样，而是必须使用点光源。迪爱兹-尤日博和坎普斯在他们的论文里介绍了一些值得注意的应用，这些应用都是利用补偿光栅来实现对不同形状的凸面进行测量（Diaz-Uribe and Campos，2000），关于迪爱兹-尤日博测量离轴非球面的详细内容会在第10章中介绍（Diaz-Uribe，2000）。

9.3 波面形状的测定

根据朗奇图能够确定波面或反射镜变形。帕斯拉（Pacella，1927）是第一位进行此类尝试并辨别像差类型的科学家。仅仅通过朗奇图就能够非常容易地得到关于反射镜变形的定性的概念（De Vany，1965，1970）。图9.12所示为10个典型的表面变形的朗奇图，图9.13

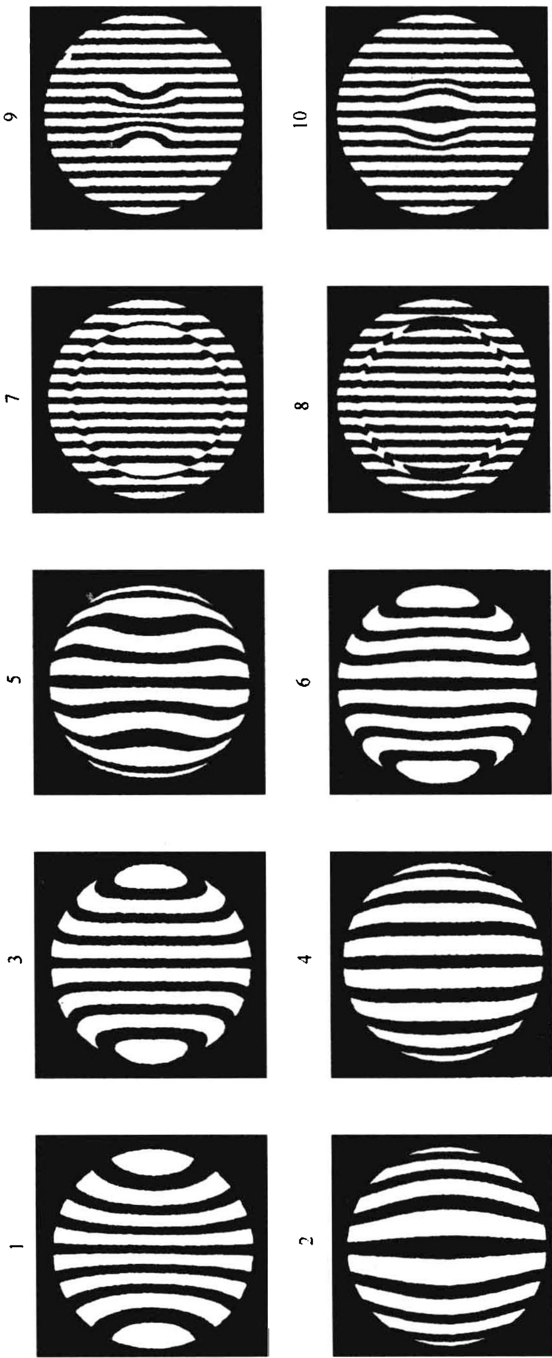


图9.12 10个典型的表面变形的朗奇图

所示为这10个所对应的表面偏差。表9.1所示为这些朗奇图与表面变形的关系。埃得奇（Adachi，1960a、1960b）曾经详细论述了初级像差的识别和测量。

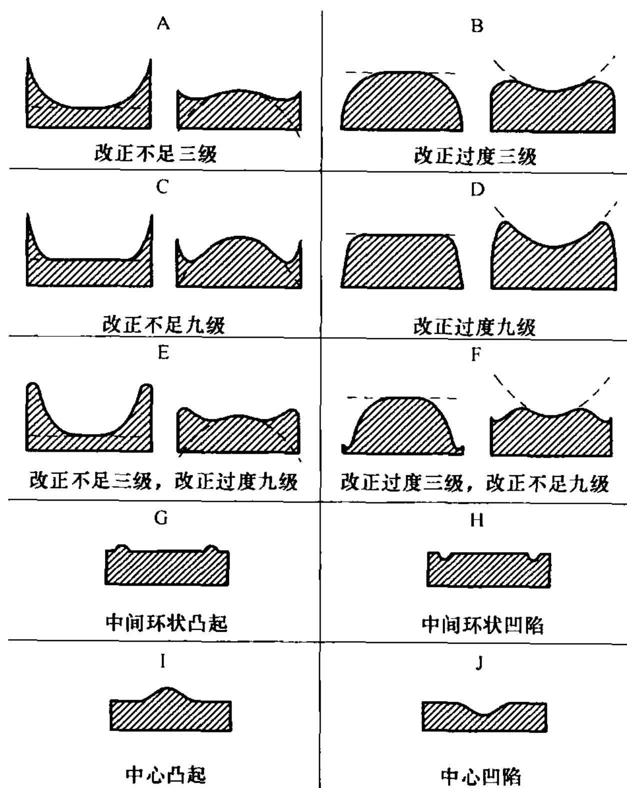


图9.13　与图9.12中各个朗奇图相对应的表面变形

下面将更为全面地介绍具有各种变形的表面。

9.3.1　普通情况

在考察完全不对称的表面时，所作的唯一假设是表面足够平滑，可以用下列第k级的二维多项式在示

$$W(x,y)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}B_{ij}x^{j}y^{i-j} \tag{9.27}$$

于是，$W(x,y)$对x和y的偏导数分别为：

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}(j+1)B_{i+1,j+1}x^{j}y^{i-j} \tag{9.28}$$

和

$$\frac{\partial W}{\partial y}=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}(i-j+1)B_{i+1}x^{j}y^{i-j} \tag{9.29}$$

但根据式（9.3）中朗奇检验法的基本关系，可以写为式（9.30）

$$\frac{\partial W}{\partial x}\cos\varphi-\frac{\partial W}{\partial y}\sin\varphi=-\frac{[m(x,y)-m_0(x,y)]}{r}d \tag{9.30}$$

式中，$m(x,y)$ 为实际朗奇图中某点（x,y）上m的测定值；$m_0(x,y)$ 为在完善的朗奇图中同一点（x,y）上利用式（9.22）和式（9.23）所计算出来的值。

现在分别用 $m_x(x,y)$ 和 $m_y(x,y)$ 来表示光栅刻线取向为 $\varphi=0°$和 $\varphi=90°$时两个 $m(x,y)$ 的值。以上结果是由两个相互垂直的光栅对应的两幅朗奇图而得到的。因此，可以写出这两幅图形的公式为

$$\frac{\partial W}{\partial x}=-\frac{[m_x(x,y)-m_0(x,y)]}{r}d \quad (\varphi=0°) \tag{9.31}$$

和

$$\frac{\partial W}{\partial y}=-\frac{[m_y(x,y)-m_0(x,y)]}{r}d \quad (\varphi=90°) \tag{9.32}$$

利用最小二乘方法能够使差分函数（m_y-m_0）拟合第（k-1）级次的二维多项式，得出

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}C_{ij}x^j y^{i-j} \tag{9.33}$$

以及

$$\frac{\partial W}{\partial y}=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}D_{ij}x^j y^{i-j} \tag{9.34}$$

将式（9.28）和式（9.29）同上面两个关系式进行比较，可以得出

$$B_{ij}=\frac{C_{i-1,j-1}}{j} \quad \begin{cases} i=1,2,3,\ldots,k \\ j=1,2,3,\ldots,i \end{cases} \tag{9.35}$$

和

$$B_{ij}=\frac{D_{i-1,j}}{i-j} \quad \begin{cases} i=1,2,3,\ldots,k \\ j=0,1,2,\ldots,(i-1) \end{cases} \tag{9.36}$$

表 9.1 图 9.12 中的朗奇图与图 9.13 中表面变形的关系

朗奇图	表面			
	反射		反射	
	光栅焦点外	光栅焦点内	光栅焦点外	光栅焦点内
1	B	A	A	B
2	A	B	B	A
3	D	C	C	D
4	C	D	D	C
5	F	E	E	F
6	E	F	F	E
7	H	G	G	H
8	G	H	H	G
9	J	I	I	J
10	I	J	J	I

对于 $j=0$ 的值，只能用式（9.36），于是有

$$B_{i0}=\frac{D_{i-1,0}}{i} \quad i=1,2,3,\ldots,k \tag{9.37}$$

对于 $j=i$ 的值，只能用式（9.35），于是有

$$B_{ii}=\frac{C_{i-1,i-1}}{i} \quad i=1,2,3,\ldots,k \tag{9.38}$$

对于 i 和 j 的其他组合，既可以用式（9.35），也可以用式（9.36）。为了提高准确度，可以取两个数值的平均值

$$B_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{C_{i-1,j-1}}{j}+\frac{D_{i-1,j-1}}{i-j}\right)\quad\begin{cases}i=2,3,\ldots,k\\j=1,2,3,\ldots,(i-1)\end{cases}\tag{9.39}$$

一旦确定系数 B_{ij} 后，就能够用式（9.27）计算出波面偏差 $W(x,y)$，然后利用式（9.21），求出所检验镜面表面的偏差。

随着计算机技术的发展及软件使用的普及，最近已经出现许多不同方式的朗奇检验法分析处理技术，这样就使得朗奇检验法如同横向剪切干涉仪一样。例如：王和林等（Wan and-Lin，1990），哈耳博尔斯等（Harbers et al.，1996），瑟伊奇和奴莫娃（Seiichi and Nomura，2000），伊尔斯特和威恩巴特勒（Elster and Weingartner，1999），伊尔斯特（Elster，2000），万·博格（Van Brug，1997），帕伊兹等（Paez et al.，2000），费斯査尔和斯塔赫尔（Fischer and Stahl，1994），塞而威恩等（Servin et al.，1994），雷等（Lei et al.，1993）。

9.3.2 旋转对称的表面

假设表面是旋转对称性的，那么用一个 $\varphi=0°$ 的朗奇图就可以完整地确定该表面的形状。一种途径是通过测量条纹与 x 轴的交点来确定这些点上的横向像差 $TA(S)$（Malacara，1965a、1965b），S 是从图的中心到条纹与 x 轴的交点之间的距离，TA 等于 md。然后使用最小二乘法，将这些测量值拟合一个只含有 S 的奇次幂的多项式，并且用一个 $TA(S)$ 的简单积分就能够计算出波面。

然而，这种方法不能提供充分的数据，因为得不到各条纹交点之间区域的信息。因此，要使用这种方法时，有时表面轮廓要比预想的平滑得多。

使用马拉卡拉和科尼约（Malacara and Corncjo，1975）提出的方法，就可以假定反射镜上的理想条纹并不一定是直的，而可以是弯曲的，在有旋转对称性的表面中朗奇图的构成如图9.14所示。图9.14中实线表示有缺陷反射镜上条纹的实际形状，虚线表示完好表面上条纹的理想形状。可用式（9.40）定义残留的横向像差 $TA(S)$

$$TA(S)=TA_{\Lambda}(S)-TA_0(S)\tag{9.40}$$

式中，$TA_{\Lambda}(S)$ 为有缺陷表面的实际总横向像差；$TA_0(S)$ 为计算的理想横向像差。从图9.14可以看出

$$\frac{S_0}{x_0}=\frac{S}{x}=\frac{TA_{\Lambda}(S)}{TA_x}\tag{9.41}$$

由于把实际条纹和理想条纹上的点看做是与表面的中心成一直线，所以这些点必须对应于光栅上的同一点，因此

$$TA_0(S_0)=TA(S)\tag{9.42}$$

同时，由于光栅上的线是直线，所以可以写成 $TA_x=md$，从式（9.41）得出

$$TA_{\Lambda}(S)=\frac{md}{x}S\tag{9.43}$$

将式（9.43）代入式（9.40）得出

$$TA(S)=\frac{md}{x}S-TA_0(S)\tag{9.44}$$

为了确定 $TA(S)$，需要测出对于每一个 S 值的一个 x 值。但是一个已知 S 值通常有几个

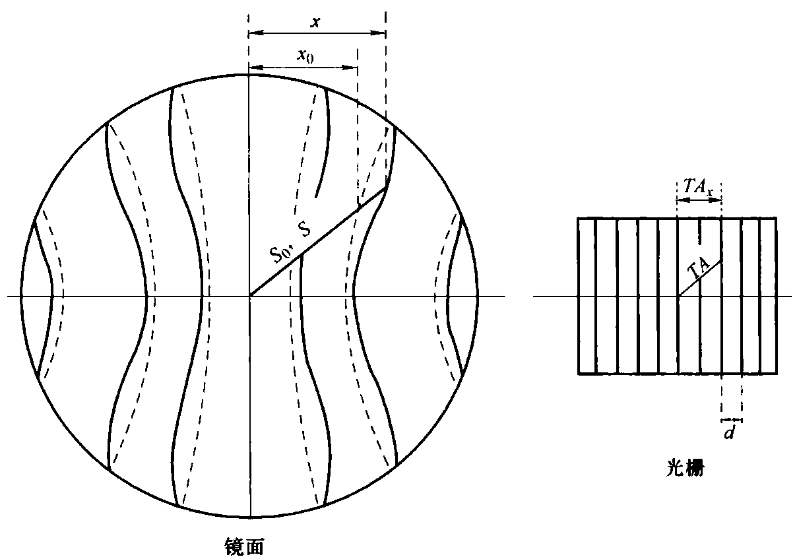


图 9.14 在有旋转对称性的表面中朗奇图的构成

x 值，一个值表示一个条纹。可以用式（9.45）表示 x/m 的平均值

$$\left(\frac{x}{m}\right)_{平均} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i^2} \tag{9.45}$$

式中，N 为半径为 S 的圆上有 x 数据的点的数目。

用数值积分就能求出被检反射镜的实际面形，而无需使用拟合这些数据的多项式。

9.4 物理原理

正如朗奇在他撰写的第一篇文章中指出的一样（Ronchi，1923b），可以根据物理学的观点把朗奇检验看做是一种干涉仪。最初朗奇作了许多努力，设法建立一个好的物理理论模型（Ronchi，1924a、1924b、1926a、1926b、1927、1928）最后得到了一个比较合理的解释，即假设朗奇光栅实际上是起一个衍射光栅的作用，产生许多衍射级次，每一个衍射级次产生一个光瞳的横向剪切，朗奇检验法的一个物理模型如图 9.15 所示。以后狄·杰里欧（Dijorio，1939a、1939b、1939c、1939d、1942、1943），帕洛蒂诺（Pallotino，1941）和特拉多·弗兰西萨（Toraldo di Francla，1941a、1941b、1942a、1943a、1943b、1946）进一步发展了这种理论，他们用物理理论得到了条纹的确切形状，并且论证了这些条纹与阴影条纹的相似性。他们还研究了许多与这个理论相关的细节，对于这些理论的发展过程，朗奇已经做了非常详细的论述（Ronchi，1962a、1962b、1964）。

9.4.1 数学分析

利用傅里叶理论对朗奇检验法进行数学分析是埃得奇（Adachi，1963）首先提出来的，以后巴拉克特（Barakat，1969）又发展了这种数学分析法。这种方法假设用复函数 $F_0(x_0, y_0)$ 表示平面 $x_0 - y_0$ 中出射光瞳上的波面，$F_0(x_0, y_0)$ 在孔径规定的界限之外为零。如果是

均匀照明的光学系统，那么，在出射光瞳之内的任何位置上，函数 $F_0(x_0,y_0)$ 可以用$[i2\pi W(x_0,y_0)/\lambda]$表示，其中 $W(x_0,y_0)$ 表示波面变形函数。在平面 x_r-y_r内，根据一个中心位于朗奇光栅上的球面测量由函数 $F_0(x_0,y_0)$ 表示的相位偏差（波面畸变）。如果 r 是参考波面的曲率半径，则在光栅平面上的光场 $U(x_r,y_r)$ 是

$$U(x_r,y_r) = \int_{-\infty}^{\infty}\int F_0(x_0,y_0)\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda r}(x_rx_0+y_ry_0)\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{9.46}$$

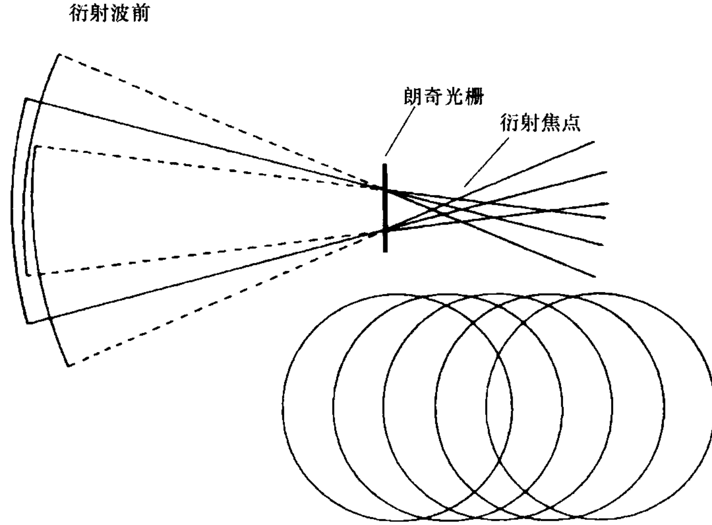


图9.15 朗奇检验法的一个物理模型

正如巴拉克特（Barakat，1969）所提出的，我们能够利用空间滤波的概念解释朗奇光栅效应，因此可以把朗奇光栅看作是在傅里叶变换平面 x_r-y_r中的一个滤波屏。此外，如果观察面 x_1-y_1是光瞳平面 x_0-y_0的像，则在平面上的振幅为

$$G(x_1,y_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int U(x_r,y_r)M(x_r,y_r)\left\{\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda r}(x_rx_1+y_ry_1)\right]\right\}\mathrm{d}x_r\mathrm{d}y_r \tag{9.47}$$

式中，$M(x_r,y_r)$ 是起滤波器或调制器作用的光栅函数。如果把式（9.46）中得出的 $U(x_r,y_r)$ 代入式（9.47）中，就可以得到

$$G(x_1,y_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int F_0(x_0,y_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\int_{-\infty}^{\infty}\int M(x_r,y_r)\left(\exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda r}[(x_1-x_0)x_r+(y_1-y_0)y_r]\right\}\right)\mathrm{d}x_r\mathrm{d}y_r \tag{9.48}$$

该表达式对任何调制函数都能成立。然而，现在假设光栅是由平行等间隔直条纹带构成的，则可以把光栅函数写成

$$M(x_r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n\exp\left(i\frac{2\pi n}{d}x_r\right) \tag{9.49}$$

其中，d 像以往一样是光栅的刻线周期。于是，将式（9.49）带入式（9.48）中，得出

$$G(x_1,y_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n\int_{-\infty}^{\infty}\int F_0(x_0,y_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0$$
$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda r}\left(x_1-x_0+\frac{\lambda rn}{d}\right)x_r\right]\mathrm{d}x_r\right\}$$

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda r}(y_1-y_0)y_r\right]\mathrm{d}y_r\right\} \tag{9.50}$$

在使用狄拉克 δ 函数的定义公式（9.51）时

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i(k-k_0)x]\mathrm{d}x=\delta(k-k_0) \tag{9.51}$$

式（9.50）就变成

$$G(x_1,y_1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n\iint_{-\infty}^{\infty}F_0(x_0,y_0)\delta\left(x_1-x_0+\frac{\lambda rn}{d}\right)\delta(y_1-y_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{9.52}$$

式（9.52）则可以证明与下面的公式相等

$$G(x_1,y_1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_nF_0\left(x_1+\frac{\lambda rn}{d},y_1\right) \tag{9.53}$$

如果光栅是下面的形式，

$$M(x_r)=1+\cos\left(\frac{2\pi nx_r}{d}\right) \tag{9.54}$$

这时，就会有 $B_0=B_1=B_{-1}=1$，于是，得到光瞳的三个横向剪切的像。但是，通常会得到如图 9.15 和图 9.16 所示的多个横向剪切量等于 $\lambda rn/d$ 的像。如果光栅刻线是图 9.17 所示的周期性方波的分布图，那么，根据傅里叶理论可以计算出

$$B_n=(-1)^n\frac{\sin n\pi k_0}{n\pi} \tag{9.55}$$

其中，k_0的定义如图 9.17 所示。如果图 9.17 中的亮带与暗带的宽度相等（$k_0=1/2$），则遗漏偶次项。将公式（9.55）代入式（9.53）中，得出

$$G(x_1,y_1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n\pi k_0}{n\pi}F_0\left(x_1+\frac{\lambda rn}{d},y_1\right) \tag{9.56}$$

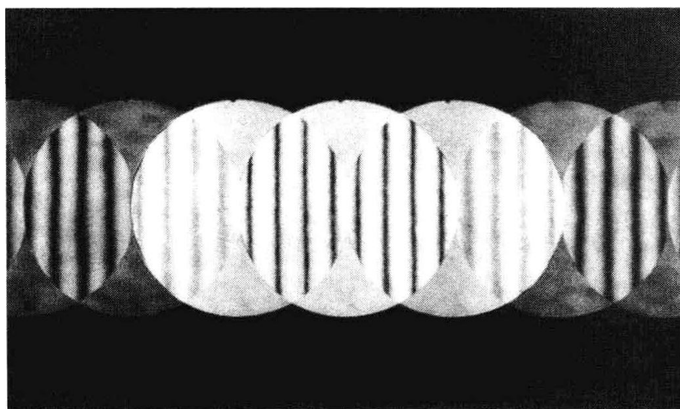


图 9.16　在一个朗奇光栅上，不同衍射级次之间的干涉条纹

现在研究一个曲率半径为 R 的理想波面的情况，其参考波面的曲率半径为 r，则离焦 $\Delta r=R-r$，$F_0(x_1,y_1)$ 可以表示为

$$F_0(x_1,y_1)=\begin{cases}0 & x_1^2+y_1^2>S_{\max}^2\\ \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda r^R}(x_1^2+y_1^2)\right]\Delta r & x_1^2+y_1^2\leqslant S_{\max}^2\end{cases} \tag{9.57}$$

式中，$S_{\max}$是半孔径。

假设与半孔径 S_{max} 相比，横向剪切 $\lambda rn/d$ 非常小，那么就可以把求和法扩展到大的 n 值。为了求得条纹的振幅分布，还可以取 $y_1=0$，这样就能表示为

$$G(x_1)=\left[k_0+2\sum_{n=-\infty}^{N}(-1)^n\frac{\sin n\pi k_0}{n\pi}\cos\left(\frac{2\pi n\Delta r}{Rd}x_1\right)\exp\left(i\frac{\pi n^2\lambda r\Delta r}{Rd^2}\right)\right]-\exp\left(i\frac{\pi\Delta r}{\lambda Rr}x_1^2\right)\tag{9.58}$$

式中，N 为在研究区域里叠加的波面数目。

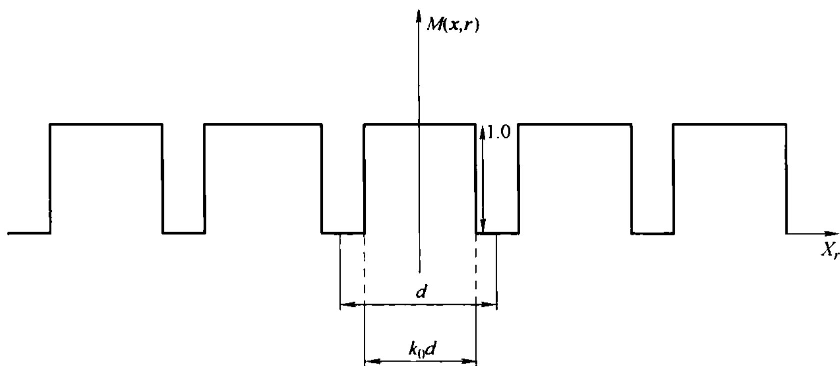


图9.17　朗奇光栅中的方波形状

9.4.2　条纹的对比度和锐度

式（9.58）定量地解释了朗奇条纹锐度欠佳的原因，该表达式在焦平面内部和焦平面外部都是一样的。马拉卡拉（Malacara，1990）的论述表明：对于经常在实验中遇到的少量离焦，离焦量越大，则亮条纹的锐度越大。也就是说，条纹越近，则显现的锐度越大。于是，对于抛物面镜，如果是在焦点之内，条纹的边缘锐度大一些；如果是在焦点之外，则条纹的中心锐度大一些。

当式（9.58）中一阶和零阶之间的相移是 2π 的 M 倍时，得出

$$M\frac{2Rd^2}{\lambda r(R-r)}=1\tag{9.59}$$

条纹变得非常细锐。在朗奇检验法中，可以把这种效应称为塔尔博托效应（Talbot，1836），马拉卡拉和科尼约（Malacara and Cornejo，1974b）曾经研究了这种效应。在 $M=1$ 时，离焦量 Δr 趋向于无穷大，也就是说当条纹的间隔是横向剪切量 S 的一半时，会出现这种效应，即

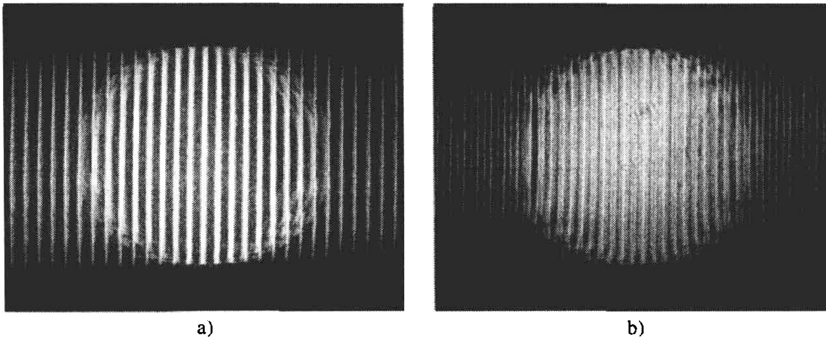
$$\alpha=\frac{\theta_s}{2M}\tag{9.60}$$

式中，θ_s 为任意两个相邻阶次之间的横向剪切角；α 为条纹之间的夹角。

图9.18所示为塔尔博托效应。

另外还有一些自成像的情况。当 $M=\frac{1}{2}$ 时，也就是在半塔尔博托离焦量位置，条纹的对比度会颠倒过来。而当 $M=\frac{1}{4}$ 及 $M=\frac{3}{4}$ 时，条纹的对比度会消失，当条纹的间隔是横向剪切量的两倍时，则条纹会很模糊。

通常情况下，朗奇检验法可以用几何近似的方式来解释。当横向剪切量与波前的口径相



a) b)

图 9.18 朗奇检验中的塔尔博托效应

a）在塔尔博托效应位置上的光栅 b）在塔尔博托效应位置外的光栅

比较小时，这种近似是可行的。相反，朗奇图上的条纹数量不能太多。这也就意味着，条纹的间隔不能比横向剪切量小得太多。

劳发现（Lau，1948），如果使用的光栅周期合适，当光源是周期性调制的非相干性扩展光源时，则会出现光栅条纹的自成像，或者称为塔尔博托效应。在实际使用中，可以用一条狭缝来遮挡住扩展光源来达到上述目的。在朗奇检验中，这种照明方式会被经常使用，对此本章的后面章节会有介绍。

基于塔尔博托和劳效应，人们发明了许多干涉仪。鲁荷曼和斯利娃（Lohmann and Silva，1971、1972），伊滕瑟奇和林木奇（Yokoseki and Susuki，1971a、1971b），斯利娃（Silva，1972），迈尔里奇和罗博林（Mallick and Roblin，1972），哈日哈亚恩等（Hariharan et al.，1974）和帕特斯基（Patorski，1982、1984）。由于很多的应用都是建立在这些干涉仪的基础上，所以说，这些干涉仪的应用是非常成功的。例如：用来测量焦距（Nakano and Murata，1985；Bernardo and Soares，1988）。还有一些干涉仪是基于塔尔博托效应和莫尔条纹的（Glatt and Kafri，1987；Keren et al.，1988）。

曾经有人做过一些实验，用通过改变图 9.17 中所示的狭缝的相对宽度 k_0 的方式来提高条纹带的锐度，后来得到了一些改进性的实验结果（Marry and Cornejo，1973；Cornejo-Rodriguez et al.，1978）。另外，帕特斯基和科尼约-罗杰格兹（Patorski and Cornejo-Rodriguez，1986a）和马拉卡拉（Malakara，1990）也对观察到的条纹对比度和锐度进行了研究。最近，劳拉-奎斯等人（Luna-Zayas，2006）也对其开展了研究。

相位光栅是一种光学厚度呈周期性变化，而不是由透光带和不透光带构成的光栅。制造相位光栅有许多种方法。例如，用沃格（Vogl，1964）和朗奇（Ronchi，1965）所介绍的方法，或者用通常制定相位板的方法都能制造相位光栅。相位光栅特别适用于周期足够大，没有两个以上波面叠加的情况，用相位光栅得到的朗奇图如图 9.19 所示。

值得注意的是波洛蒂诺（Palltiao，1941）通过实验证明了使用相位光栅所得到的位于零阶次两侧相对称的条纹图是互补的。换而言之，一个图中的暗条纹与另一个图中的亮条纹相对应，如图 9.19 所示。此后，特拉多·弗兰西萨（Toraldo di Fraacia，1941a、1941b）从理论上证明了这种效应。他用事实解释这种效应，即在相位光栅中的所有衍射级都有一个相对零级光束的量值为 $m\lambda/4$ 的相移。

几乎是从朗奇和布鲁斯卡格莱昂尼发明了朗奇检验法以来（Ronchi，1930、1940）

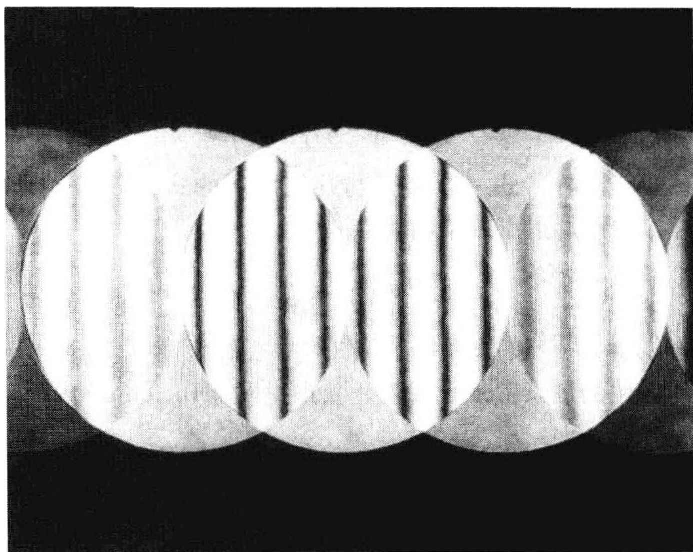


图9.19 用相位光栅得到的朗奇图

（Brascaglioni，1933、1939），朗奇检验法的灵敏度就一直是研究的主要内容。最近科尼约和马拉卡拉（Cornejo and Malacara，1970）也研究了朗奇检验法的灵敏度。

9.4.3 物理原理与几何原理的关系

假定出射光瞳上的辐照度分布是一个常数，则可以把光瞳函数 $F_0(x_0,y_0)$ 写成

$$F_0(x,y_0)=\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}W(x_0,y_0)\right] \tag{9.61}$$

式中，$W(x_0,y_0)$ 表示式（9.4）中的初级像差。

现在假设光栅刻线的周期 d 小到足以产生不多于两个叠加光束的干涉图，如图9.19所示。因此，根据式（9.48），两个相邻阶次 n_1 和 n_2 之间的干涉图可以用式（9.62）表示

$$|G(x_1,y_1)|^2=B_{n1}^2+B_{n2}^2+2B_{n1}B_{n2}\cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda}\left[W(x_1+\frac{\lambda rn_1}{d},y_1)-W\left(x_1+\frac{\lambda rn_2}{d},y_1\right)\right]\right\} \tag{9.62}$$

由此可以看出在以下任何情况都会出现亮条纹。

$$W\left(x_1+\frac{\lambda rn_2}{d},y_1\right)-W\left(x_1+\frac{\lambda rn_1}{d},y_1\right)=-m\lambda \tag{9.63}$$

式中，m 为包括零在内的任何正整数和负整数。

如果取波面两个剪切之间的中心作为新的原点，则得出

$$W\left(x_1+\frac{\lambda r(n_2-n_1)}{2d},y_1\right)-W\left(x_1-\frac{\lambda r(n_2-n_1)}{2d},y_1\right)=-m\lambda \tag{9.64}$$

在原点附近按泰勒级数展开，并取 $n_2-n_1=1$，则得出

$$\frac{\partial W(x_1,y_1)}{\partial x_1}+\frac{1}{6}\left(\frac{\lambda r}{2d}\right)^2\frac{\partial^3W(x_1,y_1)}{\partial x_1^3}=-\frac{md}{r} \tag{9.65}$$

在没有三阶导数项时，该表达式变成等同于式（9.3）（$\varphi=0°$），这就是朗奇检验法的几何学基础。因此，在这种情况下，物理图形和几何图形相符合。这个结论是由特拉多·弗兰西萨（Toraldo di Francia，1947、1954）推导出来的。他指出当 x 的幂不高于二次时（参

见式（9.4)），三阶导数抵消了焦点位移、三级像散和三级彗差。

至于球差，将由式（9.4）得出的带有离焦的球差表达式代入式（9.65）中，则有

$$4A(x_1^2+y_1^2)x_1+2\left(A\frac{\lambda^2r^2}{2D^2}+D\right)x_1=-\frac{md}{r} \tag{9.66}$$

除了焦点位移系数不同外，式（9.66）与几何图形的式（9.10）完全相同。当出现焦点位移为零的情况时，纺锤形焦点或均匀焦点是

$$D=-A\frac{\lambda^2r^2}{2d^2} \tag{9.67}$$

但是，$\lambda r/2d$ 是从其中一个波面的中心到图形中心的距离 ρ_c。因此 $D=-2A\rho_c^2$，其必需条件是把半径为 ρ_c 的区域的焦点置于光栅上。狄杰里欧（Di Jorio，1939d）曾经研究过这种效应。

9.5 朗奇检验法的实际应用

有许多种实验装置能够实施朗奇检验法。例如科克汉姆（Kirkham，1953）曾经介绍过一种朗奇检验装置。朗奇检验法的基本结构如图 9.20a 所示。光源是白光钨灯，照明一个小孔或一条平行于光栅刻线的狭缝。而得·瓦利使用一个球形的光源（De Vany，1974），帕特斯基和科尼约-罗杰格兹（Patorski and Cornejo-Rodriguez，1986b）使用的日光作为光源。最近，伦利兹等人开始使用一些发光二极管（LED）来作为光源（Nuñez，2001）。狭缝的优点是能够利用更多的光，产生较明亮的图形。使用狭缝是因为在狭缝上的每一点都产生相同的图形，这是由于落在光栅上的对应像仅仅沿着光栅刻线移动，没有横向位移。最初使用的是狭缝光源，不久以后安德森和波特（Anderson and Porter，1929）提出用光栅代替狭缝遮挡灯，形成扩展光源，如图 9.20b 所示。这种结构除了图形有比较大的亮度外，另一个重要优点是无需过多地考虑光栅刻线与狭缝两者之间的平行度。这时光源成为多缝的，而这些像的间距等于朗奇光栅的刻线密度。这个特性证明了用光栅遮挡光源是可行的。此外下文所介绍的更加正规的方法也将证明这一点。

著名的凡·塞特特-泽尼克定理确定的光源相干函数是由光源上强度分布的傅里叶变换来表示的。由于在这种情况下，光源也等同于光栅，所以这时的傅里叶变换呈现如图 9.21 所示情形。因此，如果在波面上存在两个间距为该波面内任意两个峰值之间距离 Δx 的点，那么，这两个点就能够产生对比度很好的干涉条纹。如果光源上的光栅和检验朗奇光栅刻线同一平面上，那么，相干函数上两个峰值之间的距离恰好是两个衍射波面之间的横向剪切长度。这个结果完全证明了利用遮挡扩展光源的朗奇光栅是正确的。

值得注意的是当光栅上的暗带和亮带的宽度相等时（$k_0=\frac{1}{2}$），在波面上相隔距离 $\Delta x=2\lambda r/d$。因此，两个一阶波面都与零阶波面发生干涉，但是这两个一级波面本身互相不发生干涉。然而，在使用点光源或狭缝时，所有叠加的波面都彼此发生干涉（Braa and Janssen，1999）。

在 9.2.3 节中介绍的补偿朗奇光栅并不会对波面上的所有点产生相同的横向剪切。因此，照明波面在任何距离上的任意两个点之间必须具有相干性。只有使用点光源时，才可能存在这种情况。必须记住气体激光器才是最好的光源，因为它具有非常高的相干性。

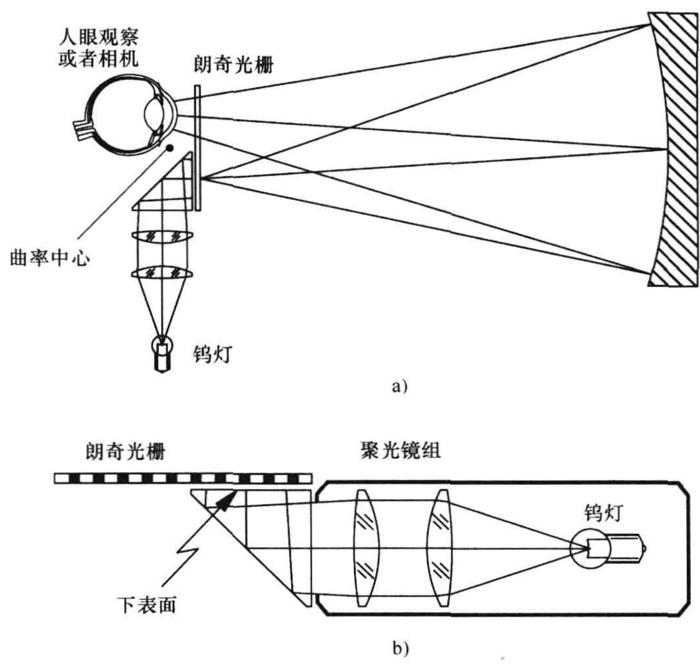


图9.20 观察朗奇图形的装置简图
a）基本结构 b）用光栅代替狭缝

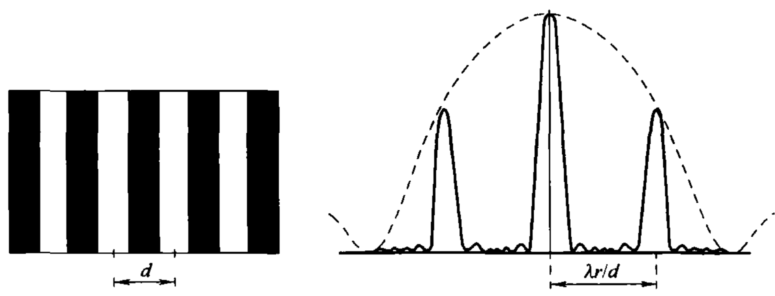


图9.21 朗奇光栅和其在被检验反射镜上的相干作用

图9.22所示为观察朗奇图的仪器。图9.23是用图9.22所示的仪器得到的两幅朗奇图。虽然前面的讨论已经很清楚了，但是还应当再次指出朗奇条纹的形状并非与被检表面直接相关，而是与横向像差函数有关。由于我们所研究的条纹准确位于表面平面上，所以把普通照相机聚焦在该平面上就能够拍摄朗奇图的照片。现在，可以使用带有镜头的CCD探测器，采集到的朗奇图也可以存储到计算机里，以便进一步处理，有时还可以使用液晶装置（Luna-Zayas et al.，2006）。

在检验非球面反射镜时，必须注意使焦散的横向尺寸足够小，才能使全部光线都进入观察者眼睛或照相机。在许多情况下，焦散的束腰往往太大了（例如大口径望远镜的反射镜），尽管可以通过照相机镜头，却不能通过观察者的瞳孔。

另一个具有重要实际意义的是通过朗奇光栅上每个狭缝的光都与通过其他狭缝的光发生干涉，从而产生一种带有许多横向剪切光瞳的效应。由于朗奇图不能准确地位于光瞳上，所以这种效应降低了检验精度。这显然是由于存在许多朗奇图形干涉像的缘故（Malacara，et

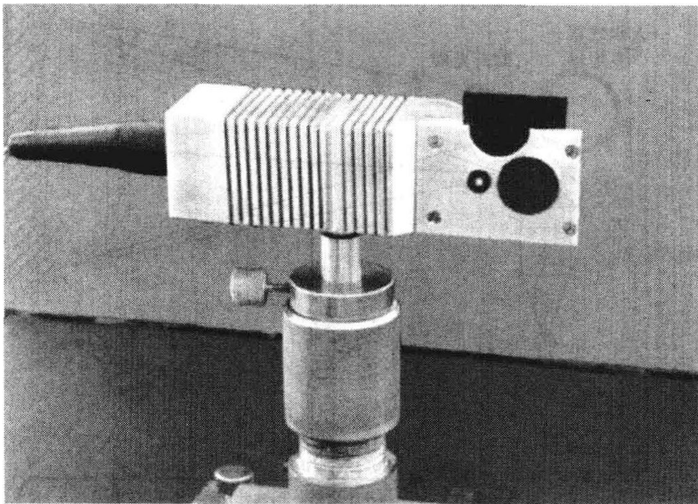


图 9.22 观察朗奇图的仪器

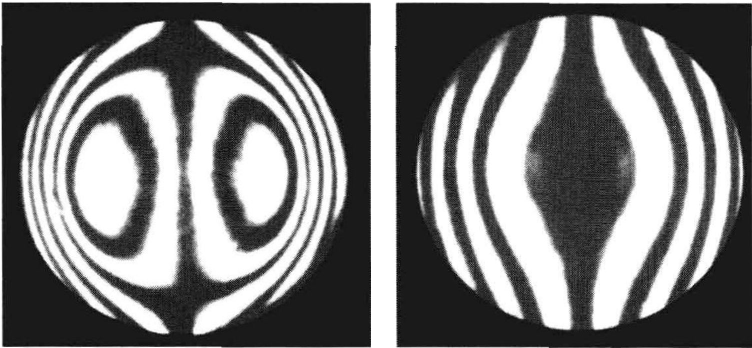


图 9.23 用图 9.22 所示仪器得到的两幅朗奇图

al. , 1990)。提高检验精密度的另外一种方法是用一根金属线代替朗奇光栅。使金属线以垂直光轴的方向移动，并使这个移动距离接近于光栅刻线的宽度。金属线与光轴之间的距离需要准确测定。

如果仔细地进行朗奇检验，并且能正确地识别朗奇图，那么朗奇检验法是定性或定量测定一个光学表面或透镜组所要求的标准程度的一种非常有意义的方法。

能够进行朗奇光栅检验的新装置还在持续不断地发展。例如，卡马卢威等人报道了一种基于朗奇检验的装置（Kamalov, 1980)。奎恩得智等人（Kuindzhi et al. , 1980)、帕特斯基(Patorski, 1980)、汤姆森（Thompson, 1987）和斯特格（Steig, 1987）等人精心研究了朗奇光栅的制造，另外，也还有一些值得关注的应用（Royo et al. , 2000; Schreiber and Schrider, 1997; Sirohi et al. , 1995; Blakley, 1994)。

9.6 其他几种相关的检验

9.6.1 同心圆环格栅

除使用直刻线光栅进行朗奇检验之外，还可以使用圆环刻线的格栅。最初是斯坎多恩研

究了圆形格栅的改造（Scandone，1931c、1932），后来默迪和休梅克（Murty and Shoemaker，1966）也使用了圆形格栅。下面介绍他们的检验方法。用圆格栅得到的干涉图与普通朗奇干涉图不同。使用圆格栅时，以式（9.3）的相同方式也能够得到条纹方程式

$$\left(R\frac{\partial W}{\partial x}-\bar{x}_0\right)+\left(R\frac{\partial W}{\partial y}-\bar{y}_0\right)^2=M\rho_1^2 \qquad (9.68)$$

式中，($\bar{x}_0$，$\bar{y}_0$) 为一组同心圆的中心；ρ_1 为最里面一个圆的半径；M 是整数，其定义如下

$$M=\begin{cases} n^2 & \text{对于等间距圆} \\ n & \text{对于菲涅耳波带片} \end{cases}$$

n 是正整数。

如果像式（9.4）一样用波面 W 表示初级像差，那么

$$\{R[4A(x^2+y^2)x+2Bx+2Cx+2Dx+F]-\bar{x}_0\}^2+$$
$$\{R[4A(x^2+y^2)y+B(x^2+3y^2)+6Cy+2Dy+E]-\bar{y}_0\}^2=M\rho_1^2 \qquad (9.69)$$

正如默迪和休梅克所指出的，除很少几种极普通的情况以外，一般情况下，以上表达式都变得特别复杂。他们介绍了几幅典型的图形。

还需重点指出的是进行这种检验时必须使用点光源，而不能使用狭缝。

9.6.2 扫描朗奇检验法

扫描朗奇检验法实际上属于第 13 章的范畴。这种检验法是汤姆森等人（Thompson et al.，1973）提出来的。他们把这种检验仪器命名为 AC 光栅干涉仪，主要用于检验激光波面。AC 光栅干涉检验法基本上是一种动态朗奇检验法，在检验过程中，可以使用计算机比较迅速地处理所得到数据。

光栅在其自身平面上匀速地移动，所以条纹图在垂直于光栅狭缝的方向上并不是固定不动的。因而，可以使用硅二极管列阵或摄像管等光电探测器来代替使用照相法记录固定条纹图的方式来记录移动条纹。

硅光电二极管列阵的每个探测单元都产生一个随朗奇光栅移动速度而变化的周期性电压输出，并且输出频率都相同。探测器产生的信号的相对相位取决于它们在波面上的位置，此外还取决于像差 W。精密测量这些相位足以使条纹图再现，并由此再现波面。

为了得到一个移动的朗奇光栅，汤姆森等人（Thompson et al.，1973）提出使用一个周长约为40cm 的圆筒形光栅。光栅刻线的微小弯曲不会产生严重影响。

科里欧普鲁斯（Koliopoulos，1980）、伊藤嘎（Yatagai，1984）、欧莫娃和伊藤嘎一（Omura and Yatagai，1988）及万和林（Wan and Lin，1990）等人研究过相移朗奇检验法。

9.6.3 边带朗奇检验法

边带朗奇检验法是马拉卡拉和科尼约发明的（Malacara and Cornejo，1976a）。这种检验法本质上是一种全息检验法。边带朗奇检验法需要使用一个特殊的光栅（或全息图）。这种光栅是根据图 9.24 所示的装置制造的。图 9.24 中两个凹面反射镜将点光源 S 发射的光反射到照相底片 P 上的一个共同区域。在反射镜 M_2 前方放置一个非常粗的直带状光栅。其目的是为了制造一幅全息图，以便用 M_1 反射的光作为参考光，用来再现前面放置了粗光栅的反射镜 M_2 的像。

全息图经过显影之后，就可以放回到反射镜 M_1 反射的光束中，这时把反射镜 M_2 移开。如果在再现的过程中使用的反射镜 M_1 与制作全息图时使用的反射镜 M_1 完全相同，那么，在反射镜 M_2 原来所在的位置上就能够观察到一组直条纹。如果前后使用的反射镜不相同，那么观察到的就不是直条纹了。这表明波像差是用使用的两个镜面 M 的面形之差的两倍来表示的。

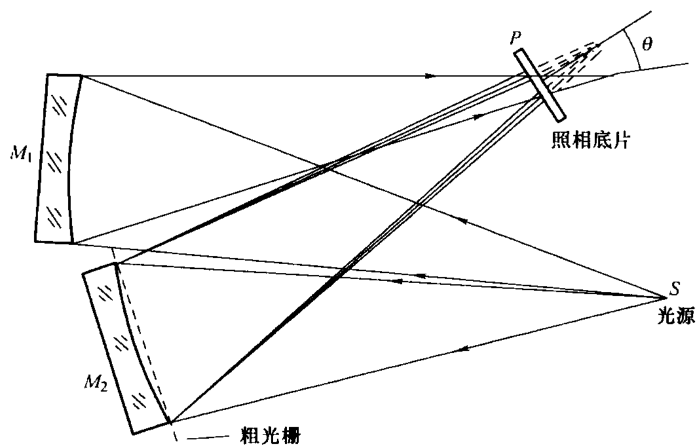


图 9.24 制作用于边带朗奇检验的光栅装置

图 9.25 所示为用边带朗奇检验法得到的条纹，其主要优点是干涉条带非常清晰，并且轮廓分明，而不像用普通朗奇检验法得到的条纹那样。关于边带朗奇检验的更多研究和更正，马拉卡拉和琼斯（Malacara and Josse，1978）、施温德（Schwider，1981）及帕特斯基和萨尔博特（Patorski and Salbut，1984）等人都曾研究过。

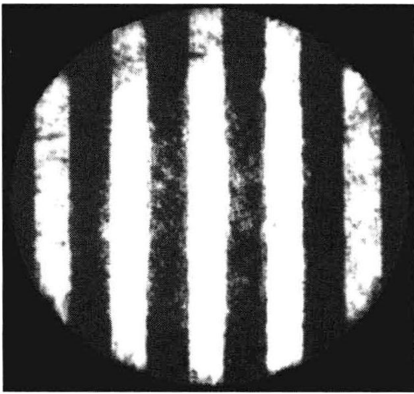


图 9.25 用边带朗奇检验法得到的条纹

9.6.4 洛厄检验法

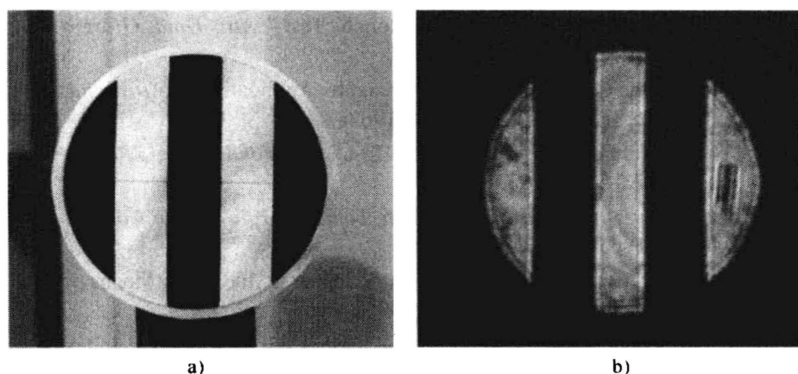
这种检验法是洛厄（Lower，1937）发明的。他指出这种方法与倒转的朗奇检验法有些相似。用普通朗奇检验法不能检验焦距比非常小的抛物面镜，显然，检验施密特照相机的难度会更大。洛厄最初用这种检验方法测定施密特照相机的校准程度。他所使用的方法是在被检的光学系统焦点上放置一个狭缝，并在比较远的距离上观察该光学系统的虚像（在无穷远）。可以把这个像看做是限制在该光学系统的孔径上，而且光学系统经很好的校正后，形成的像是直线。当观察者的眼睛横向移过孔径时，看到的像仍然是直的。

洛厄检验法既迅速又简便，但是由于许多实际困难，其中包括观察距离有限，使检验精确度都受到很大限制。兰克等人（Rank et al.，1949）和约达（Yoder，1959）先后分析了限制洛厄检验法的灵敏度和精确度的各种因素。哈姆谢尔（Hamsher，1946）发展了这种检验法，应用类似的原理，但检验抛物面反射镜所用的是一根纱线。

9.6.5　朗奇-哈特曼和零哈特曼检验法

尽管人们通常是分开来研究朗奇检验法和哈特曼检验法的，但卡尔德诺-戴威拉等人曾发现其实两者是紧密相连的（Cordero-Davila et al.，1990）。之所以存在着这种关系，一个显著的原因就是它们两者之中用于观察或者记录的光屏或者滤波面是可以互换的：即一种测试方法中的，可以换到另一个测试方法中。这种现象的物理原理可以用两个平面之间光的传播中几何光学的方法来解释。使用9.2.2节中的数学推导，在被测表面前放置一个一维的哈特曼屏，可以计算得到理想的朗奇-哈特曼图，如图9.26a所示。由于新的一维的朗奇-哈特曼屏补偿了被测表面的非球面度，所以看到的是零条纹。观察到的零条纹图如图9.26b所示。

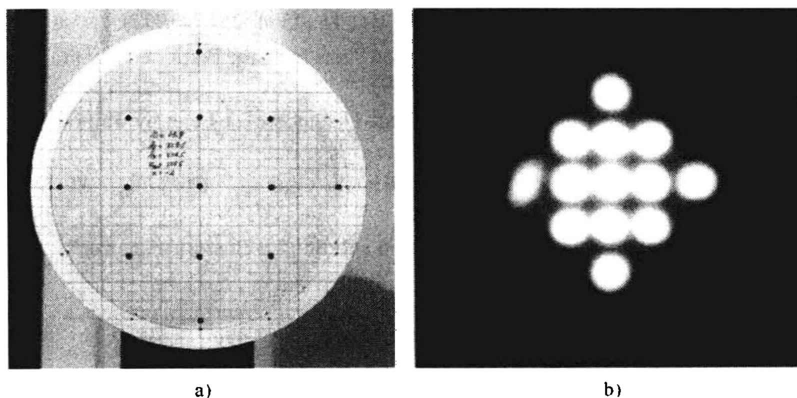
以发展零哈特曼检验法为主要目的，在建立了朗奇和哈特曼检验之间的关系之后，零哈特曼检验法——一种新的哈特曼屏可以通过在屏上布置小孔来实现，这些小孔就好比是两幅相互垂直的朗奇图的相交点。被称为零哈特曼检验的屏幕及观察到的哈特曼图如图9.27a和b所示。最近，卡尔德诺-戴威拉等人研究了朗奇检验和哈特曼检验的基本数学理论（Cordero-Davila et al.，1992），这些理论便是我们上面所介绍的内容。



a)　　b)

图9.26　朗奇-哈特曼零检验法

a）理想的朗奇-哈特曼图　b）观察到的零条纹图



a)　　b)

图9.27　哈特曼零检验法

a）零哈特曼检验的屏幕　b）观察到的哈特曼图

9.7 结束语

我非常感谢丹尼尔·马拉卡拉博士（Dr. Daniel Malacara）给予的鼓励和指导，以及已故的罗伯特H·诺布尔博士（Dr. Robert H. Noble）很有价值的批评。我也非常感谢墨西哥国家天体物理学、光学和电子学院（INAOE）在本书第3版准备中所给予的大力支持，特别感谢的是本书的第一编辑，已故的纪尧姆·哈若博士（Dr. Guillermo Haro）。另外，在这里，我还非常感谢墨西哥国家天体物理学、光学和电子学院的工作人员及在前几版中提及的几个墨西哥研究所里的学生们。在这一版中，我也非常感谢F. 格拉那多斯等人给予的多方面的帮助（F. Granados-Agustín, Gustavo Rodríguez Zurita, Yaoltzin Luna, NoéToto, and Ana Ma. Zarate）。

参考文献

Adachi I., "Quantitative Measurement of Aberration by Ronchi Test," *Atti. Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica*, **15**, 461–483 (1960a).

Adachi I., "Quantitative Measurement of Aberration by Ronchi Test," *Atti. Fond. Giorgio Contrib. Ist. Naz. Ottica*, **15**, 550–585 (1960b).

Adachi I., "The Recent History of the Grating Interferometer and Its Applications," *Atti. Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica*, **17**, 252–259 (1962a).

Adachi I., "Measurement of Transfer Function of the Ronchi Test," *Atti. Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica*, **17**, 523–534 (1962b).

Adachi I., "The Diffraction Theory of the Ronchi Test," *Atti. Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica*, **18**, 344–349 (1963).

Agureev V. V., "Refractive-Index Distribution in Gradient-Index Fibers, Studied by Means of Shearing Interferometry," *J. Opt. Tech.*, **62**, 375–378 (1995).

Agureev V. V., V. N. Morozov, G. O. Karapetyan and S. N. Ivashevskii, "Refractive-Index Distribution in Gradient-Index Fibers, Studied by Means of Shearing Interferometry," *J. Opt. Tech.*, **62**, 375–378 (1995).

Anderson J. A. and R. W. Porter, "Ronchi's Method of Optical Testing," *Astrophys. J.*, **70**, 175–181 (1929).

Assa A., A. A. Betseer, and J. Politch, "Recording Slope and Curvature Contours of Flexed Plates Using a Grating Shearing Interferometer," *Apbl. Opt.*, **16**, 2504–2513 (1977).

Barakat R., "General Diffraction Theory of Optical Aberration Tests from the Point of View of Spatial Filtering," *J. Opt. Soc. Am.*, **59**, 1432–1439 (1969).

Bernardo L. M. and O. D. Soares, "Evaluation of the Focal Distance of a Lens by Talbot Interferometry," *Appl. Opt.*, **27**, 296–301 (1988).

Blakley R., "Testing Concave Surfaces with a Rotating Ronchi Grating," *Opt. Eng.*, **33**, 3472–3475 (1994).

Bocchino G., "L'Aberrazione Sferica Zonale Esaminata con i Reticoli a Bassa Frequenza," *Ottica*, **5**, 286 (1940).

Bocchino G., "Un Metodo per la Determinazione Rapida e Precise dell' Aberrazione Sferica Semplice, Mediante la Frange d'Ombra," *Ottica*, **8**, 310 (1943).

Braat J. and A. J. E. M. Janssen, "Improved Ronchi Test with Extended Source," *J. Opt. Soc. A*, **16**, 131–140 (1999).

Briers J. D., "Interferometric Testing of Optical Systems and Components: A Review," *Opt. Laser Technol.*, **4**, 28–41 (1972).

Briers J. D., "Ronchi Test Formulae 1: Theory," *Opt. Laser Technol.*, **11**, 189–196 (1979).

Briers J. D. and M. J. Cochrane, "Ronchi Test Formulae 2: Practical Formulae and Experimental Verification," *Opt. Laser Technol.*, **11**, 245–257 (1979).

Brookman E. C, L. D. Dickson, and R. S. Fortenberry, "Generalization of the Ronchi Ruling Method for Measuring Gaussian Beam Diameter," *Opt. Eng.*, **22**, 643–647 (1983).

Bruscaglioni R., "Sulla Forma delle Fringe d'Interferenza Ottenute da Onde Affete da Astigmatismo Puro con Reticoli ad Orientamento Qualunque," *Rend. Accad. Naz. Lincei.*, **15**, 70 (1932a).

Bruscaglioni R., "Sulla Misura dell'Astigmatismo e del Coma Mediante le Frange d'Ombra," *Boll. Assoc. Atti. Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica Ital.*, **6**, 46 (1932b).

Bruscaglioni R., "Sulla Sensibilita della Rivelazione e Sulla Misura dell'Astigmatismo con Metodi Interferenziali," *Boll. Assoc. Atti. Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica Ital.*, **7**, 78 (1933).

Bruscaglioni R., "Controllo della Afocalita di una Parte e Controllo di un Piano Campione con l'Interferometro Ronchi a Reticolo," *Ottica*, **4**, 203 (1939).

Calamai G., "Su di una Formula per la Misura dell'Astigmatismo Mediante i Reticoli," *Ottica*, **3**, 41 (1938).

Chen L. C., J. Chen, R. Zhu, Q. Wang, H. Liu, Y. Zhang, "Ronchi Test Using Overlapping Averaging 4-Frame Algorithm," *Proc. SPIE*, **2003**, 398–404 (1993).

Cordero-Davila A., A. Cornejo Rodriguez, and O. Cardona-Nuñez, "Null Hartmann and Ronchi Hartmann Tests," *Appl. Opt.*, **29**, 4618 (1990).

Cordero-Davila A., A. Cornejo-Rodriguez, O. Cardona-Nuñez, "Common Mathematical Theory for the Ronchi and Hartmann Test," *Appl. Opt.*, **31**, 2370–2376 (1992).

Cordero-Dávila A., J. Díaz-Anzures, V. Cabrera-Peláez, "Algorithm for the Simulation of Ronchigrams of Arbitrary Optical Systems and Ronchi Grids in Generalized Coordinates," *Appl. Opt.*, **41**, 3866–3873 (2002).

Cornejo-Rodriguez A., "The Ronchi Test for Aspherical Optical Surfaces," *Kogaku*, **12**, 278 (1983).

Cornejo A., and D. Malacara, "Ronchi Test of Aspherical Surfaces: Analysis and Accuracy," *Appl. Opt.*, **9**, 1897–1901 (1970).

Cornejo-Rodriguez A. and D. Malacara, "Wavefront Determination Using Ronchi and, Hartmann Tests," *Bol. Int. Tonantzintla*, **2**, 127–129 (1976).

Cornejo-Rodriguez A., H. Altamirano, and M. V. R. K. Murty, "Experimental Results in the Sharpening of the Fringes in the Ronchi Test," *Bol. Inst. Tonantzintla*, **2**, 313–315(1978).

Crino B., "Sulla Misura dell'Aberrazione Sferica, Coma e Astigmatismo Mediante la Frange d'Ombra Estrassiale Ottenute con Reticoli Rettilinei," *Boll. Assoc. Ottica Ital.*, **7**, 113 (1933).

Crino B., "Nuvoi Risultati Nello Studio Analitico delle Frange d'Ombra Ottenute per Interferenza di Onde Aberranti," d'Ombra Ottenute per Interferenza di Onde Aberranti," *Ottica*, **4**, 114 (1939).

De Vany A. S., "Some Aspects of Interferometric Testing and Optical Figuring," *Appl. Opt.*, **4**, 831–833 (1965).

De Vany A. S., "Quasi-Ronchigrams as Mirror Transitive Images of Interferograms," *Appl. Opt.*, **9**, 1844–1945 (1970).

De Vany A. S., "Laser Illuminated Divergent Ball Bearing Sources," *Appl. Opt.*, **13**, 457–459 (1974).

De Vany A. S., "Profiling pitch polishers" *Appl. Opt.*, **17**, 3022–3024 (1978).

De Vany A. S., "Interpreting Wave-Front and Glass-Error Slopes in an Interferogram," *Appl. Opt.*, **19**, 173 (1980).

De Vany A. S., "Patterns of Correlation of Interferograms and Ronchigrams," *Appl. Opt.*, **20**, A40–A41 (1981).

Di Jorio M., "Ulteriore Approssimazione dello Studio delle Aberrazioni con l'Interferometro Ronchi a Reticolo," *Ottica*, **4**, 31 (1939a).

Di Jorio M., "Una Formula Più Precisa delle Frange d'Ombra dell'Interferometro Ronchi a Reticolo," *Ottica*, **4**, 83 (1939b).

Di Jorio M., "L'Aberrazione Sferica Esaminata con i Reticoli di Alta Frequenza," *Ottica*, **4**, 184 (1939c).

Di Jorio M., "Estensione del Concetto del Fuoco Uniforme: il Fuoco Uniforme Zonale," *Ottica*, **4**, 254 (1939d).

Di Jorio M., "Similitudine Degli Interferogrammi dell'Interferometro Ronchi al Variare x_p e Verifica Sperimentale della Costansa del numero *b*," *Ottica*, **7**, 243 (1942).

Di Jorio M., "Equazione dell'Interferometro Ronchi per le al Onde Sferiche Aperte Fino al Quarto Ordine, e sua Discusione," *Ottica*, **8**, 288 (1943).

Díaz-Uribe R., "Medium Precision Null Screen Testing of Off-Axis Parabolic Mirrors," *Appl. Opt.*, **39**, 2790–2804 (2000).

Díaz-Uribe R., and M. Campos, "Null-Screen Testing of Fast Convex Aspheric Surfaces," *Appl. Opt.*, **39**, 2670–2677 (2000).

Elster C., "Exact Two-Dimensional Wavefront Reconstruction from Lateral Shearing Interferograms with Large Shears," *Appl. Opt.*, **39**, 5353–5359 (2000).

Elster C., and I. Weingartner, "Solution to the Shearing Problem," *Appl. Opt.*, **38**, 5024–5031 (1999).

Erdös, P., "Ronchi Test of Fifth Order Aberrations," *J. Opt. Soc. Am.*, **49**, 865–868 (1959).

Fischer D. J., H. P. Stahl, "A Vector Formulation for Ronchi Shear Surface Fitting," *Proc. SPIE*, **1755**, 228–238 (1994).

Glatt I. and O. Kafri, "Determination of the Focal Length of Nonparaxial Lenses by Moire Deflectometry," *Appl. Opt.*, **26**, 2507–2508 (1987).

Hamsher, D. H., "Screen Line Tests of Paraboloidal Reflectors," *J. Opt. Soc. Am.*, **36**, 291–295 (1946).

Harbers G., P. J. Kunst, and G. W. Leibbrandt, "Analysis of Lateral Shearing Interferograms by Use of Zernike Polynomials," *Appl. Opt.*, **35**, 6162–6172 (1996).

Hariharan P., W. H. Steel, and J. C. Wyant, "Doubling Grating Interferometer with Variable Lateral Shear," *Opt. Comm.*, **11**, 317 (1974).

Hegeman P., X. Christmann, M. Visser, J. Braat, "Experimental Study of a Shearing Interferometer Concept for At-Length Wave Characterization of Extreme-Ultraviolet Optics," *Appl. Opt.*, **40**, 4526–4533 (2001).

Hopkins G. H. and R. H. Shagan, "Null Ronchi Gratings from Spot Diagram," *Appl. Opt.*, **16**, 2602–2603 (1977).

Jentzsch F., "Die Rastermethode: Ein Verfahren zur Demonstration und Messung der Spharischen Aberration," *Phys. Z.*, **24**, 66 (1928).

Kamalov J. A., V. A. Komissaruk, and N. P. Mende, "Preparation of the IAB-451 Instrument for Operation as a Diffraction Interferometer," *Sov. J. Opt. Technol.*, **41**, 249–250 (1980).

Kasana R. S., S. Boseck, and K. J. Rosenbrich, "Non-Destructive Collimation Technique for Measuring Glass Constants Using a Ronchi Grating Shearing Interferometer," *Opt. Laser Technol.*, **16**, 101–105 (1984).

Keren E., K. M. Kreske, and O. Kafri, "Universal Method for Determining the Focal Length of Optical Systems by Moirè Deflectometry," *Appl. Opt.*, **27**, 1383–1385 (1988).

Kessler D. and R. V. Shack, "Dynamic Optical Tests of a High-Speed Polygon," *Appl. Opt.*, **20**, 1015–1019 (1981).

King J. H., "Quantitative Optical Test for Telescope Mirrors and Lenses," *J. Opt. Soc. Am.*, **24**, 250 (1934). Reprinted in: *Amateur Telescope Making*, vol. 2, A. G. Ingalls, Ed., Scientific American, New York, 1953, p. 104.

Kirkham A. R., "The Ronchi Test for Mirrors," in: *Amiteur Telescope Making*, vol. 1, A. G. Ingalls, Ed., Scientific American, New York, 1953, p. 264.

Koliopoulus C. L., "Radial Grating Lateral Shear Heterodyne Interferometer," *Appl. Opt.*, **19**, 1523–1528 (1980).

Koslowska A. and M. Kujawinska, "Grating Interferometry with a Semiconductor Source," *Appl. Opt.*, **36**, 8116–8120 (1997).

Kuindzhi V. V., S. A. Strezhnev and M. T. Popov, "Gratings for Diffraction Interferometer," *Sov. J. Opt. Technol.*, **47**, 240–241 (1980).

Lau E., "Bengungserscheinungen an Deppeltrastern," *Ann. Phys.*, **6**, 417 (1948).

Lenouvel M. L., "Methode de Determination et de Mesure des Aberrations des Systemes Optiques," *Rev. Opt.*, **3**, 211 (1924a).

Lenouvel M. L., "Methode de Determination et de Mesure des Aberrations des Systemes Optiques," *Rev. Opt.*, **3**, 315 (1924b).

Lenouvel M. L., "Etude des Objectifs de Reproduction," *Rev. Opt.*, **4**, 294 (1925a).

Lenouvel M. L., "Essai d'Objectifs par le Coin d'Air" *Rev. Opt.*, **4**, 299 (1925b).

Lin J. A., J. Hsu, and S. A. Shire, "Quantitative Three Beam Ronchi Test," *Appl. Opt.*, **29**, 1912 (1990).

Lohmann A. W. and D. E. Silva, "An Interferometer Based on the Talbot Effect," *Opt. Comm.*, **2**, 413 (1971).

Lohmann A. W. and D. E. Silva, "A Talbot Interferometer with Circular Gratings," *Opt. Comm.*, **4**, 926 (1972).

Lower H. A., "Notes on the Construction of an F/1 Schmidt Camera," *in Amateur Telescope Making*, Vol. 2, A. G. Ingalls, Ed., Scientific American, New York, 1954, p. 410; formerly published by Munn and Co., 1937.

Lumley E., "A Method of Making a Ronchi Test on an Aspheric Mirror," in *Amateur Astronomers*, Sidney, 1959; reprinted in *Atti. Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica*, **15**,457 (1960).

Lumley E., "Figuring a Paraboloid with the Ronchi Test," *Sky Telesc.*, **22** 298 (1961).

Luna-Zayas Y., F. Granados-Agustín, and A. Cornejo-Rodríguez, "Ronchi Test with Sub-Structured Gratings," *Proc. SPIE*, **6034**, 480–486 (2006).

Malacara D., Testing of Optical Surfaces, Ph.D. Thesis, University of Rochester, New York, University Microfilms, Ann Arbor, Mich., Order No. 65–12,013, 1965a.

Malacara D., "Geometrical Ronchi Test of Aspherical Mirrors," *Appl. Opt.*, **4**, 1371–1374 (1965b).

Malacara D., "Ronchi Test and Transversal Spherical Aberration," *Bot Obs. Tonanzintla Tacubaya.*, **4**, 73 (1965c).

Malacara D., "Analysis of the Interferometric Ronchi Test," *Appl. Opt.*, **29**, 3633–3637 (1990).

Malacara D. and A. Cornejo, "Modified Ronchi Test to Measure the Axial Chromatic Aberration in Lenses," *Appl. Opt.*, **10**, 679–680 (1971).

Malacara D. and A. Cornejo, "Relating the Ronchi and Lateral Shearing Interferometer Tests," *Opt. Spectra.*, **8**, 54–55 (1974a).

Malacara D. and A. Cornejo, "The Talbot Effect in the Ronchi Test," *Bol. Inst. Tonantzintla*, **1**, 193–196 (1974b).

Malacara D. and A. Cornejo, "Null Ronchi Test for Aspherical Surfaces," *Appl. Opt.*, **13**, 1778–1780 (1974c).

Malacara D. and A. Cornejo, "Shape Measurement of Optical Systems with Rotational Symmetry Using Ronchigrams," *Bol. Inst. Tonantzintla*, **1**, 277–283 (1975).

Malacara D. and A. Cornejo, "Side Band Ronchi Test," *Appl. Opt.*, **15**, 2220–2222 (1976a).

Malacara D. and A. Cornejo, "Third Order Computation of Null Ronchi Rulings," *Bol. Inst. Tonantzintla*, **2**, 91–92, (1976b).

Malacara D. and M. Josse, "Testing of Aspherical Lenses Using Side Band Ronchi Test," *Appl. Opt.*, **17**, 17–18 (1978).

Mallick S. and M. L. Roblin, "Coherent Imaging in Presence of Defect of Focus," *Trans. Opt. Soc. Am.*, **64**, 1944 (1972).

Martin L. C, Technical Optics, vol. 2, Pitman, London, 1960, Chap. VII.

Mobsby E., "Testing Parabolic Mirrors with Inverse Parabolic Grating," *Astronomy: J. Wessex Astron. Soc.*, **1**, 13 (1973).

Mobsby E., "A Ronchi Null Test for Parabolids," *Sky Telesc.*, **48**, 325–330 (1974).

Morais C, "Riassunto delle Applicazioni dei Reticoli allo Studio delle Aberrazione dei Sistemi Ottici," *Atti. Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica*, **13**, 546–602 (1958).

Murty M. V. R. K., "Interferometry Applied to Testing of Optics," *Bull. Opt. Soc. India*, **1**, 29–37 (1967).

Murty M. V. R. K., "A Simple Method of Introducing Tilt in the Ronchi and Cube Type of Shearing Interferometers," *Bull. Opt. Soc. India*, **5**, 1–5 (1971).

Murty M. V. R. K. and A. Cornejo, "Sharpening the Fringes in the Ronchi Test," *Appl. Opt.*, **12**, 2230–2231 (1973).

Murty M. V. R. K. and A. H. Shoemaker, "Theory of Concentric Circular Grid," *Appl. Opt.*, **5**, 323–326 (1966).

Nakano Y. and K. Murata, "Talbot Interferometry for Measuring the Focal Length of a Lens," *Appl. Opt.*, **24**, 3162–3166 (1985).

Nuñez A. J. M., A. Cordero Dávila, S. Vergara-Limón, and J. Cuautle-Cortés., "Improved Ronchi Tester," *Appl. Opt.*, **40**, 501–505 (2001).

Omura K. and T. Yatagai, "Phase Measuring Ronchi Test," *Appl. Opt.*, **27**, 523–528 (1988).

Pacella G. B., "Sulla Ricerca della Forma delle Onde Luminose dall'Esame delle Frange d'Ombra," *Rend. Accad. Naz. Lincei.*, **5**, 752 (1927).

Páez G., M. Strojnik, and G. Ga, "Vectorial Shearing Interferometer," *Appl. Opt.*, **39**, 5172–5178 (2000).

Pallotino P., "Sulla Dissimmetria delle Frange Dell'Interferometro Ronchi a Reticolo," *Ottica*, **6**, 26 (1941).

Pastor J., "Hologram Interferometry and Optical Technology," *Appl. Opt.*, **8**, 525–531 (1969).

Patorski K., "Measurements of the Wavefront Curvature of Small Diameter Laser Beams Using the Fourier Imaging Phenomenon," *Opt. Laser Technol.*, **11**, 91 (1979).

Pastorski K., "Production of Binary Amplitude Gratings with Arbitrary Opening," *Opt. Laser Technol.*, **12**, 267–270 (1980).

Patorski K., "Periodic Source Ronchi-Talbot Shearing Interferometer," *Optik*, **62**, 207–210 (1982).

Patorski K., "Heuristic Explanation of Grating Shearing Interferometry Using Incoherent Illumination," *Opt. Acta*, **31**, 33–38 (1984).

Patorski K., "Grating Shearing Interferometer with Variable Shear and Fringe Orientation," *Appl. Opt.*, **25**, 4192–4198 (1986).

Patorski K. and A. Cornejo-Rodriguez, "Fringe Contrast Interpretation for an Extended Source Ronchi Test," *Appl. Opt.*, **25**, 2790–2795 (1986a).

Patorski K. and A. Cornejo-Rodriguez, "Ronchi Test with Daylight Illumination," *Appl. Opt.*, **25**, 2031–2032 (1986b).

Patorski, K. and L. Salbut, "Reversed Path Ronchi Test," *Optica Appl.*, **15**, 261 (1984).

Phillips F. W., "Aspherizing and Other Problems in Making Maksutov Telescopes," *Sky Telesc.*, **25**, 110 (1963).

Popov G. M., "Methods of Calculation and Testing of Ritcliey-Chrêtien Systems," *Izv. Krym. Astrofiz. Obs.*, **45**, 188 (1972).

Porter R. W., "Notes on the Ronchi Band Patterns," in: *Amateur Telescope Making*, vol. 1, A. G. Ingalls, Ed., Scientific American, New York 1953, p. 268.

Rank D. H., P. R. Yoder Jr., and J. Vrabel, "Sensitivity of a Rapid Test for High Speed Parabolic Mirrors," *J. Opt. Soc. Am.*, **39**, 36–38 (1949).

Rayces J. L., "Exact Relation Between Wave Aberration and Ray Abberation," *Opt. Acta*, **11**, 85–88 (1964).

Ricci E., "Nuovi Criteri per la Misura dell'Aberrazione Sferice di un Sistema Ottico; col. Metodo delle Frange d'Ombra," *Ottica*, **4**, 104 (1939).

Ronchi V., "Le Frange di Combinazioni Nello Studio delle Superficie e dei Sistemi Ottici," *Riv. Ottica Mecc. Precis.*, **2**, 9 (1923a).

Ronchi V., "Due Nuovi Metodi per lo Studio delle Superficie e dei Sistemi Ottici," *Ann. Sc. Norm. Super Pisa.*, **15**, (1923b).

Ronchi V., "Sopra la Caratteristiche dei Cannocchiali di Galileo e la Loro Autenticita," *Rend. Accad. Naz. Lincei.*, **2**, 162 (1923c).

Ronchi V., "Sopra i Cannocchiali di Galileo e Sopra una Lente di Evangelista Torricelli," *L'Universo*, **4**, 10 (1923d).

Ronchi V., "Sullo Studio dei Sistemi Ottici col Biprisma e Gli Specchi del," *Ren. Accad. Naz. Lincei.*, **3**, 314 (1924a).

Ronchi V., "Ancora sull'Impiego dei Reticoli Nelo Studio dei Sistemi Ottici," *Nuovo Cimento*, **1**, 209 (1924b).

Ronchi V., *La Prova dei Sistemi ottici*, Zanichelli, Bologna, 1925.

Ronchi V., "Sur la Nature Interferentielle des Franges d'Ombre dans l'Essai des Sistemes Optiques," *Rev. Opt.*, **5**, 441 (1926a).

Ronchi V., "Uber die Schattenstreifen zum Studium der Lichtwellen," *Zt. Instrumentenkd*, **46**, 553 (1926b).

Ronchi V., "Sul Comportamento e l'Impiengo delle Frange d'Ombra Nella Prova dei Systemes Optiques," *Nuovo Cimento*, **4**, 297 (1927).

Ronchi V., "Sul Comportamento e l'Impiengo delle Frange d'Ombra nella Prova dei Systemes Optiques," *Rev. Opt.*, **7**, 49 (1928).

Ronchi V., "Le Frange d'Ombra Nello Studio delle Aberrazioni Spheriche," *Rend. Accad. Naz. Lincei.*, **11**, 998 (1930).

Ronchi V., "Sulla Sensibilita delle Frange d'Ombra all Aberrazione Sferica," *Ottica*, **5**, 275 (1940).

Ronchi V., *Corso di Ottica Tecnica*, 2nd ed. Associacione Ottica Italiana, Firenze, 1954.

Ronchi V., "An Elementary Introduction to the Use of the Grating Interferometer," *Atti. Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica*, **13**, 368–403 (1958).

Ronchi V., "Forty Years of Gratings," *Atti. Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica*, **17**, 93–143 (1962a).

Ronchi V., "Forty Years of Gratings," *Atti. Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica*, **17**, 240–251 (1962b).

Ronchi V., "Forty Years of History of a Grating Interferometer," *Appl. Opt.*, **3**, 437–451 (1964).

Ronchi V., "On the Phase Grating Interferometer," *Appl. Opt.*, **4**, 1041–1042 (1965).

Rosenbruch K. J., "Testing of Optical Components and Systems," *J. Optics (India)*, **14**, 23–43 (1985).

Royo S., J. Arasa, and C. Pizarro, "Profilometry of Toroidal Surfaces with an Improved Ronchi Test," *Appl. Opt.*, **39**, 5721–5731 (2000).

Salzmann H., "A Simple Interferometer Based on the Ronchi Test," *Appl. Opt.*, **9**, 1943–1944 (1970).

Scandone F., "Sulla Forma delle Frange d'Ombra Dovute ad Onie Luminose Affette da Aberrazione Zonale," *Nuovo Cimento*, **7**, 289 (1930).

Scandone F., "Sulla Forma delle Frange d'Ombra Dovute ad Onlde Luminose Affette de Aberrazione Estrassiale," *Nuovo Cimento*, **8**, 157 (1931a).

Scandone F., "Sulla Forma delle Frange d'Ombra Estrassiale Ottenute con un Reticolo a Tratti Inclinati sul Piano de Simmetria del Sistema Ottico," *Nuovo Cimento*, **8**, 310 (1931b).

Scandone F., "Sulla Forma delle Frange d'Ombra Ottenute con Reticolo Circolari a Frequenza Costante," *Nuovo Cimento*, **8**, 378 (1931c).

Scandone F., "Sulla Forma delle Frange d'Ombra Ottenute con Reticolo Circolari a Frequenza Costante non Centrato sull'Asse Ottico," *Boll. Assoc. Ottica Ital.*, **6**, 35 (1932).

Scandone F., "Sulla Frange d'Ombra Estrassiali Ottenute con Reticoli in Presenza di Aberrazione Sferica sull'Asse," *Boll. Assoc. Ottica Ital.*, **7**, 100 (1933).

Schreiber H. and J. Schwider, "Lateral Shearing Interferometer Based in Two Ronchi Phase Gratings in Series," *Appl. Opt.*, **36**, 5321–5324 (1997).

Schulz L. G., "Uber die Prufung Optischer Systeme mit Rastein," *Ann. Phys.*, **35**, 189 (1928).

Schulz L. G., "Preparation of Aspherical Refracting Optical Surfaces by an Evaporation

Technique," *J. Opt. Soc. Am.*, **38**, 432–441 (1948).

Schwider J., "Single Sideband Ronchi Test," *Appl. Opt.*, **20**, 2635–2642 (1981).

Seiichi O. and T. Nomura, "High-Precision Analysis of a Lateral Shearing Interferogram by Use of the Integration Method and Polynomials," *Appl. Opt.*, **39**, 5179–5186 (2000).

Servin M., D. Malacara, and F. J. Cuevas, "Direct-Phase Detection of Modulated Ronchi Rulings Using a Phase-Locked Loop," *Opt. Eng.*, **33**, 1193–1199 (1994).

Sherwood A. A., "A Quantitative Analysis of the Ronchi' Test in Term of Ray Optics," *J. Br. Astron. Assoc*, **68**, 180 (1958).

Sherwood A. A., "Ronchi Test Charts for Parabolic Mirrors," *J. Proc. R. Soc. New South Wales*, **43**, 19 (1959); reprinted in *Atti. Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica*, **15**, 340–346 (1960).

Silva D. E., "Talbot Interferometer for Radial and Lateral Derivatives," *Appl. Opt.*, **11**, 2613–2624 (1972).

Sirohi R. S., T. Eiju, and K. Matsuda, "Multiple Beam Lateral Shear Interferometer for Optical Testing," *Appl. Opt.*, **34**, 2864–2870 (1995).

Steig H., "More on Ronchi Gratings," in: *Advanced Telescope Techniques, vol. 1: Optics*, A. Mackintosh, Ed., Willmann-Bell, Inc., Richmond VA, 1987, p. 46.

Stoltzmann D. E., "Application of Ronchi Interferometry to Tssting Large Aperture Flat Mirrors," *Proc. SPIE*, **153**, 68–75 (1978).

Strong J., *Procedure in Experimental Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983, Chap. 11.

Talbot F., "Facts Relating to Optical Science No. IV," *Philos Mag.*, **9**, 401 (1836).

Thompson B. J., Studies in Optics, Technical Report, U.S. AFAL-TR-73-112, U.S. Government, Washington, D.C. 1973.

Thompson E. T., "Making Ronchi Gratings," in *Advanced Telescope Techniques, vol. 1: Optics*, A. Mackintosh, Ed., Willmann-Bell, Inc., Richmond, VA, 1987, p. 45.

Toraldo di Francia G., "Sulla Frange d'Interferenza delle Onde Aberranti," *Ottica*, **6**, 151 (1941a).

Toraldo di Francia G., "Saggio di una Teoria Generate dei Reticoli," *Ottica*, **6**, 258 (1941b).

Toraldo di Francia G., "Limiti di Validita dell'Ipotesi della Rotazione Rigida per il Reticolo Rettilineo," *Ottica*, **7**, 282 (1942a).

Toraldo di Francia G., "La Prova dell'Aberrazione Cromatica con l'Interferometro a Reticolo," *Ottica*, **7**, 302 (1942b).

Toraldo di Francia G., "Ancora su le Aberrazioni delle Onde Diffratte dial Reticolo Rettilineo," *Ottica*, **8**, 1 (1943a).

Toraldo di Francia G., "La Formula Esatta per le Frange del'Interferometro Ronchi," *Ottica*, **8**, 225 (1943b).

Toraldo di Francia G., "Introduzione alla Teoria Geometrica e Interferanziale delle Onde Aberranti," *Atti. Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica*, **1**, 122–138 (1946).

Toraldo di Francia G., "Introduzione alla Teoria Geometrica e Interferanziale delle Onde Aberranti," *Atti. Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica*, **2**, 25–42 (1947).

Toraldo di Francia G., "Geometrical and Interferential Aspects of the Ronchi Test," in: *Optical Image Evaluation*, Nat. Bur. Stand. U.S. Circ. No. 256, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1954, Chap. 11, p. 161.

Van Brog. H., "Zernike Polynomials as a Basis for Wavefront Fitting in Lateral Shearing Interferometry," *Appl. Opt.*, **36**, 2778–2790 (1987).

Van Brug H., "Zernike Polynomials as a Basic for Wavefront Fitting in Lateral Shearing Interferometry," *Appl. Opt.*, **36**, 2788–2790 (1997).

Villani F., "Sulla Misurazione dell'Astigmatismo e del Coma Mediarue le Frange d'Ombra," *Nuovo Cimento*, **7**, 248 (1930).

Villani F. and R. Bruscaglioni, "Sulla Forma delle Frange d'Ombra ottenute de Onde Affette da Astigmatismo e Coma," *Nuovo Cimento*, **9**, 1 (1932).

Vogl G., "A Phase Grating Interferometer," *Appl. Opt.*, **3**, 1089 (1964).

Waland R. L., "Note on Figuring Schmidt Correcting Lenses," *J. Sci. Instrum.*, **15**, 339 (1938).

Wan D. S. and D. T. Lin, "Ronchi Test and a New Phase Reduction Algorithm," *Appl. Opt.*, **29**, 3255–3265 (1990).

Wan D. S. and D. T. Lin, "Ronchi Test and a New Phase Reduction Algorithm," *Appl. Opt.*, **29**, 3555–3565 (1990).

Wan D.-S. and M.-W. Chang, "Effect of Grating Spacing on the Ronchi Test," *Opt. Eng.*, **32**, 1084–1090 (1993).

Wehn R., "Die Methode der Ronchi-Gitter in der Praxis," *Atti. Fond. Giorgio Ronchi Contrib. Ist. Naz. Ottica*, **17**, 39–96 (1962).

Xu Y., O. Sasaki, and T. Susuki, "Double Grating Interferometer for Measurement of Cylinder Diameters," *Appl. Opt.*, **43**, 537–541 (2004).

Yatagai T., "Fringe Scanning Ronchi Test for Aspherical Surfaces," *Appl. Opt.*, **23**, 3676–3679 (1984).

Yokoseki S. and T. Susuki, "Shearing Interferometer Using the Grating as the Beam Splitter," *Appl. Opt.*, **10**, 1575–1580 (1971a).

Yokoseki S. and T. Susuki, "Shearing Interferometer Using the Grating as the Beam Splitter. Part 2," *Appl. Opt.*, **10**, 1690–1693 (1971b).

Yoder P. R., Jr., "Further Analysis of the 'Lower' Test for High-Speed Parabolic Mirrors," *J. Opt. Soc. Am.*, **49**, 439–440 (1959).

第10章 哈特曼光阑检验、哈特曼-夏克光阑检验及其他光阑检验

D. 马拉卡拉-督博拉度（D. Malacara-Doblado） I. 果兹尔（I. Ghozeil）

10.1 引言

本章由作者重新改写和调整，其中也包括一些以前版本本章的内容。哈特曼检验与朗奇检验和横向剪切干涉类似，它测量的是波面斜率，而不是像特怀曼-格林和菲佐干涉仪那样测量光程差。一次非常大的波前形变在扩展部分较大时可能会引起较小的斜率变化。在相似的情况下，小的波前形变在扩展部分较小时可能会引起较大的斜率变化。然而，由于大多数情况下，我们的最终目标是恢复波前面形，这只能从斜率测量结果中获得。这些斜率是通过利用几何光学途径在焦平面附近的一些观测平面位置测量横向偏差而得到的。

本章主要介绍了通过使用这种光阑对波面或反射镜表面取样的方法及相似的方法，还包括这些方法的应用以及各种光阑检验之间的优缺点比较。虽然这里介绍的方法适用于大多数透镜系统，但本章主要是介绍有关大口径凹面镜的检验，也是这类方法用得最多的地方。

哈特曼检验是由哈特曼（Hartmanm，1900、1904 a、b、c）通过检验位于波茨坦的大型折射望远镜而发现的，其检验光路如图10.1所示，它利用眼睛前方带有两个孔的光阑测量眼睛的屈光缺陷，之前曾由特西宁（Tscherning，1894）在1894年描述过。它采用一个被放在靠近待检系统的入射或者出射光瞳位置的孔阵列光阑。最常见的光阑是包含一个矩形阵列且其中一个位于中心孔位置，哈特曼光阑位于镜面表面的哈特曼透视图如图10.2所示。

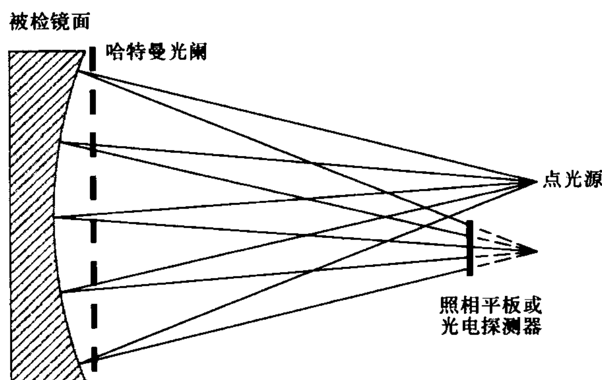


图10.1 凹面镜的哈特曼检验光路

哈特曼检验中波面和光线如图10.3所示，波前形变量 $W(x, y)$ 是通过计算横向偏差 TA_x 和 TA_y 的测量结果而得到的，TA_x 和 TA_y 通过下面的表达式相关联

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial x} = -\frac{TA_x(x,y)}{r} \tag{10.1}$$

和

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial x} = -\frac{TA_y(x,y)}{r} \tag{10.2}$$

式中，r 为波面的光瞳到哈特曼平板的大概距离。

如果波面是会聚的，如图10.3所示，哈特曼平板接近会聚点，则 r 为波前曲率半径。

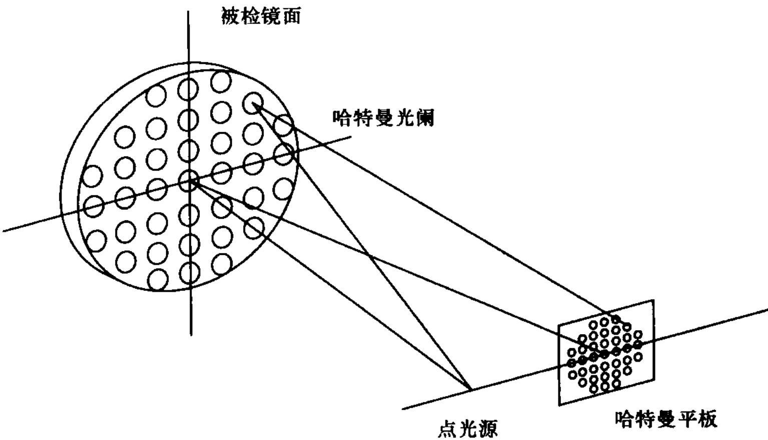


图10.2 哈特曼光阑位于镜面表面的哈特曼透视图

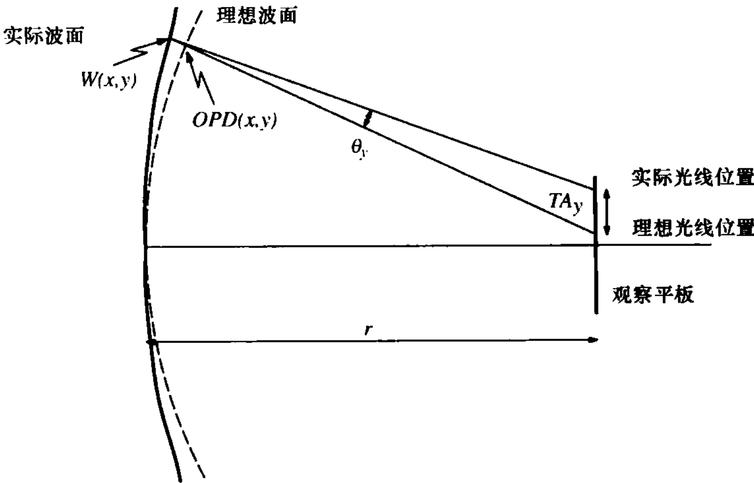


图10.3 哈特曼检验中波面和光线

哈特曼图形与点列图一样，都是从镜头设计的评价中获得的，正如斯特夫柔兹和苏童（Stavroudis and Sutton，1965）所指出。当测量一个波面时，如果所使用的测试程序可以通

过几种独立的方式得出给定结果，那么就能够减小误差。有一种测试模式容许在采样点通过几种不同的方式获取表面偏差，与缺乏这种功能的模式相比，它很有可能给出一个更接近实际偏差值的近似值。

10.2 实例

光阑一定要准确地放在测试镜孔径的中心。在存在球差的情况下尤其要做到这一点，这是为了预防在非球面反射镜的曲率中心对其进行测量。在此情况下的离轴屏将导致明显的彗差出现，如兰德格瑞夫和莫雅（Landgrave and Moya，1986）所述。他们提出了具有不同 F 数的抛物镜的检验结果。

把光阑放在反射镜上并对准中心之后，在拍摄照片之前，还必须对通过光栅照明反射镜并与反射镜相对的点光源进行适当的对中调整，以免产生离轴像差。如果光源罩的大小刚好容许靠近反射镜中心的反射光通过，则上述调整并不困难。如果设备不够完善，可以通过观测判断光源罩与光束之间的间隙是否相等的办法来使光源对中。

在测试反射镜中使用一个精心设计的支持系统非常重要：仅允许在反射镜的实际使用中出现变形。马尔福克（Malvick，1972）描述了一些具有多种功效的支持系统。

为了方便起见，把点光源放在偏离曲率中心而靠近反射镜一边的位置上。这样放置光源能使共轭像落在曲率中心之外，并且可以截取焦点内和焦点外的会聚光线而不遮挡照明光束。这里所说的焦点是指点光源的共轭像点。一般情况下，反射镜的像差不像球面镜的像差那么大。为了便于在哈特曼照相底片上识别暗斑点，需要把照相底片放在焦散极限之外。光源可以用任何暗淡的或者特意使其暗淡的光源，这样可以使曝光时间放长些，以免造成底片或者探测器曝光过度。根据光源的亮度，将曝光时间选在 90～180s 之间，这样就足以把随机气流的影响平均掉。

照相底片或探测器应严格垂直于光轴放置，否则在数据数据处理时反射镜会出现虚假的像散。有几种方法能精确地调整平面支架的方向。直接的办法是在支架上放置光滑玻璃镜面，其中心有一个叉丝；然后，通过对准望远镜，镜中的一片区域能够通过镜面中心观察到。首先将对准望远镜与镜面对准，随后通过倾斜支架就能使从玻璃镜面返回来的像处于中心位置。

光阑和光源位置调好后，通常在光源与其共轭像之间的某一位置拍摄一幅或多幅照片。用一台 x-y 显微密度计可以精确地测定照相底片上拍下的光斑位置。一般说来，光斑位置测量误差小于 0.003mm（0.00012in）。这项误差值对曲率半径为 21.3m（840in）的反射镜来说就相当于表面倾斜误差为 0.015 弧度，如同用 4m 主镜时的情况。这一测量步骤是这种检验方法的几个关键环节之一。把照相底片放在显微密度计中测量时，必须使显微密度计上的两根互相垂直的十字线显现在观察屏上，通过观测屏也可以看到照相底片。这些十字线正对着与矩形列阵光阑内相互垂直的孔相对应的两行光斑，两行光斑在观测屏的中心位置交叉。除非被检反射镜的质量非常好，否则这一行一行的光斑不会排成一条直线。通过缓慢地转动和移动底片直至偏差最小，就可以使底片对准十字线。当反射镜接近完善时，由于光斑排列得非常整齐，检验起来也就很容易。

一般来说，如果实际光斑图较大，比如说约 60mm，那么底片与十字线互相对准后可能还存在小于 30arcsec 的转角误差。这一误差对于检验结果的影响很小，这可以通过

对同一张底片以稍有不同的对准标准进行反复测量而得到证实。如果引入约0.5°～1′的总误差，那么最后的数据简化就会给出一定程度的像散，表面形状也会呈现出马鞍形的外观。

在屏检验中的一个重要假设就是，样本之间波面上各点之间的变化是逐步的而不是突变的。这是一种比较保险的假设，因为波面变换可以用其他检验手段，例如用傅式刀口法很容易地检验出来，并且原则上能考虑或估计到是否存在这种情况。因此，当反射镜表面变得比较平坦时，光阑检验法所得到的结果更能反映实际表面的性质。之所以要作这种假定是因为每个取样点都要参与镜面上某一区域内的平均倾斜。要采用平均倾斜的方法就必须假设表面是光滑的。如上所述，如果采用多项式拟合，这一假定条件也是必需的。

此外，假定反射镜和记录平面间的空气湍流在大小和方向方面是随机的。影响结果的主要湍流环境是一个空气薄层上升或下降的情况。这种湍流会均匀地使光线在许多小孔处发生偏移，并且使检验结果形成有规律的偏差。通常，这种情况只是小规模地存在，而且很难检验到它们。

这类湍流的常见来源就是整个测试光束宽度上的热不平衡。典型的情况是：在整个光程都存在热梯度时测试水平光轴；当没有充分控制其温度时，测试区域的顶层和底部都会有湍流。如果空气达到稳定状态，就会出现分层的结果，底部为最冷最密层，顶部为最热最轻层。空气密度梯度也是折射率梯度，在底部折射率最大而在顶部最小。虽然这不是通常意义上的湍流，然而，当测试系统可能不具有这类畸变时，它会导致像散波前。像散方向与垂直轴是一致的，由于局部重力梯度会使这些光学元件进行自重偏转，当由像散引起的光学元件下垂处于意料之中时，像散可能会造成更进一步的模糊。

当测试是在垂直光轴靠近建筑物外墙的情况下进行时，另一个典型的热梯度情况会出现。在这种情况下，如果墙是暖的，烟囱效应可能发生，显然这是不期望的。类似地，如果墙是冷的，冷空气级联也将会对测试造成影响。在这种环境下建立测试，适当的绝缘和热控护理是必需的设计标准。

10.3　矩形光阑的哈特曼检验

出射光瞳波面与哈特曼平板的距离为r，横向线性偏差为TA_x和TA_y。因此，通过在哈特曼平板位置集成测得的横向偏差就可以计算出波前。

为了充分识别哈特曼平板内的光斑，必须将平板置于偏离焦点的位置，通常是置于焦距以内，这样光束便不会通过哈特曼平板。也就是说，如果波面存在球差，必须将哈特曼平板置于离焦区域以外。

正如果兹尔在先前版本的本章中指出，R. V. 夏克（R. V. Shack）在私人通信中就曾经提出过采用矩形列阵光阑的建议，并且已经用于许多大型望远镜主镜的检验，其中包括美国基特峰国家天文台的第一台4m（158in）直径的天文望远镜（Simmon and Ghozeil，1971；Ghozeil and Simmons，1974），在格鲁伯·帕森斯检验的直径3.8m（149in）的英澳天文望远镜（Gascoigne，私人通信，1972），美国基特峰国家天文台为塞罗·托洛洛美洲国家天文台制造的第二台4m（158in）天文望远镜（Ghozeil，1974），美国亚利桑那大学

光学中心为伊拉尼·杜庞特天文台制造的2.6m（101in）天文望远镜（Ruda，私人通信，1975），以及目前加拿大米尼昂天体物理天文台正在为加拿大—法国—夏威夷天文台制造的3.6m（144in）天文望远镜（Dancey，私人通信，1975）。矩形列阵不仅可以对表面均匀取样，而且在一定程度上没有圆对称的问题。因此毋需对检验误差的分布和对称性作任何假设，并且消除了产生人为圆误差的可能性。此外，用这种方法能够得到一个比用径向光阑或螺旋状光阑高得多的取样频率。用这种方法的检验可以避免随机气流的影响，而且可以在插入或不插入辅助光学系统的情况下进行检验，例如零位补偿透镜的检验。最好采用除空气之外不加入任何辅助系统的方式，这样可以避免由于加入辅助系统而带来的混杂对准和表面误差的影响。

由于反射镜几乎是完美无缺的，所以需要更详细、更可靠地反映被检表面。为此可以将几次检验到的结果进行叠加和平均，每次检验时将光阑相对于反射镜绕其中心转过一定的角度（Ghozeil，1974）。叠加工作可以用数字式电子计算机完成，或者通过照相方式以底片上的相应密度表示不同的表面偏差而完成。从各个区域的单独检验而得到的面形偏差可用于求出所有这些区域的新平均值。这种组合检验法能够给出不确定性低于0.05个波长的面形偏差。用这种方法所获得的检验结果给出了用刀口检验法可以观察到的不太明显的微小表面缺陷，而且同时揭示整个表面上缓慢变化的不对称缺陷。

上述方法与其他光阑检验法一样，都不能够检验出光阑上小孔之间存在的微小表面变化。然而，正如果兹尔（Gozheil，1974）所指出的，这种检验方法（可能还有螺旋形光阑法）可以揭示小范围的带区，通过对同等条件下同一反射镜的几组检验结果进行综合即可，但需要将光阑相对于被检镜面转过一定的角度。

光阑放置于靠近镜子，如图10.4所示，此光阑是用来检验两块直径为2.1m主镜，由墨西哥国家天体物理学、光学和电子学院（INAOE墨西哥）研制。此光阑一共有341个小孔，且有支撑结构以防止其弯曲。2.1m主镜的哈特曼成像光斑图如图10.5所示。

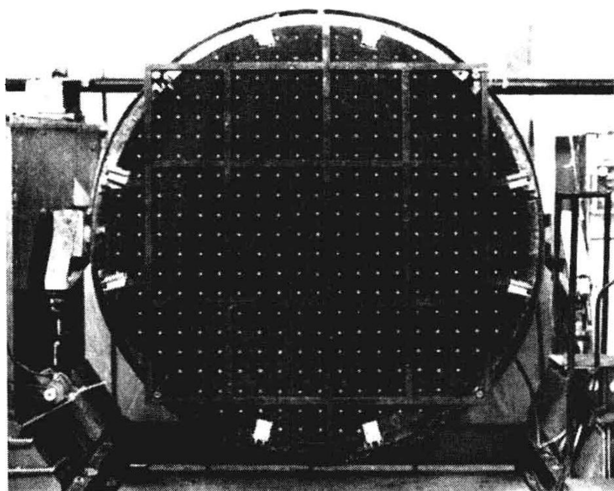


图10.4　2.1m主镜检验的哈特曼光阑

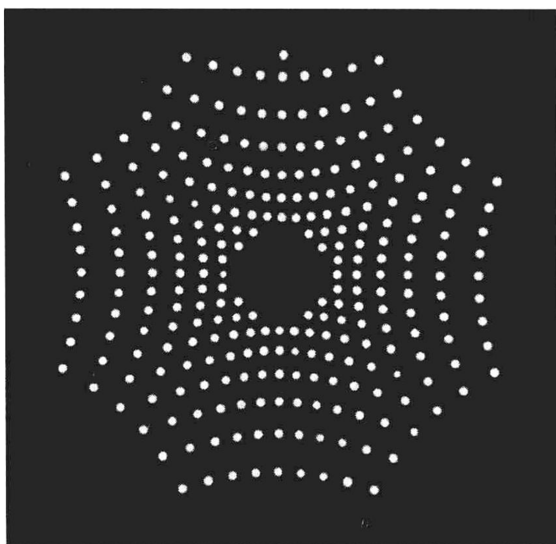


图10.5　2.1m主镜的哈特曼成像光斑图

10.4　波面恢复

几种积分方法可用来得到更可靠的结果，如

1）众所周知的梯度积分法。在大多数情况下满足梯形规则。

2）Southwell积分算法。

3）波面多项式拟合。

4）其他方法。

10.4.1　去倾斜与离焦

整个哈特曼图案的任何潜在侧向位移都有可能在恢复波前中引入倾斜，必须将其从数据中除去。为此，需要寻找测得点位置的重心，以作为数据处理中的坐标原点。其具体做法是先分别求出所有测得光斑位置 x 和 y 的平均值，然后再从测量结果中减去这些平均值。之所以这样做是因为底片和反射镜光轴的交点位置是未知的，而求重心是确定此交点位置的最好方法。以随机或对称方式发生的表面变形将造成一组斑点的出现，其重心对应于光轴和底片的交点位置。

哈特曼测试中必要的大型离焦会在横向畸变上生成大的线性分量，这相当于波前中大的二次分量。为了大大降低散焦的影响，必须获得与理想哈特曼图案中具有相同散焦的斑点相对应的横向畸变。理想情况下，必须获得具有相同线性系数的一对线性表达式与两个测得横向畸变的最小二乘拟合。对于给定的光斑，带有倾斜和离焦的理想横向畸变 Δx 和 Δy 可以写作

$$\Delta x_m = A_x + Bx_m$$
$$\Delta y_m = A_y + By_m \tag{10.3}$$

式中，A_x，A_y 和 B 为常量；x 和 y 为哈特曼光阑相应光孔上的测量值。

基于哈特曼光阑是对称的事实，此过程可以分为两个步骤。那么，对于孔的每个 x 坐标，有一个负的对应点。因此，对所有 x 求和就简化为零。这样质心可以写成

$$A_x = \frac{\sum_{m=1}^{N} \Delta x_m}{N}$$

$$A_y = \frac{\sum_{m=1}^{N} \Delta y_m}{N} \tag{10.4}$$

式中，N 为被求和的光孔数量。

将质心确定为所使用的坐标系的原点之后，必须计算离焦图案的理想位置。离焦会导致光线交点的径向线性偏离。因此，通过减去由二维线性最小二乘法拟合方法计算出的线性项，剩余的偏移可以带来最佳的聚焦。质心（或倾斜）和去离焦都可以用最小二乘法进行

$$B = \frac{\sum_{m=1}^{N} x_m(\Delta x_m) + \sum_{m=1}^{N} y_m(\Delta x_m)}{\sum_{m=1}^{N} x_m^2 + \sum_{m=1}^{N} y_m^2} \tag{10.5}$$

一旦发现常量，在最佳焦点处的残值可以通过在测量值 TA_x 和 TA_y 减去 Δx_m 而得到，如图 10.6b 所示。从而得到

$$TA_{x\,m} = TA_{x\,m\,measured} - \Delta x_m \tag{10.6}$$

式中，$TA_{x\,m}$为修正值。

新的横向偏差值可用于获取由测试镜返回的光波能量分布的估计值。这是通过计算距离坐标原点为 $r = \sqrt{TA_{x\,m}^2 + TA_{y\,m}^2}$的点的数量来完成。如果测试是在曲率中心进行，而且焦点位置的能量分布是适宜的，那么就可以将余值除去一半。这种分割很近似于引入小误差，相当于$f/2.7$ 的反射镜边缘位置低于 0.05 个波长的表面变形。值得一提的是这种光能分布是从几何光学角度考虑的，而且反射镜得到的实际图像会受到衍射的影响。一般来说，其影响结果往往在图像的中心位置形成更高能量的集中带。

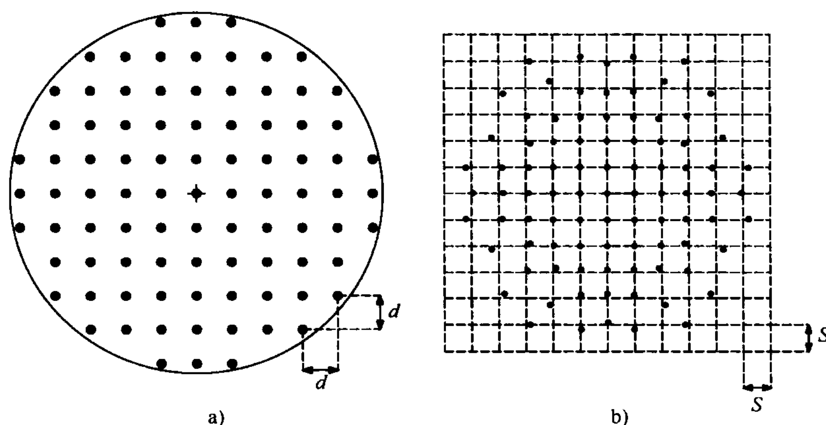


图 10.6 矩形孔阵列示意图和哈特曼光阑上标记点的位置

（虚线表示的矩形阵列代表理想的非球面镜的点的位置）

a）哈特曼光阑 b）哈特曼平板

如果波前是高陡度非球面的，在恢复波面之前也很容易除去非球面分量。这可以由两种不同的方法来实现，即通过三次横向偏差函数的最小二乘法拟合表示第一级球差，或者采用每个点新确立的坐标 x 和 y 之间的差值，并求出预计来自标准反射镜的相应坐标。光斑的预期坐标可以从几何光线追踪或闭合式方程中得到，如第9章中式（9.22）（Malacara，1965）。

10.4.2　梯形积分法

这种波面恢复方法有时也称为分区方法，它在 TA 测量中采用线性近似，加入横向偏差的测量值直线梯形积分法如图10.7所示。波前的形状是连续的，由每个分块镜中带有常曲率的二阶分块镜合成。因而，如果波前是二次的，它仅在倾斜、离焦和散光存在时才会发生，梯形积分法就变得很准确。由式（10.1）和式（10.2），得到（为了简单化而忽略负号）

$$W(x,y) = \frac{1}{r}\int_0^x TA_x(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{10.7}$$

和

$$W(x,y) = \frac{1}{r}\int_0^y TA_y(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{10.8}$$

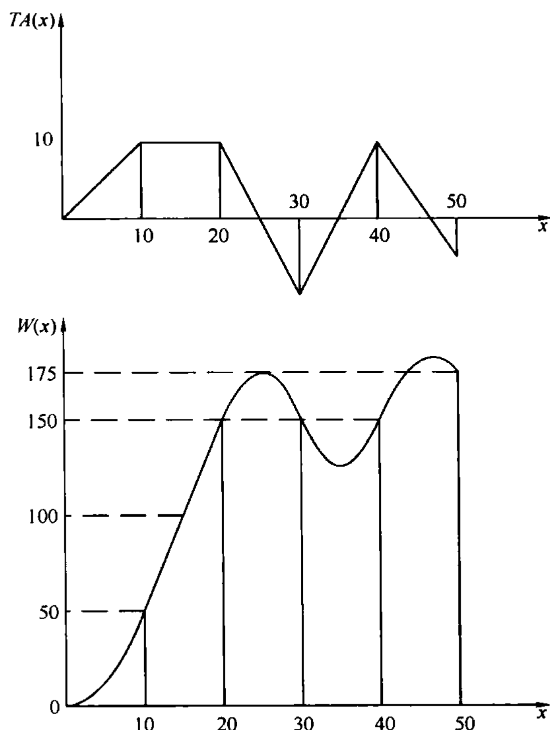


图10.7　加入横向偏差的测量值直线梯形积分法（波面用二次分段进行恢复，波面在测量点是连续的，而不是倾斜的波面）

由于仅在矩形阵列的点上进行测量，通过对式（10.1）和式（10.2）求一阶梯形积分就可以得出经典的哈特曼测试中的波前形状，沿 x 轴的公式为

$$W_{n,m} = W_{n-1,m} + \frac{d}{2r}[TA_x(n-1,m) + TA_x(n,m)] \tag{10.9}$$

沿 y 轴为

$$W_{n,m} = W_{n,m-1} + \frac{d}{2r}[TA_y(n,m-1) + TA_y(n,m)] \tag{10.10}$$

沿对角线为

$$W_{n,m} = W_{n-1,m-1} + \frac{d}{2r}[(TA_x(n-1,m-1) + TA_x(n,m-1)) + (TA_y(n,m-1) + TA_y(n,m))] \tag{10.11}$$

在这里，d 是哈特曼光阑上连续两个孔之间的距离。表达式用于计算哈特曼光阑上同一行的孔间的连续光斑，开始于 $W(0, m)$，$W(m, 0)$，$TA(0, m)$，而 $TA(n, 0)$ 等于零。然后，扫描新的一行，直到整个图案从几个方向被覆盖。以第一个点作为参考，这些表达式给出了任意点位（n，m）的表面偏差。

应该非常准确地放置哈特曼光阑上的孔，以避免在计算表面偏差的过程中引入误差。孔的直径应该小一些，但也不要太小，以至于相面上的衍射图像相互重叠，孔的尺寸应该足够小，以便可以精确测量所出现的波前偏差（Golden，1975；Vitrichenko et al.，1975；Morales and Malacara，1983）。

由于数值积分方法会累积固有的误差，必须得采取一些减少误差的办法。最好的办法是使用仅在某一点交叉的集成光路，这意味着要通过独立的方法获取所有位置的表面高度。另外，也可以沿着任何光路的某一方向及其反方向求积分，然后对所得的结果取平均值。

积分法中使用的方案遵循图 10.8 中所示的原理。首先，从 x 轴和 y 轴开始求和，把从通过所求点的其他坐标积分求得的值作为每次积分的起始值。因为通过 x 和 y 积分得到的面形偏差值在每一点上是相同的，所以用两次积分的平均值作为每一点最后结果。然后再进行反向光程求和，并与其对应的积分值求平均。

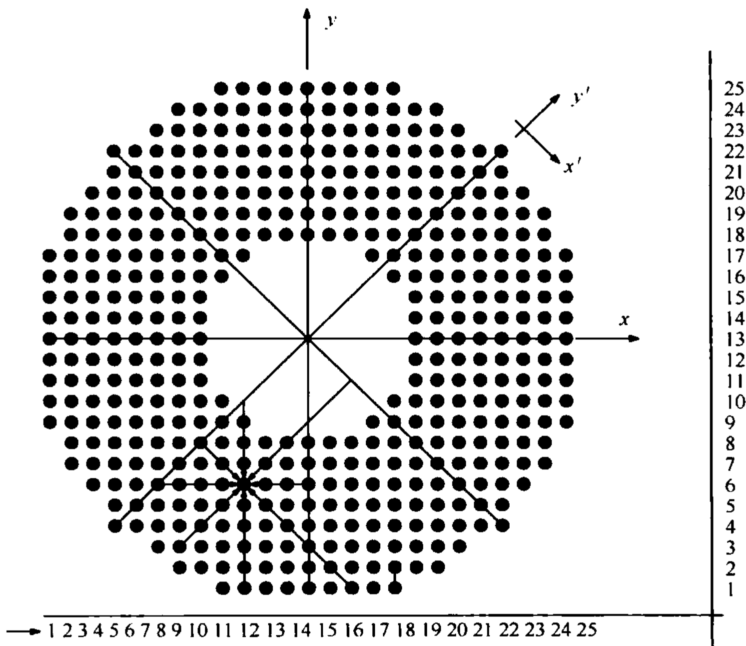


图 10.8 哈特曼屏上的孔（沿垂直线、水平线、±45°线的不同积分路径）

为了获得更高的精度，下一步可以将坐标轴绕原点旋转 45°，再用不同的孔间距和不同的积分路径重复整个积分过程。由于这些积分结果应该与第一种方案所获得的积分结果相同，所以每一点都取两次积分的平均值。这就意味着至少有四种方法获取每个表面的偏差值，且大多数是以八种方式获得的。这样的重复过程不但减小了误差的系统积累，而且还减小引入的伪误差。

为了进一步减少伪误差，可以按照上面这种方式测量和处理两张底片，并把两次检验结果加以平均。这降低了由反射镜和照相底片之间的不完善感光乳剂和非随机空气湍流引起的误差，同时也降低了测量误差。

10.4.3 索斯韦尔算法

索斯韦尔算法有时也称为索斯韦尔再现器，也是一种带状计算方法。当沿着两条不同的光路从一点到另一点进行线性积分时，两个结果可能由于以下几种因素的原因而存在微小的差别，如光斑位置中的测量误差、局部波前的球度偏差和数值误差。这种方法的理念就是：在计算所有光斑的波前变形的过程中，要将某些纵向和横向相邻光斑的波前变形考虑在内。

索斯韦尔（Southwell）提出了一种迭代求解法，该解法中任意点（n,m）的波前都是采用式（10.10）和式（10.11）对四个相邻的点求积分而得来的，一个在上面，一个在下面，一个位于左边，一个位于所涉及的点的右边，如图 10.9 所示。因此，最终值 $W_{m,n}$ 是四个值的平均值。为了简单标记，将 $S^x_{n-1,m}$ 定义为

$$S^x_{n-1,m}=\frac{d}{2r}[TA_x(n-1,m)+TA_x(n,m)] \tag{10.12}$$

因此，根据式（10.12），图 10.9 中四个相邻点的式（10.13）可以表示为

$$\begin{aligned}
W_{n,m}&=W_{n-1,m}+S^x_{n-1,m}\\
W_{n,m}&=W_{n+1,m}-S^x_{n+1,m}\\
W_{n,m}&=W_{n,m-1}+S^y_{n,m-1}\\
W_{n,m}&=W_{n,m+1}-S^y_{n,m+1}
\end{aligned} \tag{10.13}$$

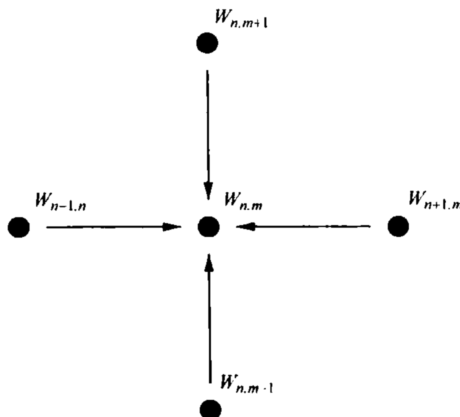


图 10.9　点（n，m）通过相邻点计算波面图

因此，四次测量的加权平均值为

$$W_{n,m}=\frac{(\sigma_{n-1,m}W_{n-1,m}+\sigma_{n+1,m}W_{n+1,m}+\sigma_{n,m-1}W_{n,m-1}+\sigma_{n,m+1}W_{n,m+1})}{(\sigma_{n-1,m}+\sigma_{n+1,m}+\sigma_{n,m-1}+\sigma_{n,m+1})}+\frac{(\sigma_{n-1,m}S^{x}_{n-1,m}-\sigma_{n-1,m}S^{x}_{n+1,m}+\sigma_{n,m-1}S^{y}_{n,m-1}-\sigma_{n,m+1}S^{y}_{n,m+1})}{(\sigma_{n-1,m}+\sigma_{n+1,m}+\sigma_{n,m-1}+\sigma_{n,m+1})} \tag{10.14}$$

式中，$\sigma_{n,m}$为所有光斑的权值因子。

式（10.14）可以通过方阵计算整个哈特曼光阑中所有点的数值。所有不存在或是位于哈特曼光阑以外的光斑的相应权值因子 σ 应该为零；当覆盖了所有光斑之后，进行第二次迭代，直到所完成的迭代次数等于光斑总数为止。

10.4.4 多项式拟合

也可以用多项式拟合的方法来表示镜面中所出现的斜率偏差变化。这种方法通常也称为模型方法，因为每个多项式分量都可以认为是一个模型。拟合必须满足一些判据，拟合和采样点之间应密切匹配。因此，与其利用倾斜平面求积分以获得表面偏差，不如在一个多项式上求积分（Cornejo and Malacara，1976）。因此，可以根据泽尼克多项式来表示波前。理论上讲这只是一种理想的方式，因为已经消除了由数值积分法引起的误差。问题在于获取一个好的多项式拟合。众所周知，可以通过消除相关明显特征或者在没有振荡时引入振荡的方式将误差引入这种拟合。第一种效应通常是由低阶多项式拟合造成的，第二种效应是高阶拟合造成的。毫无疑问，这将降低检验方法的可靠性，尤其在靠近镜面边缘的部分。

可以通过最小二乘法来进行多项式拟合，正如下面所描述的。假设可以通过某些多项式的线性组合表示波前，例如泽尼克多项式

$$W(x,y) = \sum_{n=0}^{N} A_n P_n \tag{10.15}$$

式中，N 为所使用的多项式数量；A_n 为线性组合的未知系数。

因此，由式（10.1）和式（10.2），可以重新简化公式

$$TA_x(x,y) = r\sum_{n=0}^{N} A_n \frac{\partial P_n}{\partial x} \tag{10.16}$$

和

$$TA_y(x,y) = r\sum_{n=0}^{N} A_n \frac{\partial P_n}{\partial y} \tag{10.17}$$

然后，可以对横向偏差的相应测量值和这些分析函数进行最小二乘法拟合。再通过多项式拟合，可以从中得到常见的畸变项，如彗差和色散。

10.4.5 其他方法

另外一种恢复波前的方法是利用二维快速傅里叶变换算法，这种方法在 1985 年曾由弗瑞斯拉德（Freischlad）和库里普洛斯（Koliopoulos）提出。这种方法的优势在于它对数据中的噪声不敏感，通常可被用来获取二维波前误差。同样，一些用于解调干涉图的方法也可以与哈特曼图案一起使用，如塞尔威恩等人（Servín et al.，1996、1999）所提出的方法。如果测量深度非球面波前时需要非线性近似，另一种方法是采用二维三次样条函数（Ahl-

berg et al. , 1967)。如果使用恰当，假设两个连续点之间横向畸变函数中的直线被二次曲线代替，这种拟合方法所给出的采样点之间的近似值比用梯形法所获得的值更接近于理论值。为了提高这种方法的测量结果，在对横向畸变求积分时，有必要根据理想非球面波前对其进行测量，而不是根据比较靠近的球面。

10.5 四孔光阑的哈特曼检验

有时并不需要知道详细的波前表面状况，而是仅需要测量一些主要的偏差。在这种情况下，可用系统光瞳边缘附近仅有的四个孔来进行哈特曼检验。如果只有四个孔，可以对来自每个孔的光进行两次测量，即 TA_x 和 TA_y。于是总共得到 8 个测量结果。最多可以确定 8 个畸变项，其中不能包括常数项和平移项。这些畸变可由式（10.18）表示

$$W(x,y)=Bx+Cy+D(x^2+y^2)+E(x^2-y^2)+Fxy+G(x^2+y^2)y+H(x^2+y^2)x \tag{10.18}$$

式中，B 为局部单元相对于 Y 轴的倾斜；C 为局部单元相对于 X 轴的倾斜；D 为离焦（局部单元球形畸变）；E 为在 0°或 90°的角度对于坐标轴的像散；F 为在 ±45°的角度对于坐标轴的像散；G 为沿 Y 轴的彗差；H 为沿 X 轴的彗差。

下一组畸变是两个以 X、Y 轴为基准的三角像散项，但是仅有 8 个测量结果是不能同时得到上述两项的，所以没有对其进行计算。

如果没有倾斜项和彗差项，则波前呈现超环面形状，其径向曲率可以表示为

$$c_r=[2D+(4E^2+F^2)^{1/2}]-2(4E^2+F^2)^{1/2}\sin^2(\theta-\alpha) \tag{10.19}$$

其中，第一项是球面造成的，第二项是带有为 α 的像散造成的。其中 α 表示为

$$\tan 2\alpha=\frac{F}{2E} \tag{10.20}$$

现在考虑由通过哈特曼光阑上四个孔的光束所产生的四个哈特曼光斑。然后，可以将横向偏差的 x 分量和 y 分量分别表示为

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}=\frac{TA_x}{r}=B+2Dx+2Ex+Fy+2Gxy+H(3x^2+y^2) \tag{10.21}$$

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial y}=\frac{TA_y}{r}=C+2Dy-2Ey+Fx+G(x^2+3y^2)+2Hxy \tag{10.22}$$

我们尚未涉及这四个孔的任何特殊构形。这四个孔可以位于 ±45°（X 形），或者 0°、90°、180°和 270°（十字交叉形），接下来的部分将会对此进行讨论。

10.5.1 呈十字形的四孔

现在将考虑四个孔的坐标情况，此种情况由马拉卡拉和马拉卡拉（Malacara and Malacara, 1992）所描述，如图 10.10a 所示，$\alpha(-d/2,0)$，$\beta(0,-d/2)$，$\gamma(-d/2,0)$ 和 $\delta(0,-d/2)$。

可以把式（10.21）和式（10.22）应用于四个孔，从而找到偏差系数，而且对于系数 G 和 H，通过取均值还能得到冗余信息；最终求出了正方形的所有偏差系数，由式（10.23）表示。

$$
\begin{aligned}
B &= -\frac{(TA_{x\alpha}+TA_{x\gamma})-3(TA_{x\beta}+TA_{x\delta})}{4r}\\
C &= -\frac{3(TA_{y\alpha}+TA_{x\gamma})-(TA_{y\beta}+TA_{y\delta})}{2r}\\
D &= -\frac{(TA_{x\alpha}-TA_{x\gamma})+(TA_{y\beta}-TA_{y\delta})}{4rd}\\
E &= -\frac{(TA_{x\alpha}-TA_{x\gamma})-(TA_{y\beta}-TA_{y\delta})}{4rd}\\
F &= -\frac{(TA_{y\alpha}-TA_{y\gamma})}{2rd}\\
G &= -\frac{(TA_{y\alpha}-TA_{y\gamma}-TA_{y\beta}-TA_{y\delta})}{2rd^2}\\
H &= \frac{(TA_{x\alpha}+TA_{x\gamma}-TA_{x\beta}-TA_{x\delta})}{rd^2}
\end{aligned}
\tag{10.23}
$$

图 10.11a 所示为一些主要偏差的典型图案。

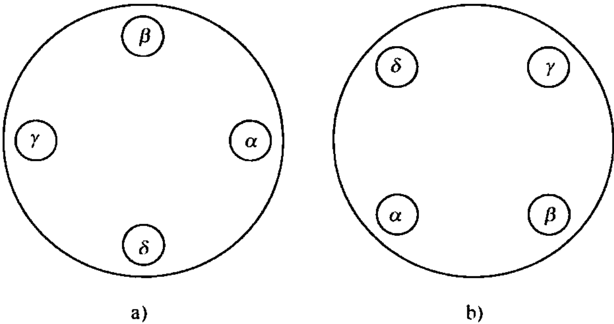


图 10.10 带有四个孔的两种哈特曼光阑

a）十字形 b）X 形

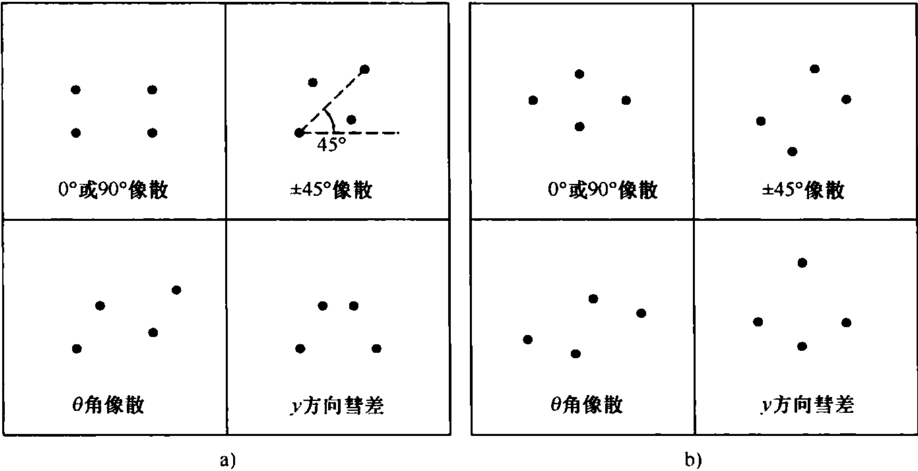


图 10.11 带有四个孔的哈特曼光阑的几种典型构形

a）四孔呈十字形 b）四孔呈 X 形

10.5.2　呈X形的四孔

现在考虑四个孔的如下坐标情况，此种情况由萨拉斯-配姆贝特（Salas Peimbertet, 2005）等人所描述，如图10.10b所示，$\alpha(-d/2,-d/2)$，$\beta(d/2,-d/2)$，$\gamma(-d/2,d/2)$和$\delta(d/2,d/2)$。采用与十字形四点案例类似的方法，可以求出

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{(TA_{x\alpha}+TA_{x\beta}+TA_{x\gamma}+TA_{x\delta})-2(TA_{y\alpha}+TA_{y\beta}+TA_{y\gamma}-TA_{y\delta})}{4r} \\
C &= \frac{(TA_{y\alpha}+TA_{y\beta}+TA_{y\gamma}+TA_{y\delta})-2(TA_{x\alpha}-TA_{x\beta}+TA_{x\gamma}-TA_{x\delta})}{4r} \\
D &= -\frac{(TA_{x\alpha}-TA_{x\beta}-TA_{x\gamma}+TA_{x\delta})+(TA_{y\alpha}+TA_{y\beta}-TA_{y\gamma}-TA_{y\delta})}{8rd} \\
E &= -\frac{(TA_{x\alpha}-TA_{x\beta}-TA_{x\gamma}+TA_{x\delta})-(TA_{y\alpha}-TA_{y\beta}-TA_{y\gamma}-TA_{y\delta})}{8rd} \\
F &= -\frac{(TA_{x\alpha}+TA_{x\beta}-TA_{x\gamma}-TA_{x\delta})}{2rd} \\
G &= \frac{(TA_{x\alpha}-TA_{x\beta}+TA_{x\gamma}-TA_{x\delta})}{2rd^2} \\
H &= \frac{(TA_{y\alpha}-TA_{y\beta}+TA_{y\gamma}+TA_{y\delta})}{2rd^2}
\end{aligned}
\qquad (10.24)
$$

图10.11b所示为一些主要偏差的几种典型图案。

10.6　眼镜的哈特曼检验

萨拉斯-配姆贝特等人（Salas-Peimbert et al.，2004）将哈特曼检验法应用到眼镜的测量和评价中。这些透镜可以有正焦距和负焦距。同样，所产生的波前可以是球形的、环面的，甚至是深度非球面，如渐变屈光度镜片。总之，如果用一束准直光照射它们，折射波前可以是收敛的或发散的、球面的或非球面的。

如果折射波前被投射到一个半透明的甚至比透镜大的扩散屏上，如图10.12所示，哈特曼图案可以由数字摄像机观察到并且进行数字化处理。借助这种方法，甚至可以测定镜片的屈光度，只需要测量镜片的顶点到观察屏的距离即可。

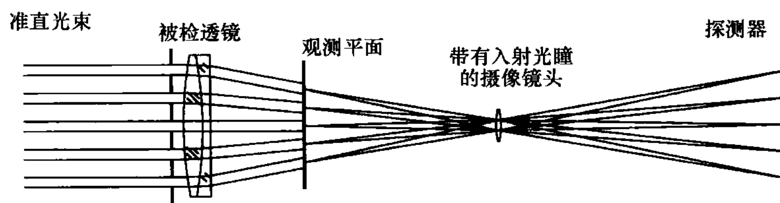


图10.12　投射到一个半透明的扩散屏上的哈特曼图案，这种图案由带有一个小孔的相机透镜观察到

相机透镜上大变形畸变的存在会对结果造成影响，但是在对处理哈特曼图案时，可以对该畸变进行数值补偿和消除。因此，需要通过观察位于所需观察距离的矩形阵列，来对相机

透镜进行预先校准。

10.7 采用非矩形光阑的哈特曼检验

多年来，在反射镜表面的检验中已使用了带有各种不同光孔图案的采样光阑。本节将讨论文献中提到的各种类型的光阑及其优缺点。虽然双透镜光阑的使用正在增长，但是我们仍然使用“小孔”作为简短术语，而不是后面所介绍的更具描述性的术语“采样孔径”。读者可以很明显地看出，在下面的章节中谈论双透镜光阑时，术语“小孔”就不再适用了。

为使用方便起见，最好是在光阑上再增加几个小孔，但这些小孔不要落在原有的小孔图案上。这些额外的小孔有助于光阑定位，并随之记录下光斑图案。传统方法使用照相底片来记录从光阑检验中得出的光斑的位置，并由此对这些底片上所记录的光斑位置进行测量。

10.7.1 哈特曼径向光阑

迄今为止，应用最普遍的光阑是呈径向图案分布的哈特曼径向光阑，如图 10.13 所示。这种光阑由哈特曼首先使用（Hartmann，1900、1904），后来其他许多光学检验人员也采用了与基本概念区别不大的这类光阑。本章后附有关于径向光阑检验法的文献索引。

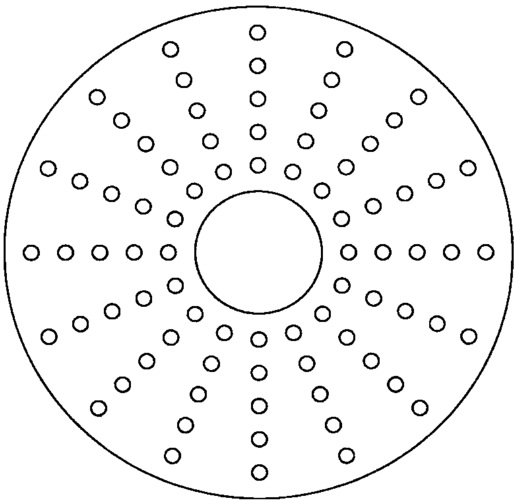


图 10.13 哈特曼径向光阑

径向光阑检验法的基本概念是采用一个带有许多小孔的不透明挡板对一个中心有圆孔的凹面镜表面上的点取样。不透明挡板上的小孔均匀分布在沿反射镜圆形孔径的各个直径方向上，如图 10.13 所示。选用这种形式的小孔分布有许多优点；首先圆形分布便于采用极坐标系进行分析计算；其次，小孔成网状分布的光阑能够检验出任何尺寸的反射镜表面上的常见缺陷——带区误差和中心“凸起”或者中心“凹陷”，其大小为几分之一微米的量级。这些缺陷是由于采用传统的研磨和抛光技术而产生的。因此，原则上，径向光阑最主要的优点在于能够提供探测主要明显表面缺陷用的简易分析测试。

事实上，径向光阑检验法有许多缺点。其中主要的一个缺点是，如果把光阑上的每个小

孔都看做是在与小孔的径向分布半径相等的环形上的区域取样，那么，离反射镜中心远的小孔，其取样面积必然比靠近反射镜中心的小孔的取样面积大。这样做就意味着很难了解到大部分聚光表面的情况，因此用其他方法检验不出的非对称缺陷，用这种方法可能也检验不到。另一个主要的缺点是某些缺陷的圆对称性，如果光阑上的小孔间距不是足够小的话，就不能将其检验出来。在表面推导的数据处理过程中，通常假设这些方法的缺点互相纠缠，即测出的斜率偏差是圆对称系统的一部分。利用小孔间距适度集中的径向光阑在多个直径上取样能够在一定程度上弥补上述缺点，因此在部分直径上靠近反射镜中心的位置没有小孔，以免这部分的小孔过于密集。关于对称性的假设也可以放弃。然而，如果把这些改进措施用于传统的检验方法中就会使数据处理变得不那么简单了。

哈特曼法的另一个问题是沿着圆路径积分时，积分误差会逐渐增大。关于这个问题将在下面介绍有关应用的一节中讲述。这种误差累积现象可以采用与矩形列阵光阑相类似的方法予以消除（Ghozeil and Simmons，1974），但仅适用于闭路积分的情况。

径向光阑能够在准直光路中，或者在点光源位于或靠近镜面近轴曲率中心位置的光路中检验凹面镜。前者适用于检验望远镜之类的系统，这时要求光阑或是紧靠镜面，或是远离镜面放置，这样能使反射光束在会聚之前不会再次投射到光阑上。在使用来自点光源的光线检验反射镜时，光阑也受到上述相同位置限制，并应尽量靠近反射镜。

在径向光阑检验法中，通常在两张底片上拍下由镜面反射的光线，这些光线通过光阑孔照到镜面上。一张底片可以放在光线的理论会聚点内侧，另一张底片则放在外侧，或者两张底片都放在同一侧。这样放置两张底片能够补偿底片的倾斜及光阑上小孔的间距误差。不必准确地知道记录平面反射镜的距离，除非要用最小二乘法重新确定焦点，因为这时底片间距是一个重要计算数据。

在把两张底片分别放在焦点内和焦点外的传统测试方法中，平均加权焦点位置

$$F_0 = \frac{\sum R_i F_i}{\sum R_i} \tag{10.25}$$

式中，F_i为由直径两端的某一对光阑孔发出的光线求出的任一侧的顶焦距；R_i为那一对光点所在区域的径向距离。

这些R_i值起着权重系数的作用。为了表示镜头所成像点的大小。哈特曼T准则表示如下

$$T = \frac{200\,000}{F_0^2} \frac{\sum R_i^2 |F_i - F_0|}{\sum R_i} \tag{10.26}$$

式（10.26）给出了弧秒单位大小的点图像。

把从一个径向光阑臂所获得的平均焦距与在另一个与之垂直的径向光阑臂上获得的平均焦距相比较，就能够估算出反射镜的像散。

如果光阑是已知的，则一次只需要照一张底片。例如在检验利克天文台的3m（120in）主镜时就采用这种方法（Mayall and Vasilevskis，1960）。如果需要测量照相底片上的许多点，那么这一改进将节省许多时间。

按照一般方法可以从测出的光点位置求出表面偏差。在传统检验中得到的只是被检表面的径向积分轮廓。最近，用径向和切向积分法得到的结果比只给出径向分布的方法更可靠（Mayall and Vasilevskis，1960；Schualte，1968，Vitichenko et al.，1975）。这两种积分模式

应该只相差一个常数，并且应该是一致的。实际上，由切向积分所造成的闭合误差累计无法通过一个简单的位移达到一致。如果在测定表面偏差的过程中新建一些方法以引入重复机制，那么这种检验方法将有所改进。

10.7.2 螺旋式光阑

在试图克服径向光阑缺点的过程中，使用了一种小孔位置呈螺旋状分布的光阑，并用这种光阑检验了利克天文台直径 3m（120in）的主镜（Mayall and Vasilevskis，1980）。图 10.14 所示为螺旋状光阑的一部分。虽然基本上是一个径向光阑图案，它与相同情况下的典型图案也有区别，因为沿着所有半径方向的光孔都相对于相邻半径作径向位移，以至于构成一个螺旋状图案，完整的螺旋状光阑如图 10.15 所示。

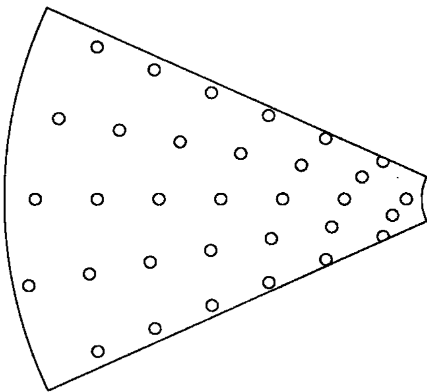


图 10.14 螺旋状光阑的一部分

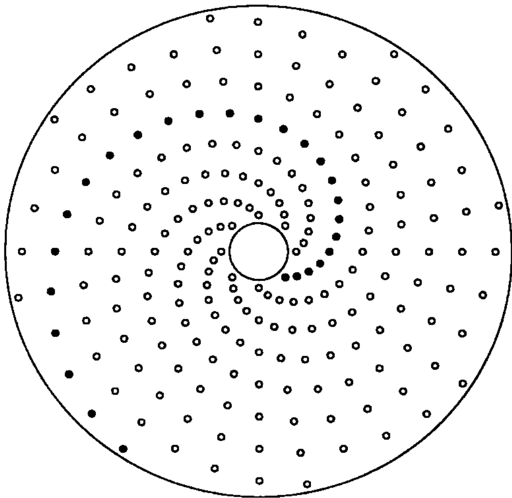


图 10.15 完整的螺旋状光阑

因此，选用这种形式的光阑能够克服典型光阑的一个缺点。然而，螺旋状光阑仍有取样面积不相等的缺点，而且镜面上取样最少的部分恰恰是一些实际使用中参与成像的主要部分。

螺旋状光阑扩大了径向和切向积分的应用范围。这就需要考虑到实际上镜面变形不仅引起径向倾斜，还会造成带有两个分量（Kingslake，1927、1928）的倾斜，这两个分量是由偏离理想镜面的非对称表面引起的。在将斜率与相对于光阑相邻径向臂作径向位移的采样孔关联时，会出现不少问题。数据处理所需的方法在这种光阑刚刚开始应用是就已经有文章进行了全面的报道（Mayall and Vasilevskis，1960）。

10.8 哈特曼-夏克检验

放弃了使用带有孔阵列的光阑的方法，代之以使用透镜状的光阑，这是帕拉特和夏克（Platt and Shack，1971）在 1971 年提出来的方法，如图 10.16 所示。这种方法与传统的哈特曼检验法相比有很细微但又非常重要的区别，例如：

1）传统检验方法中，哈特曼图案是由一束靠近焦点的汇聚光得到的，在哈特曼-夏克

传感器中则是在一束近乎准直的光束中进行检验。如果被测波前是汇聚的，则必须在传感器之前使用准直透镜。图10.17所示为两种可能的光路[⊖]。

2）哈特曼-夏克检验法的优点就是能够轻易检验并测量出正负离焦。

3）每个光斑单独的聚焦在探测器上，使光斑的光能量密度比传统哈特曼检验中的光能量密度高。

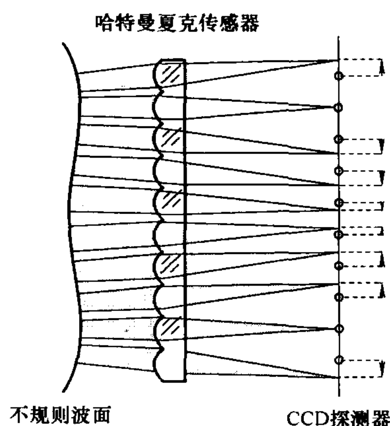


图10.16　用一个带有矩形小透镜阵列的板进行的哈特曼-夏克检验

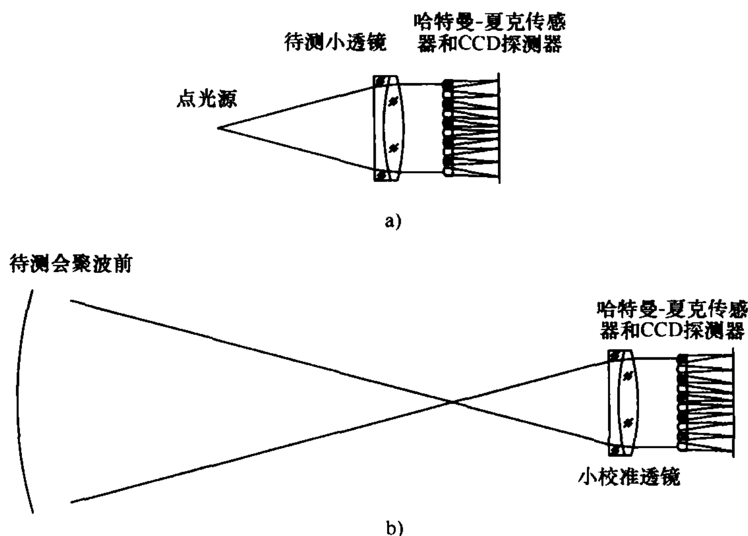


图10.17　用哈特曼-夏克传感器检验波前
a）小透镜和小型传感器　b）会聚波前

哈特曼-夏克检验的透镜状光阑最初由两层完全相同且互相垂直的柱状透镜构成。现在可以使用模制的塑料、玻璃或熔融硅制作的透镜阵列，哈特曼-夏克平板是一个10×10到超过100×100的透镜阵列。每块透镜的直径大约在0.2~2mm之间。透镜的典型焦距比$f/\#$接

⊖　原文为“三种”，实际图10.17中只有两种。——译者注

近于光斑的尺寸，用微米表示大的焦距，其范围在$f/10$到$f/200$之间。表10.1给出了哈特曼-夏克传感器中使用的一些透镜阵列的主要参数。

表10.1 哈特曼-夏克传感器中使用的一些小透镜阵列的主要参数

阵列大小	总大小/mm	透镜口径/mm	透镜焦距/mm	焦距比$f/\#$
100×100	50×50	0.5	8.31	16.6
60×60	61×61	1.0	40.0	40.0
55×55	62×62	1.1	105.0	95.5
30×30	70×70	2.2	209.0	95.0

如果波前是平整的，则穿过每个透镜的光束会在各自的光轴附近聚焦。由于透镜阵列并不是完整的，所以必须先用参考平面波前来对透镜阵列进行校准。

衍射光斑的半径ρ由式（10.27）表示

$$\rho=\frac{f\lambda}{d} \tag{10.27}$$

式中，d和f分别为透镜的直径和焦距；λ为光波波长。

传感器的角度动态范围被定义为在光斑不交叉或重叠的情况下能够测得的最大角畸变。因为光斑偏离量的最大允许值是$d/2-\rho$，所以角度动态范围变为

$$\theta_{\max}=\frac{d/2-\rho}{f} \tag{10.28}$$

探测器的像素大小σ决定了传感器的角度灵敏度，该灵敏度被定义为对最小可测得角斜率求倒数，可由式（10.29）表示

$$\theta_{\min}=\frac{\sigma}{f} \tag{10.29}$$

由于探测器上的光斑位移等于波前斜率乘上小透镜的焦距，焦距越短动态范围就越大，但角灵敏度也随之减小。最合适的焦距取决于应用背景。哈特曼-夏克传感器的一些潜在误差源已经由尼尔等人（Neal et al.，2002）分析过了。

使光圈在小光阑上重新成像的方法由于其紧凑性、易于校准，表面采样频率高及其他一些优点，已经涌现出越来越多的应用领域（Loibl，1980）。哈特曼-夏克波前传感器目前已经广泛应用于天文自适应光学（Ftaclas，2001），眼测量（Liang et al.，1994），以及非球面镜检验（Greivenkamp et al.，2001）。

10.9 交叉圆柱镜测试

已经指出在传统哈特曼检验中，观测平面必须是离焦的，这样才能通过小孔有效地识别每个所探测到的光斑。一旦使用了哈特曼平板，如果已经获知波前的曲率半径，就能够测得所施加的离焦量。然而，这不能代表所有的情形，有时候希望从哈特曼平板中测得这个曲率半径，或者能够识别和测量所有的离焦。人眼和照相机是两种潜在的例子。同样，在这两种情况中不能引入太大的离焦量，除非聚光透镜或者发散透镜恰好位于系统前方。

哈乌兰德（Howland，1968）提出在系统的前方使用一对交叉圆柱镜，一个是聚光透镜另一个则是发散透镜，从而产生所需的离焦量，而不是使用单独的聚光透镜。这种结构有很多优点，因为可以从哈特曼平板中测得任何离焦量，包括其符号。将两个交叉圆柱镜放在被检验系统的前面，使正向圆柱镜的轴与 x 轴成 $-45°$ 角，反向圆柱镜的轴与 x 轴成 $45°$ 角。也可以用在正交方向上具有两个相反曲率的单独透镜来代替这对交叉圆柱镜，但与两个圆柱镜相比，生产这种单独的透镜会更加复杂和昂贵。图 10.18 所示为将这种方法用于主畸变的情况下利用交叉圆柱镜技术获得的哈特曼图案。

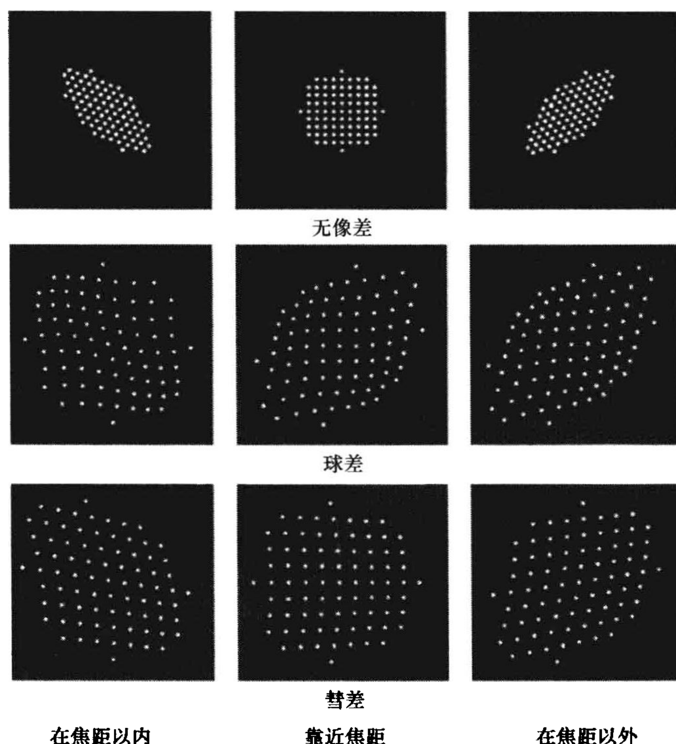


图 10.18　主畸变的情况下利用交叉圆柱镜技术获得的哈特曼图案

10.10　光源阵列或者网格测试

可以用一个独立的光源阵列来代替位于被检系统光瞳前方带有孔阵列的光阑和单独的点光源，每个独立光源对系统光瞳上的一小块区域进行照明。两者的工作原理相同，都是基于几何光学。对于不同的光学元件或者不同的测试系统，会有不同的结构。

假定一个带有球面像差的透镜，如图 10.19 所示。如果用一个带有畸变的波前对该透镜照明，而这个畸变刚好等于透镜的球差，折射波前将会是球形的，并由此在一个单独的焦点位置聚焦。在透镜前面的平面内放置一个点光源阵列来代替单独的光源进行照明。然后，由垂直于非球面波前运行的光线所生成的折射光线在进入透镜之前会在焦点位置通过针孔方式进行筛选。如果阵列中的光源是等距的，任何虚拟的或者真实的观测平面位置的光线交点就不是等距的，这与无畸变透镜中的情况相同。

将观测平面内光线交点到理想光线交点的距离解释为横向像差。波前曲率半径就是针孔

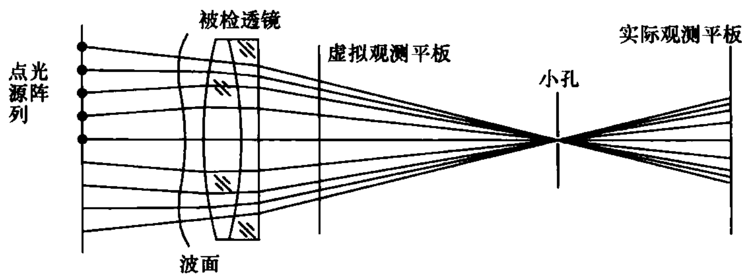


图 10.19 用等于透镜球差的畸变波前照明带有球差的透镜（折射波前是球面状的）

到观测面的距离。尽管观测面可以位于任何位置，但是最理想的还是位于被检系统的光瞳上。然后，以光瞳的中心为原点，实际交点与理想交点之间的距离就是横向像差 TA（x，y），实际光线交点的位置的坐标为 x，y。必须注意的是光源和针孔都不可能无穷小，所以观测到得光斑也不可能很小。与传统哈特曼检验类似，可以得到光斑的质心。这个测量原理能够用于测试透镜或者光学表面，下面将对此进行论述。

标准的光阑就是刻画有两个直线矩形阵列的光阑，而不是使用点光源阵列。否则，测试几乎是一样的，其图案解析也是相同的。下面将会对这些测试进行简单的描述。

10.10.1 会聚透镜检验

按如图 10.20 所示的方式检验一个会聚透镜。在透镜前面放置一个点光源阵列。如果观测系统的光瞳在焦点上，目标可以被认为是无限大。透镜与光源的距离不是很重要，但是要尽可能的大，这样每个点光源的大小和偏离标准位置的横向位移不会对结果产生很大的影响。

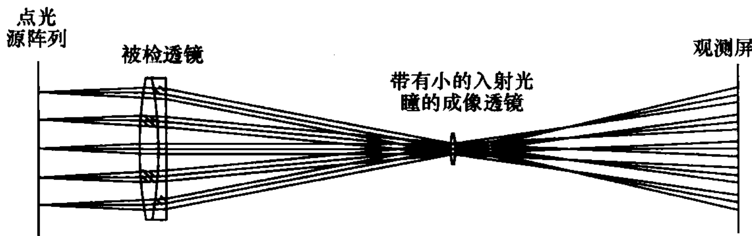


图 10.20 检验一个会聚透镜（在透镜前面放置一个点光源阵列）

如果这个透镜不是为一个无限远的目标而设计的，但是在一个有限的距离，成像透镜必须放在标准的图像位置。该成像透镜有一个小的孔径，并能在观测光阑位置的虚拟观测平面上形成任何想要的图像。理想情况下，这个透镜必须在观测面构建被检系统的光瞳图像。如果有必要，可以用人眼代替该成像透镜和观测面。

图 10.21 所示为用点光源阵列测量一个会聚透镜。不同之处在于，该结构在光源阵列（通常是固体激光）前面使用了一个由瞄准仪和小光阑构成的后远心系统，同时还使用了聚焦透镜。有了该远心系统，就可以在被检系统的入瞳位置形成点光源阵列的图像。由于位于瞄准仪的小孔径光阑生成了进入被检透镜的窄平行光束，所以被检透镜后面的光阑几乎没有什么作用。然后，与传统哈特曼检验一样，在位置传感探测器形成了哈特曼光斑。

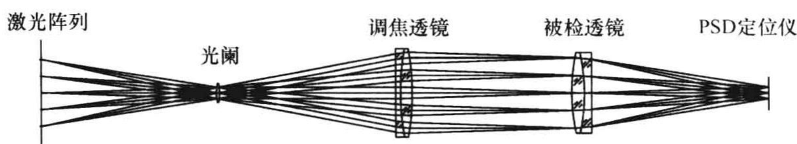


图 10.21　用点光源阵列测量一个会聚透镜

使用独立光源的一个优点是可以依次打开或者关闭这些光源。由于在测量的时候只有一个光源是开着的，这使得即使在没有施加离焦的情况下也能很容易地识别观测面位置的光阑。另一个优点是没有离焦时也可以探测和测量聚敛或者发散功率。

正如洛佩兹-偌姆瑞兹等人（López-Ramírez et al.，2000）所描述的那样，透镜前面的点光源阵列可以由一个具有两个平行直线阵列的屏幕代替，如图 10.22 所示。成像透镜和观测面可以是人眼。可以用这种方法以简单的方式测量非球面透镜，并观测其图案，如图 10.23 所示。

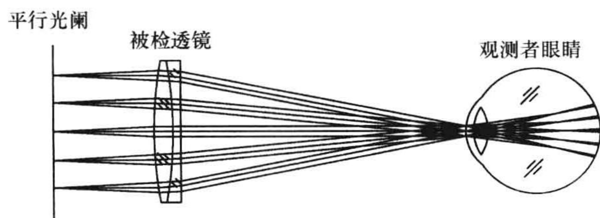
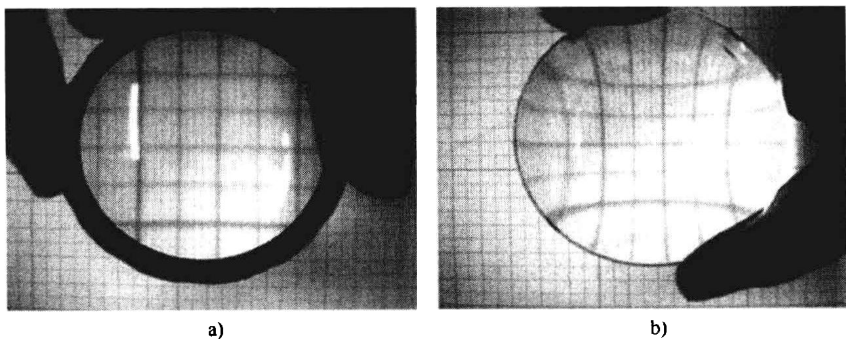


图 10.22　通过观察位于透镜焦平面前方的一个标准光阑而检验聚光透镜



a)　　b)

图 10.23　观测被检透镜前方的标准光阑
a）带有球差的透镜（表面为非球面）　b）有球差的透镜

10.10.2　凹面和凸面的检验

凸面或者发散透镜也可以通过该方法利用一个光源阵列来测量。尤为重要的是检验深度凸曲面。观测凸面前面的点光源（真实的或者虚像）虚像时有会出现两个问题：①观测图像有一个非常强烈的散光，从而出现切向和径向两个焦曲面；②两个焦曲面的弯曲非常剧烈。如果目标是位于面后的虚平面，两个焦曲面的形状和椭圆体很相似，但不是完全相同，如图 10.24 所示。

为了测试一个剧烈弯曲的曲面，例如人眼的角膜，可以采用如图 10.25 所示的布局。点

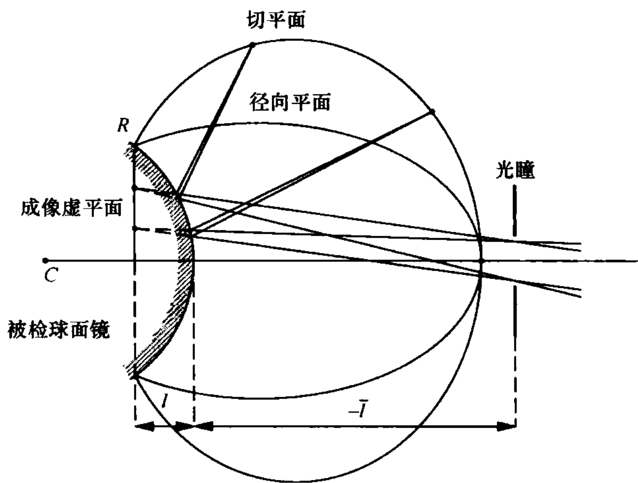


图 10.24 光瞳置于光轴中心，靠近焦平面（切平面和弧矢平面通过平板成虚像于凸平面之后）

光源可以位于径向和切向曲面之间的椭圆体面上。然后，点光源的虚像在曲面后的平面上形成。

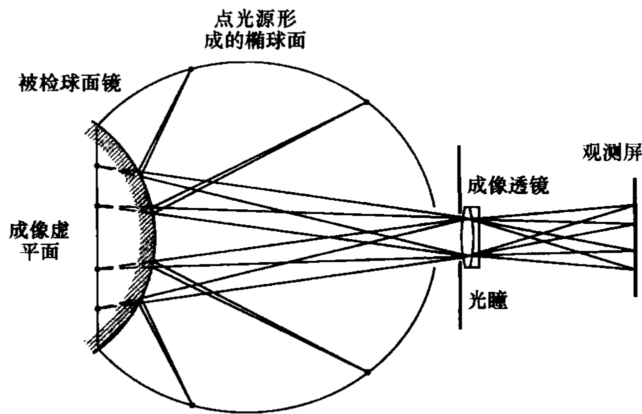


图10.25 在卵形的平面上用光源阵列检验一个深度凸球面

在椭圆体附近的一个小孔位置安装一面透镜，用来在观测光阑位置形成被检曲面的图像。透镜和观测光阑可以是数字的或者电视摄像机。这种带有光源阵列的椭球形表面结构已经被美嘉-巴布萨 Y. 和 D. 马拉卡拉-荷南德兹（Mejía-Barbosa Y. and D. Malacara-Hernandez，2001）及美嘉-巴布萨（Mejía-Barbosa，2006）用来测量凸镜。

这个椭圆体形状的光源有时候是不现实的，这时候需要一个简单的结构。迪阿兹-于瑞倍和卡姆普斯-卡卡拉（Díaz-Uribe and Campos-García，2000）提出用一个轴线与被检凸面光轴一致的圆柱面来代替椭圆体面，如图 10.26 所示。在这种情况下，一个印刷好的光阑可以用于代替点光源阵列。用来形成矩阵列图像的曲线是非常扭曲的，如图 10.27 所示。它们正确的形状是通过光线跟踪计算出来的。从管子末端观测到的图像，如图 10.28 所示，通过使用一个高陡度凸非球面，如图 10.29 所示。

图10.26　一种利用柱状光阑屏检验高陡度凸面的零检验方法（光阑屏与凸面同光轴）

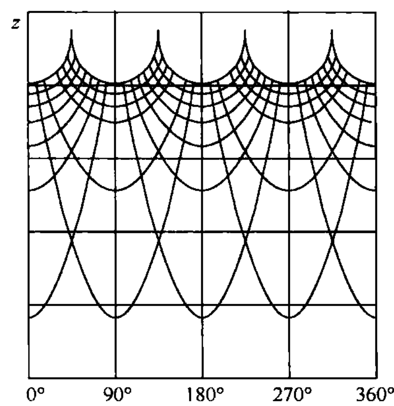


图10.27　光阑屏被卷成柱状以检验一个高陡度凸面

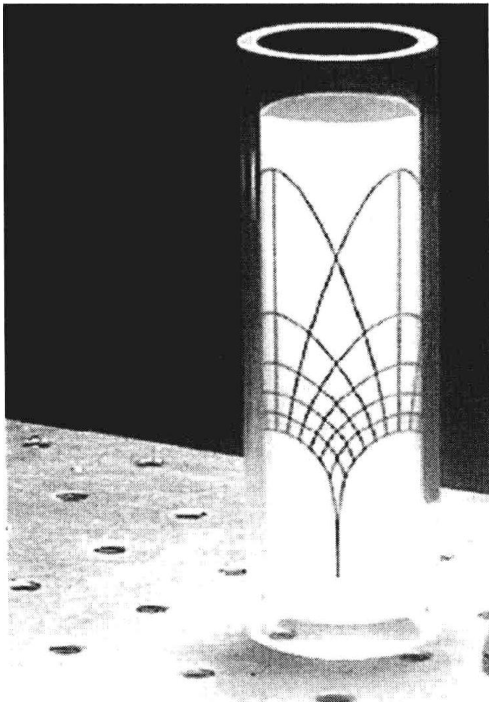


图10.28　带有光阑屏的塑料圆筒

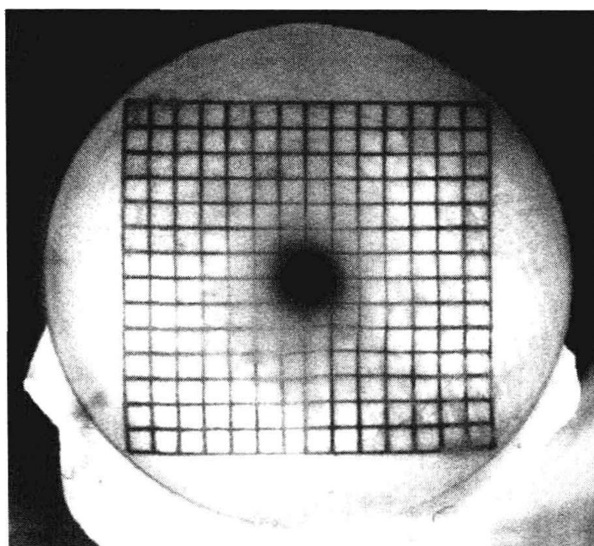


图 10.29 借助圆柱形光阑观测到的图像

洛佩兹-偌姆瑞兹等人（López-Ramírez et al.，2000）曾于2000年指出，凹平面（抛物面和球面）也可以通过如图10.30所示的光路利用已经制作好的光阑进行检验。阿凡丹奥-阿尔焦和迪阿兹-于瑞倍（Avendãño-Alejo and Díaz-Uribe，2006）指出，离轴抛物凹面同样可以通过类似的方法采用倾斜的平行平面光阑进行检验。

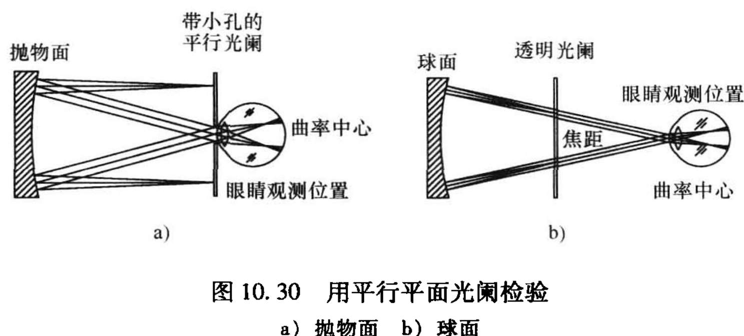


图 10.30 用平行平面光阑检验

a）抛物面 b）球面

10.11 迈克耳逊-加德纳-贝尼特检验法

迈克耳逊（Michelson，1918）发明了一种利用光线干涉检验镜面变形的方法，光线则是从光阑中通过两个小孔被照明的表面反射回来的。图10.31所示为迈克耳逊干涉装置的示意图。光源是一个用单色光照明的狭缝。通过显微镜观察狭缝的图像。将一组带有双孔或等效双缝机制的光阑放在被检镜面之前。将一个小孔固定在中心位置，另一个小孔随其径向距离而变化。在显微镜中能够观察到干涉条纹，且如果波前是球形的，那么中心条纹恰好位于狭缝图像的位置。当波前不是球面时，中心条纹和狭缝像之间的距离就表示误差。以条纹之间间距的分数形式表示的条纹位移即是波前误差。将可移动的小孔放在通光口径上的各个位置，就能得到完整的波前误差分布图。

后来有人（Merland，1924；Gardner and Bennett，1921）把迈克耳逊检验法所用的光阑改成带有若干小孔的径向光阑，以用于检验折射式光学元件，也可以用于检验反射镜。图10.32所示为加德纳-贝尼特（Gardner-Bennett）检验装置原理图，其中光阑上两相邻小孔之间的干涉条纹不是像在迈克耳逊检验装置中那样在焦点位置拍摄下来的，而是像在哈特曼检验法中那样在焦点外或焦点内拍摄下来。然而，离焦量必须足够小，以便于来自相邻光孔的光线会发生干涉。中心条纹偏离其理想位置的距离就表示两个小孔所在波面之间的相位差，这和迈克耳逊检验法中一样。

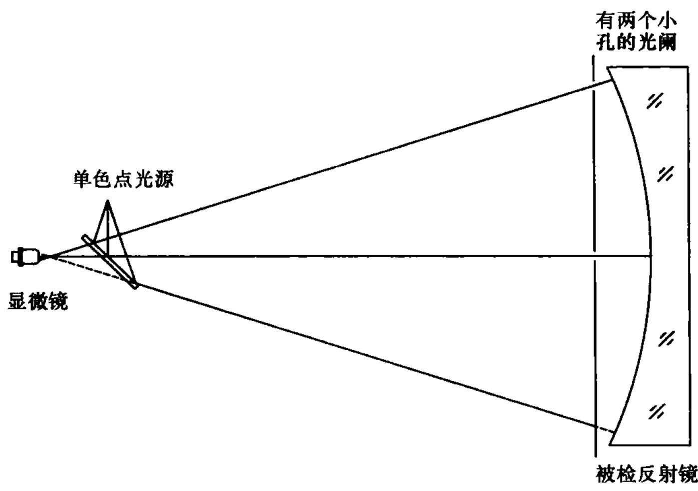


图10.31　迈克耳逊检验装置的示意图
中心光阑孔不动，另一个光阑孔可在整个被检球面内移动

虽然这几种检验方法还没有得到广泛应用，但在某特定场合下，其应用价值看来值得研究。本章末附有关于这种检验方法的各种用途的参考文献。

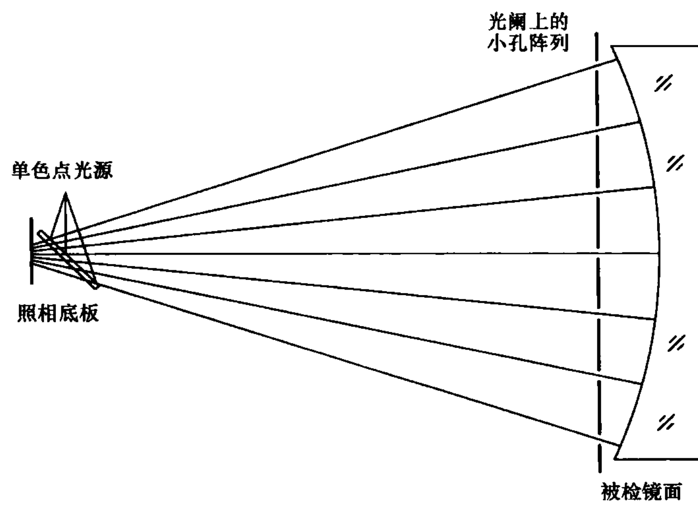


图10.32　加德纳-贝尼特检验装置原理图

10.12 其他进展状况

一个重要的研究成果就是改进了传统检验，采用光电探测器阵列代替了一般照相底片（Hausler and Schneider，1988；Pearson，1990）。这样可以更快地采集数据并且可以在微型计算机的帮助下同时分析几个光斑图案。可以对包含光斑质心的原始数据求平均，或者处理由个别图案分析所产生的波前图。这种方法还允许对光孔进行动态采样（Golden，1975；Hausler and Schneider，1988）。

光斑质心测量精度的提高是通过使这些光斑重叠而得到的，因为光斑重叠会导致干涉效应（Korhonen，1983；Korhonen et al.，1986）。这样一种办法容许使用闭合填充光斑及潜在的高表面取样频率。这将使得探测器阵列的使用更具吸引力，尤其是因为这种探测器可以忽视相邻光斑之间的低强度噪声。

随着光电探测器阵列和微型计算机的使用，在测试中可以实现快速测量。此外，这种组合使得可以在不改变表面的情况下对同一表面进行多次测量，从而可以通过对几组数据的平均来减小测试结果的测量误差。最后，我们认为随着哈特曼测试的应用和分析工作的进行，更为实用的创新必定会出现。

参考文献

Ahlberg J. H., E. N. Nilson, and J. L. Brown, *The Theory of Splines and Their Applications*, Academic Press, New York, 1967.

Avendaño-Alejo M. and R. Díaz-Uribe,, "Testing a Fast Off-Axis Parabolic Mirror by Using Tilted Null Screens," *Appl. Opt.*, **45**, 2607–2614 (2006).

Bennett A.H. and I. C. Gardner, "Interference Effects and the Hartmann Test," *J. Opt. Soc. Am.*, **11**, 126 (1925).

Cornejo A. and D. Malacara, "Wavefront Determination Using Ronchi and Hartmann Tests," *Bol. Inst. Tonantzintla*, **2**, 127 (1976).

Díaz-Uribe R. and M. Campos-García, "Null-Screen Testing of Fast Convex Aspheric Surfaces," *Appl. Opt.*, **39**, 2670–2677 (2000).

Freischlad K. and C. Koliopoulos, "Wavefront Reconstruction from Noisy Slope or Difference Data Using the Discrete Fourier Transform," *Proc SPIE.*, **551**, 74 (1985).

Ftaclas C. and A. Kostinski, "Curvature Sensors, Adaptive Optics, and Neumann Boundary Conditions," *Appl. Opt.*, **40**, 435–438 (2001).

Gardner I. C. and A. H. Bennett, "A Modified Hartmann Test Based on Interference," *J. Opt. Soc. Am.*, **11**, 441–452 (1925).

Ghozeil I., "Use of Screen Rotation in Testing Large Mirrors," *Proc. SPIE*, **44**, 247 (1974).

Ghozeil I. and J. E. Simmons, "Screen Test for Large Mirrors," *Appl. Opt.*, **13**, 1773–1777 (1974).

Golden L. J., "Dynamic Hartmann Test," *Appl. Opt.*, **14**, 2391–2399 (1975).

Greivenkamp J. E., D. G. Smith, R. O. Gappinger, and G. A. Williby, "Optical Testing Using Shack-Hartmann Wavefront Sensors," *Proc. SPIE*, **4416**, 260–263 (2001).

Hartmann J., "Bemerkungen uber den Bau und die Justirung von Spektrographen," *Zt. Instrumentenkd.*, **20**, 47 (1900).

Hartmann J., "Objektuvuntersuchungen," *Zt. Instrumentenkd.*, **24**, 1 (1904a).

Hartmann J., "Objektivuntersuchungen," *Zt. Instrumentenkd.*, **24**, 33 (1904b).

Hartmann J., "Objektivuntersuchungen," *Zt. Instrumentenkd.*, **24**, 97 (1904c).

Hausler G and G. Schneider, "Testing Optics by Experimental Ray Tracing with a Lateral Effect Photodiode," *Appl. Opt.*, **27**, 5160–5164 (1988).

Howland B., "Use of Crossed Cylinder Lens in Photographic Lens Evaluation," *Appl. Opt.*, **7**, 1587–1599 (1968).

Kingslake R., "The Absolute Hartmann Test," *Trans. Opt. Soc.*, **29**, 133 (1927–1928).

Korhonen T. K., "Interferometric Method for Optical Testing and Wavefront Error Sensing," *Proc. SPIE*, **444**, 249 (1983).

Korhonen T. K., S. T. Haarala, Lo. Piironen, and A. K. Sillanpaa, "Interferometric Optical Test and Diffraction Based Image Analysis," *Proc. SPIE*, **628**, 486–491 (1986).

Landgrave J. E. A. and J. R. Moya, "Effect of a Small Centering Error of the Hartmann Screen on the Computed Wavefront Aberration," *Appl. Opt.*, **25**, 533–536 (1986).

Liang J., B. Grimm, S. Goelz, and J. F. Bille, "Objective Measurements of the Wave Aberrations of the Human Eye with the Use of the Hartmann–Shack Wave-Front Sensor," *J. Opt. Soc. Am.*, **11**, 1949–1957 (1994).

Loibl B., "Hartmann Tests on Large Telescopes Carried out with a Small Screen in a Pupil Image," *Astron. Astrophys. (Germany)*, **91**, 265 (1980).

López-Ramírez J. M., D. Malacara-Doblado, and D. Malacara-Hernández, "New Simple Geometrical Test for Aspheric Lenses and Mirrors," *Opt. Eng.*, **39**, 2143 (2000).

Malacara D., "Geometrical Ronchi Test of Aspherical Mirrors," *Appl. Opt.*, **4**, 1371 (1965).

Malacara D. and Z. Malacara, "Testing and Centering by Means of a Hartmann Test with four Holes," *Opt. Eng.*, **31**, 1551–1555 (1992).

Malvick A. J., "Theoretical Elastic Deformation of the Steward Observatory 230 em and the Optical Sciences Center 154-cm Mirrors," *Appl. Opt.*, **11**, 575 (1972).

Mayall N. U. and S. Vasilevskis, "Quantitative Tests of the Lick Observatory 120-Ineh Mirror," *Astron. J.*, **65**, 304 (1960); reprinted in *Lick Obs. Bull.* No. 567, 1960.

Mejía-Barbosa Y. and D. Malacara-Hernández, "Object Surface for Applying a Modified Hartmann Test to Measure Corneal Topography," *Appl. Opt.*, **40,** 5778–5786 (2001).

Mejía-Barbosa Y., "Hartmann Test of Small F/# Convex Mirrors," *Opt. Commun.* **263,** 17–24 (2006).

Merland M. A., "Sur La Methode de M. M. Michelson et Cotton pour l'Etude des Systemes Optiques," *Rev Opt.*, **3**, 401 (1924).

Michelson A. A., "On the Correction of Optical Surfaces," *Astrophys. J.*, **47**, 283 (1918).

Morales A. and D. Malacara, "Geometrical Parameters in the Hartmann Test of Aspherical Mirrors," *Appl. Opt.*, **22**, 3957–3959 (1983).

Neal D. R., J. Copland, and D. Neal,, "Shack-Hartmann Wavefront Sensor Precision and Accuracy," *Proc. SPIE*, **4779**, 148–160 (2002).

Pearson E. T., "Hartmann Test Data Reduction," *Proc. SPIE*, **1236**, 628 (1990).

Platt B. C. and R. V. Shack, "Lenticular Hartmann Screen," *Opt. Sci. Newsl.*, **5**, 15–16 (1971).

Salas-Peimbert D. P., G. Trujillo-Schiaffino, D. Malacara-Hernández, D. Malacara Doblado, S. Almazán-Cuellar, "Ophthalmic Lenses Measurement Using Hartmann Test," *Proc. SPIE*, **5622**, 102–106 (2004).

Salas-Peimbert D. P., D. Malacara Doblado, V. M. Durán-Ramírez, G. Trujillo-Schiaffino, and D. Malacara-Hernández, "Wave-Front Retrieval from Hartmann Test Data," *Appl. Opt.*, **44**, 4228–4238 (2005).

Schulte D. H., "A Hartmann Test Reduction Program," *Appl. Opt.*, **7**, 119–124 (1968).

Servín M., D. Malacara, J. L. Marroquín, and F. J. Cuevas, "New Technique for Ray Aberration Detection in Hartmanngrams Based on Regularized Bandpass Filters," *Opt. Eng.*, **35**, 1677–1683 (1996).

Servín M., F. J. Cuevas, D. Malacara, and J. L. Marroquín, "Direct Ray Estimation in Hartmanngrams by Use of a Regularized Phase-Tracking System," *Appl. Opt.*, **38**, 2868–2869 (1999).

Simmons J. E. and I. Ghozeil, "Double-Option Technique for Testing Large Astronomical Mirrors" (abstract only), *J. Opt. Soc. Am.*, **61**, 1586 (1971).

Southwell W. H., "Wave-Front Estimation from Wave-Front Slope Measurements," *J. Opt. Soc. Am.*, **70**, 998 (1980).

Stavroudis O. N. and L. E. Sutton, *Spot Diagrams for the Prediction of Lens Performance from Design Data*, U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards Monograph No. 93, Washington, D.C., 1965.

Tscherning M., Die monochrotischen Aberrationen des menschlichen Auges, *Z. Psyol. Physiol. Sinn.* **6**, 456–471 (1894).

Vitrichenko E. A., F. K. Katagarov, and B. G. Lipovetskaya, "Methods of Investigation of Astronomical Optics. II: Hartmann Method," *Izv. Spetz. Astrofis. Obs.*, **7**, 167 (1975).

第 11 章　星点检验法

D. 马拉卡拉（D. Malacara），W. T. 威尔福德（W. T. Welford）

11.1　引言

本章在第 2 版中是由已故的 W. T. 威尔福德教授编写的，在此基础上，本书的第一作者对此进行了修订和更新。星点检验法可能是检验成像光学系统的最基本、最简单的方法。我们只需要检测点光源通过光学系统所成的像，就能由其与理想像之间的偏差判断出所成像质量。虽然从原理上可以通过诸如光电测量等技术实现定量化的星点检验，但在车间实际使用的星点检验几乎都是通过眼睛直接观测的目视半定量检验。这里我们将要讨论的也主要是目视观测检验技术。我们将星点检验分为两类：①用于接近和低于斯特雷尔容限的小像差系统的星点检验；②用于具有相对较大像差系统的星点检验。第一类以显微物镜和望远物镜的检测为代表；而第二类主要是以照相物镜的星点检测为代表，如绘出照相物镜的像散分布曲面或评估其横向色差。

点光源的单色像，即常说的点扩散函数其结构相当复杂，尤其是存在多种像差时。这些几何像差以非常复杂的方式决定了点扩散函数的结构。由于本书的目的在于介绍实用检测技术，所以不便对此进行深究。虽然从理论上讲，根据像差总是可以计算出点扩散函数，但实际上需耗费相当可观的计算时间。而对当前检测目的而言，我们更乐意于通过点扩散函数结构来估算像差，但这样的做法在原理上一般是不可行的。如果像差具有轴对称性质，就能够根据星点像光强的精细测量结果计算出像差。我们还必须依靠经验和许多由已知像差计算出的点扩散函数及其图像才能估算像差。因此，星点检验是一种半定量的检测方法，想要得到好的检测结果还需要相当丰富的经验。尽管如此，由于星点检验对经验丰富的检测人员具有既快速又可靠且灵敏度高的优点，因此仍不失为一种重要的检测方法。例如，在最终调节大数值孔径显微物镜的关键空气间隔时就使用了这种检测方法。因为调节过程中，需要对新调节的位置进行快速检测。

可能因为星点检验对经验的依赖性，公开发表的相关资料并不多。基本的参考资料仍是泰勒（Taylor，1891）的著作。马丁（Martin，1961）和泰曼（Twyman，1942）两人的文章中也对这一方法给出过有益的说明，泰曼还重述了泰勒所介绍的大量内容。

在讨论星点检测时，我们通常假设光强均匀地照在待测系统的光瞳上，并且所形成的星点像具有适当大小的汇聚角，比如不超过 0.01。光瞳内适度的光强变化对星点像不会有很大的影响，但激光器中出射的高斯光束却例外（真正的高斯光束具有不确定的大口径尺寸，但其截面强度分布推导的依据却是近轴近似理论！这是一个非常明显的矛盾。实际上，当距中央极大足够远时，例如大于三倍 $1/e^2$ 半径时，高斯光束截面内光强就小到可以忽略。这样矛盾就不存在了）。我们将在 11.2.6 节中讨论高斯光束，并且在 11.2.7 节中讨论极小汇聚角情况下的相关结论和影响。当光束汇聚角非常大时，比如数值孔径大于 0.5，点扩散函数的精细结构也与将描述的合理大小汇聚角的结果有所不同。斯达宁斯（Stamnes，1986）

在最近发表的文章中对这些影响进行了极好的研究。考虑到技术上的适用性，星点检验如此大的数值口径（NA）的光学系统检测是不适用的。我们常用的方法是通过一个可靠的无像差系统，如星点检测过且已校正好的显微物镜转换 NA 值。因此，我们主要介绍的无像差点扩散函数（参见图 11.1 ~ 图 11.9）的计算基础是基于标量波近似理论的。

11.2 小像差星点检验

在接近衍射极限的星点检测系统中（也许不存在色差），我们需要知道形成小像差系统点扩散函数的背景。这些在 11.2.1 ~ 11.2.5 节中给出，但未涉及详细的数学理论。

点扩散函数的相片和计算在应用光学的相关资料中都可以找到，但遗憾的是大都不适于实际的星点检测。其中最有价值的一组相片就是泰勒著作（Taylor，1891）中卷首图。这组照片被许多公开出版文献引用过，如马丁的著作（Martin，1961）。其中还有宁胡依斯（Nienhuis，1948）论文中的照片，也被玻恩和沃尔夫（Born and Wolf，1975）引用过。但是我们发现尼恩惠斯所拍下这些漂亮的点扩散函数照片为了增强次级圆环和条纹而采用了相干背景。对星点检验来说，这样的处理相当于篡改点扩散函数。事实上，所有的相片对星点检验来说都是不可靠的。因为感光乳剂和半色调处理的非线性叠加结果在任何可能的动态范围内都是不可靠的。因此，我们在本章只给出了点扩散函数的说明图。

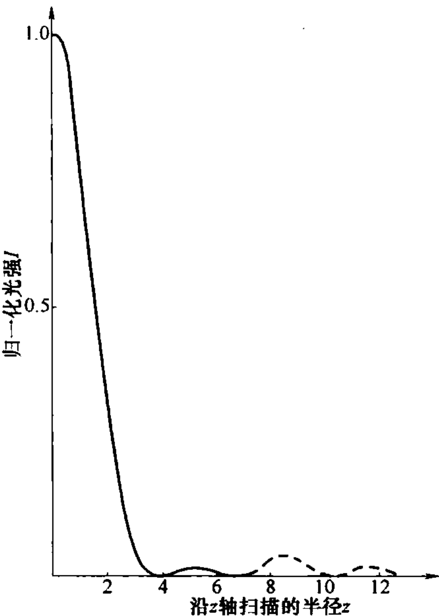


图 11.1　爱里斑（单色点光源通过圆形孔径系统所成的无像差像）

图 11.1 所示为爱里斑。

图中的曲线方程为 $I=\left[\frac{2J_1\ (z)}{z}\right]^2$

式中，$z=(2\pi/\lambda)$；$\sin\alpha\eta$，$\sin\alpha$ 是成像光束的汇聚角；η 为距孔径中心的径向距离。第二和第三环是以实际纵坐标值的 10 倍画出的。

11.2.1 无像差爱里斑

图 11.1 所示为具有均匀透过率的圆孔径系统所成的单色无像差传递函数图像，也就是爱里斑。图 11.2 是对图 11.1 的纵坐标取对数后得到的图像。两幅图中的纵坐标为光强对图像中心强度的归一化值，横坐标为离图像中心的径向距离。位于像平面内的径向坐标 z 由式（11.1）给出

$$z=\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha\eta \tag{11.1}$$

式中，λ 为光波波长；α 为成像光束汇聚角（即半圆锥角）；η 为实际的径向距离。

由于图 11.2 中所示的径向坐标是无量纲的，因此常称其为 z 单位或衍射单位。这里的爱里斑第一暗环半径为 3.83z，所以可以大致算出待测点扩散函数 z 单位的实际大小。由于爱里斑在星点检验中重要的基础作用，表 11.1 中给出了它的一些数值特征。表 11.1 中包括

圆内光通量函数，其表示在给定半径的圆内光通量与爱里斑内总光通量的比值。有人建议将圆内光通量（有时称为圆内能量）作为星点检验的一个新研究方法而加以应用（Barakat and Newman，1963），但由于面临很多实际的难点而未被普遍采用。但是，该函数指出了爱里斑的一般特征，这是非常有指导意义的。图 11.3 所示为此函数的曲线图。

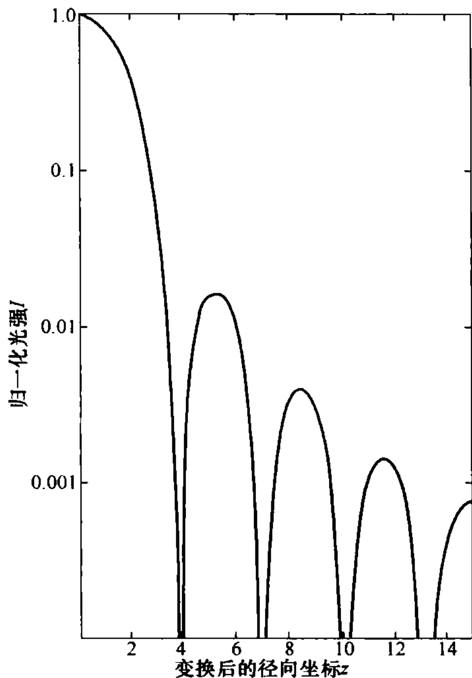


图 11.2　纵坐标取对数的爱里斑图形

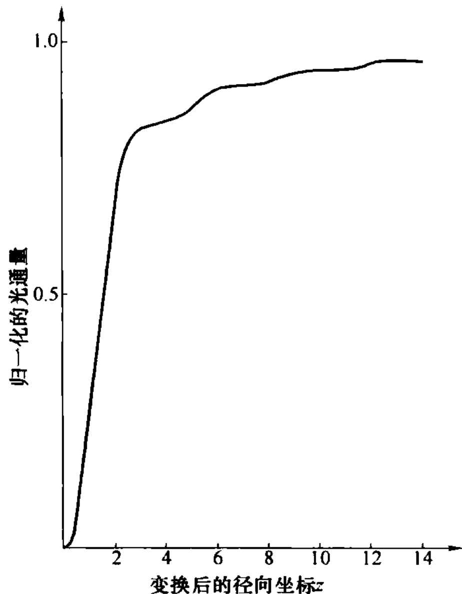


图 11.3　圆内光通量函数的曲线图

表 11.1　爱里斑 $I=\left(\frac{2J_1(z)}{z}\right)^2$

1. 暗环半径（一阶贝塞尔函数零值，J_1）

环数	1	2	3	4	5	6
半径	3.83	7.02	10.17	13.32	16.43	19.62

2. 亮环半径和强度（二阶贝塞尔承数，J_2）

环数	1	2	3	4
半径	5.14	8.42	11.62	14.80
强度	0.0175	0.00416	0.00160	0.000781

3. 半宽度：强度为 0.5 时的半径等于 1.615（注，此值明显小于第一暗环半径的一半）

4. 圆内光通量：与中央极大值为中心的圆内总光通量的比值；由 $1-J_0^2(z)-J_1^2(z)$ 给出

半径	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8
光通量	0.0605	0.221	0.617	0.817	0.838	0.861	0.901	0.910	0.916

图 11.4 所示为爱里斑衍射立体图，是爱里斑的另一种表示方法，其纵向高度代表了相对强度。图 11.5 是将图 11.4 纵向放大，从而给出外环部分的情况。

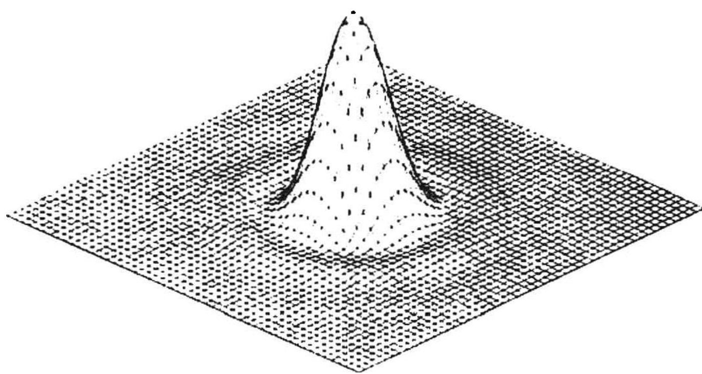


图 11.4　爱里斑衍射立体图（图中的 2.5 个小方格对应一个 z 单位）（由 M. W. L Wheeler 计算和制图）

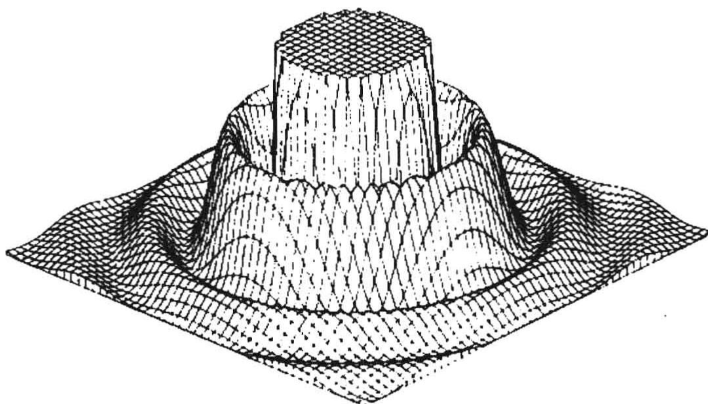


图 11.5　外环部分的情况（与图 11.4 相同，只是将纵坐标放大，并在相对强度 0.03 处截断）（由 M. W. L Wheeler 计算和制图）

11.2.2　离焦爱里斑

离焦（最佳焦平面内外位置）点扩散函数的检测有非常实用的价值，这是星点检验在实际应用过程中最早的发现之一。这似乎不太合理，但我们发现离焦像比最佳焦点像更容易判定像差。因此，图 11.6 给出了其中一个光轴平面上的光强等高图（等照度线）。其纵轴表示像平面的径向坐标，横轴表示沿主光线的离焦量。像平面坐标与图 11.1 和图 11.2 中的径向坐标是相同的无量纲坐标。图 11.6 的注中予以说明的离焦坐标也是无量纲坐标。图 11.6 中所给数值对应的是半角为 45°光线锥，当取合适的汇聚角 x 和波长 A 时，图 11.6 可表示任意角度的光线锥⊖。

上述分布图中有几个特征需要注意。曲线关于准确的焦平面位置对称。轴上有等间距的零值（“暗点”，只有焦平面位置除外），并且与最大值交叉出现。图 11.7 所示为光强沿轴向的

⊖ 然而，必须注意，这仅适用于第一暗环直径远小于光学系统的出瞳直径的条件下。当然，这几乎在大多数车间检验中都成立。但光束汇聚角很小时，该条件有可能不再成立。这时，图 11.6 不再正确。这种情况更多的是发生在具有高斯轮廓的光束中，如单模（TEM_{00}）激光束。因为这类光束在使用时通常是近似平行光。

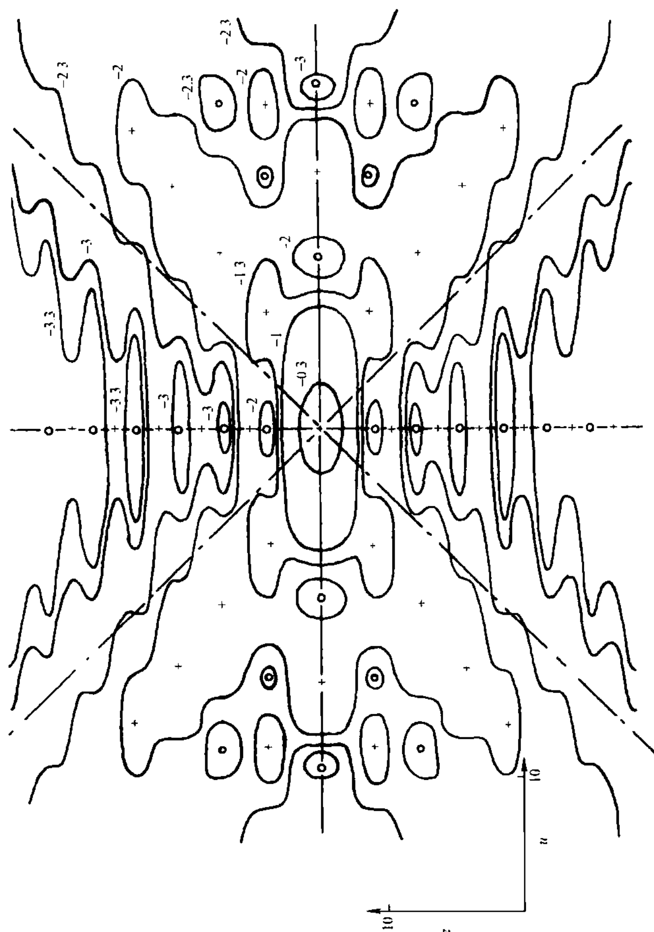


图 11.6　离焦爱里斑的等辐照线（光强等高线图）（其中直线 $z=\mu$ 是光线锥的边界。小圆圈表示最小值（轴上为零点），小十字表示最大值，其中等高线上的标注值为光强对数值）（图中数值由 J. C. Dainty 计算）

分布情况。在图 11.6 中，亮环和暗环构成的离焦图形随着离焦量的增加扩散开。这一点在图 11.6 中不是很明显，但在图 11.8 中就非常明显了。图 11.8 也是一组等辐照图，其增加了两坐标轴的取值范围并只给出了对称图的第一象限。图 11.8 中标注的辐照值是对相对强度取 10 为底的对数，这样便于增加强度的显示范围。只要观察过点扩散函数的人都可以很轻易辨认出图 11.8 中的一个典型的离焦图形。此图形是一系列间距大致相等的圆环，其光强由内向外渐渐增加，并且最外圈光环要比人们按照光环逐级变化规律所预测的要亮得多，宽得多，直径也大得多。事实上，这些光环的级次分布并不像初始光环表现的那样非常规则。通过对单色光点扩散函数的仔细检测或对图 11.8 的研究都可看到这一点。尽管如此，光环的这种规律性表现还容易受到小像差干扰，而这正是星点检验的一个非常有用的性质。逐渐增大离焦量，可以看到中心出现新的光环，它们就像池塘中的水波一样扩展开来，取代了图形中的其余光环。

这里所得到的结论将和 11.1.5 节中给出的结论一起依据卡格内特等人（Cagnet et al.，1962）所拍摄的照片加以说明。贝瑟尔（Beiser，1966）绘出了通过焦点的光强分布透视示意图，而泰勒和汤普森（Taylor and Thompson，1985）则给出了为验证预测光强分布的正确性而得到的精细测量结果。图 11.9 所示为无像差系统的焦点像、焦内像和焦外像。

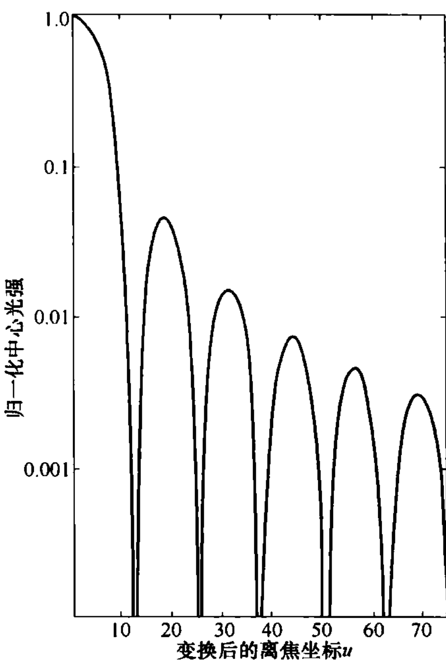


图 11.7 离焦爱里斑中心强度图（曲线方程为 $\sin\frac{1}{4}u/\frac{1}{4}u$。这里 $u=(2\pi/\lambda)\zeta\sin^2\alpha$，$\alpha$ 为光束汇聚角，ζ 为离焦量。）

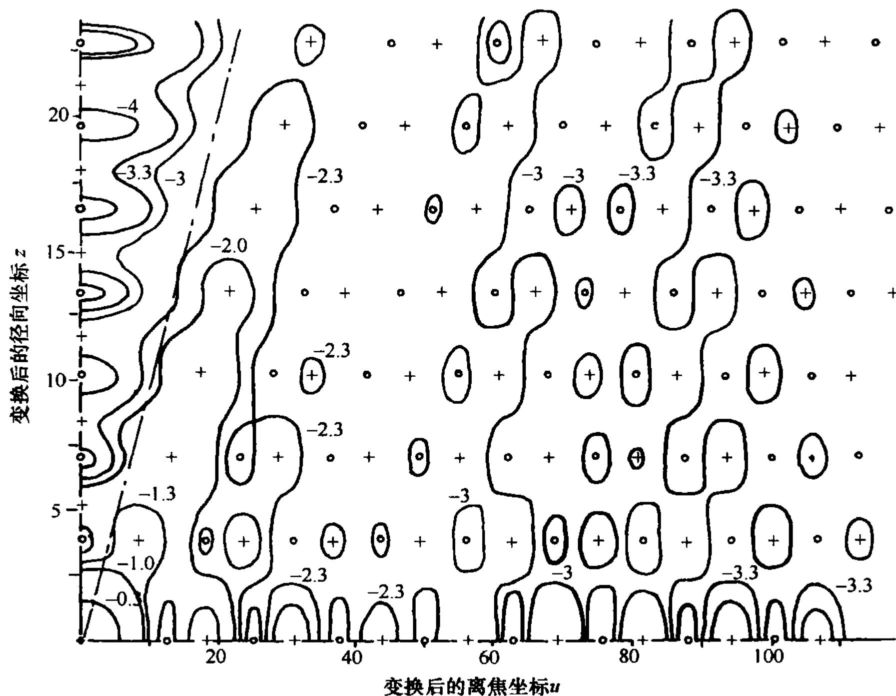


图 11.8 离焦爱里斑等辐照图（比图 11.6 中的离焦范围更大。点画线（$z=\mu$）表示形成爱里斑的光锥边界。小圆圈表示最小值（在轴上为零值），小十字表示最大值，等高线用强度的对数值标示，原点光强归一化值为 1）（图中数值由 J. C. Dainty 计算）

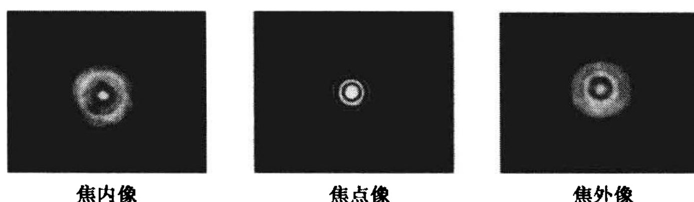


图 11.9 无像差系统的焦点像、焦内像和焦外像

11.2.3 复合光

虽然 11.2.1 和 11.2.2 节中的讨论仅仅针对单色光而言，但点扩散函数所有特征（如暗环直径，轴上零值点的距离等）都与波长成比例。那么即使根据几何光学理论不存在色差（如纯反射系统）的光学系统，仍然有可能在进行星点检测时看到彩色图像。实际上这种色彩效应并不明显。因此，当用白光对大多数反射系统进行检测时，这种很弱的色彩效应并不会干扰检测结果。

然而，在星点检验折射系统时很容易出现“二级光谱”，因为无法修正的残余色差。其实我们并不总是关心星点检验得到的色差校正量。因为色差的消除取决于所有选用的型号玻璃和各元件光焦度。而这些因素在系统中所引入的相应总误差对其他像差的影响比色差要明显得多。因此，在检测折射光学系统时，应该使用滤波片（参见 11.3.2 节内容）选取足够窄的波段或使用激光光源。这样就可以更清楚地看到单色像差。因为这些像差可以很容易地通过镜面修抛和调节元件间的空气间隔进行校正，所以这通常也是车间检验的观测对象。

林福德和沃尔夫（Linfoot and Wolf，1952）按照人眼能见度曲线对折射望远镜彩色星点像的总光通量进行了加权计算。他们所得到的计算结果，特别是针对现有望远物镜的计算结果对光学设计者来说相当有用。而这些结果作为星点检验的基本资料可能并不是十分有用，因为在实际操作过程中所看到的颜色变化并不弱于亮度的变化。但是，它们确实展现了光斑颜色随着二级光谱效应出现的变化情况。

11.2.4 中心遮拦系统

由于次镜的存在，多数大口径望远镜和许多其他光学系统的光瞳都有一个中心孔。这些中心遮拦对点扩散函数有着非常大的影响。其主要体现在三个方面：①中央极大的宽度减小；②外环亮度分布变得无规律可言，有些变亮，有些变暗；③轴上暗点间距增大。林福德和沃尔夫（Linfoot and Wolf，1953）两人从理论上所进行的深入研究表明，如果遮拦比（指半径而非面积比值）为 E，则上述三个特征的轴上分布情况取决于系数 $(1-\varepsilon^2)^{-1}$。图 11.10 所示为遮拦比 $\varepsilon=0.25$ 时焦点位置的曲线。对天文望远镜来说，这是比较典型的遮拦比。经过与图 11.2 进行比较可以看到特征①和②。林福德和沃尔夫（Linfoot and Wolf，1953）给出的等照度曲线图显示了焦点外的相应特征。

11.2.5 小像差相关结论和现象

就光学设计而言，小像差通常是指对理想球面波有 λ/4 数量级的波面畸变。因为基于斯特雷尔准则的系统像差容限就是这样的数量级。一般认为，在此范围内的像差对物体所成像的影响是可以忽略的。此时，可以说光学系统达到了衍射极限。

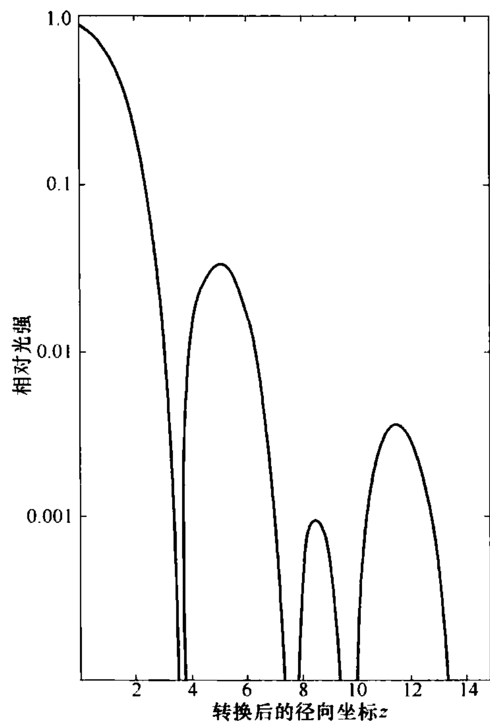


图 11.10 具有中心遮拦的圆形孔径焦点处的点扩散函数（遮拦为全口径的 1/4。与图 11.2 中的中心和外环光强相对比，可以看出中心和外环光强的变化。）

玻恩和沃尔夫（Born and Wolf，1975）就曾对斯特雷尔像差容限准则作出过解释。该准则的基本依据是：波前在形成点扩散函数时，引入的任意小像差的最初影响就是稍稍减小了最大光强值。但 1/2 中央极大值的宽度并没有改变，其中心的光通量被分配到了靠外的一些环带。一般把最大光强值降低 20% 作为容差极限。对各种不同大小的像差，玻恩和沃尔夫（Born and Wolf，1975）给出的简单公式可以计算出这个极限值。

然而，人眼并不善于判断绝对光强的变化。因此，在光学设计中极有用处的斯特雷尔准则在实际车间检验中意义不大。正如前面提到的那样，我们发现人眼所能分辨的极限比斯特雷尔容限还要小很多。仔细观察文献中引用的含像差点扩展函数的相片就能明白这一点。随便举个例子，在玻恩和沃尔夫（Born and Wolf，1975）所著书中，图 9.8 翻印了宁胡依斯（Nienhais，1948）拍摄的具有斯特雷尔容限彗差的相片。其中可以轻易地看出，它是一个有像差的点扩散函数。图 11.11 所示为彗差为 0.6 倍波长的衍射立体图，其中的斯特雷尔容限彗差衍射立体图也有明显的特点。根据以往的经验来看，由泰勒（Taylor，1891）提出的这种半定量检测方法非常灵敏。但对不同的像差，其灵敏度却不相同，因此很难说该方法的灵敏度极限究竟在哪里。比如，波前在通光口径内的变化快慢对灵敏度就有很大的影响。对球差而言，维尔福德（Welfford，1960）提出变化慢时的可测像差大小为 $\lambda/20$，而变化快时则为 $\lambda/60$。

11.2.6 高斯光束

依照惯例，高斯光束的焦点称为光束束腰。沿光束传递方向任何位置的光束截面形状都是相同的，只是光束光强和光斑大小根据离束腰的距离进行了缩放。可以根据已知公式计算

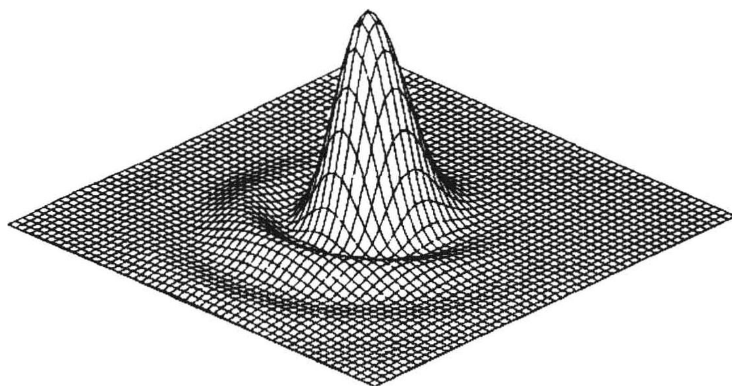


图11.11　彗差为0.6倍波长的衍射立体图（斯特雷尔容限）

相应位置的光斑大小和相前（Kogelnik and Li，1966）。如果系统光源为高斯光束，那么镜头和其他元件必须有足够大的空余口径，以保证可以忽略系统对高斯光束边缘的遮拦。这时，相应的星点检测可以用来确认最终的光束束腰是否具有真正的高斯截面。由于束腰的离焦并不会影响高斯光束的性质，因此这是很难办到的。在实际使用中，最好对输入光进行扩束，并使用口径内光振幅大致均匀的全通光口径光束（即 hard-edge 光束）检测系统。因为高斯光束外边缘振幅要小一些的，所以这个要求极为苛刻。但是，只要高斯光束不是比口径小很多，口径内的光振幅分布不均是可以忽略的。如果测量时使用的是高斯光束，系统内部对光束的任何轻微遮拦都有可能在像面产生圆环或条纹。这时将很难区分这是因为光束遮拦还是光学系统本身所引入的像差。

11.2.7　极小汇聚角（小菲涅耳数）

“硬边”光束近乎准直光束，光束聚焦后的汇聚角就非常小。焦点区域内的聚焦衍射图形与11.2节所给出的有着本质上的区别。斯达宁斯等（Stamnes，1986）及李和沃尔夫（Li and Wolf，1984）的文献中对此作了详细的讨论。从星点检验的角度来看，无像差光束引起的最明显的现象是焦点两侧光强分布不再对称。这使得对光学系统质量的评价更加复杂了。因此，建议避免在光束几乎平行的位置测量。

这就提出了这样一个问题，光束的平行度为多少才不会扰乱11.2节中给出的那种简单的星点像呢？光束的菲涅耳数可以很好的回答这个问题。设 α 为出瞳半径，R 为汇聚光束相前的曲率半径，即 R 为出瞳到焦点的距离，菲涅耳数 N 定义为

$$N = \frac{\alpha^2}{\lambda R} \tag{11.2}$$

菲涅耳数的物理意义是，$N/2$ 是光瞳边缘位置相前曲率的总波数。当 N 不是很大时，比如小于10，焦点区域会出现光强不对称现象，这在先前所引的参考文献中也有说明。因此，根据这个标准，星点检验不能在菲涅耳数极小时进行。

11.3　小像差实测结果

下面我们详细介绍目视星点检验小像差所得到的结果。假定下面都是使用的近似单色光。

11.3.1 目视星点检测所观测到的现象

焦点处所得图形的不对称表明彗差的存在。它可能是工作离轴产生的真正彗差，也可能是由于各元件定心不准（常因中心严重偏离而看到非常明显的非对称颜色效应）或表面的不对称抛光，甚至可能是透镜元件折射率分布不均等原因而产生的所谓“制造者像差”。镜面反射的相位不对称变化是彗差产生的一个非常少见的原因。镜面所镀多层介质膜的不均匀可能会引起这种不对称的相位变化。但如果镀膜镜面被用来大角度折射光束，并且该光束的汇聚角又比较大，此时随着光束内入射角的变化就会导致足够大的相位非对称改变，从而引入彗差。

实际上，非对称现象总是在离焦像中更明显。特别是存在彗差时，会存在一个标志性的离焦非对称现象。这对寻找系统轴线或视场中心时非常有用，这常用于天文望远镜的物镜，专业术语称为“squaring-on”。

小像散是以焦点处的“马尔特斯十字”（Maltese cross）现象体现的，并且其在离焦过程中会更加明显。特别是从焦点一侧移向另一侧的过程中，即是在远低于斯特雷尔容限的情况下也能轻易观察到像散焦线方向的改变。

当然，对于高质量系统的轴上点扩散函数而言，既没有像散也没有彗差。这时最重要的就是判断球差的校正情况。如果仅仅研究焦点内的像，则几乎得不到任何结果（大像差除外，参见 11.4.1 节内容）。因此，离焦是非常必要的。

在描述这些现象时，出现了两个普遍接受的术语：欠校正和过校正。对初级球差而言，欠校正指成实像光线的边缘部分的焦点位置比近轴光线的焦点位置更靠近光学系统，反之则为过校正。用波面形状解释为，孔径环带内波前在参考球面波（理想或没有像差的波面）之前时，该部分区域是欠校正，同样，反之则为过校正。

在存在初级球差或单次高级球差时，我们发现：欠校正时，在靠近光学系统的焦点内侧（焦内）产生比较明锐的、轮廓清晰的光环，并且有一个特别亮的最外环；而在焦点外侧所有光环都是模糊的，对比度很低，特别是外环衰减为低清晰度的一片模糊。而对过校正而言，也能看到相同的情况，但焦内和焦外的情况要对换一下。图 11.12 给出了欠校正时的光线示意图，可以看到焦散面上亮得多的最外环。这解释了该现象形成的原因，也便于记忆。因为我们很自然地想到在焦散面上有比较大的光通量。换句话说，在光线越集中的地方我们能够看到的光强越大。假如离主焦点足够远时，这个规律在一般情况下是成立的；这就给出了一个解释环带像差的一个方法。假设在焦内一个较远的位置，如出瞳直径三分之二处，我们看到的光环明亮清晰得多。这表明从相应孔径位置出射的光线恰好汇聚在此。换而言之，相应环带波面要比应有的凹度还要凹。而在焦点外侧则会看到较模糊、较扩散光环的相反现象。图 11.13 所示为波面环带误差对光线汇聚的影响。

11.3.2 星点检验的光源

实际上，我们从没有将真正的星星作为星点检验法的检验目标。因为大气扰动足以使星点像在强度、位置及像差方面发生变化而不能正确评价。

实验室人造星光是一个具有合适光谱灯光的针孔。针孔必须小到完全不能分辨。也就是说，针孔对物镜中心的张角必须比 λ/D 小得多，其中 D 为物镜孔径的直径。实际上只要注意星点像是否有针孔边缘的任何痕迹，就会很容易判断针孔大小是否合适。为了满足这个判

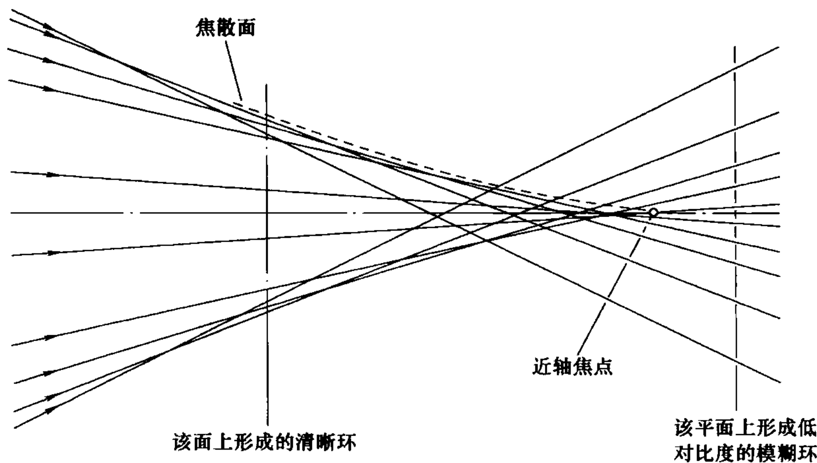


图 11.12 带球差（光线理论图示给出了带球差的影响）

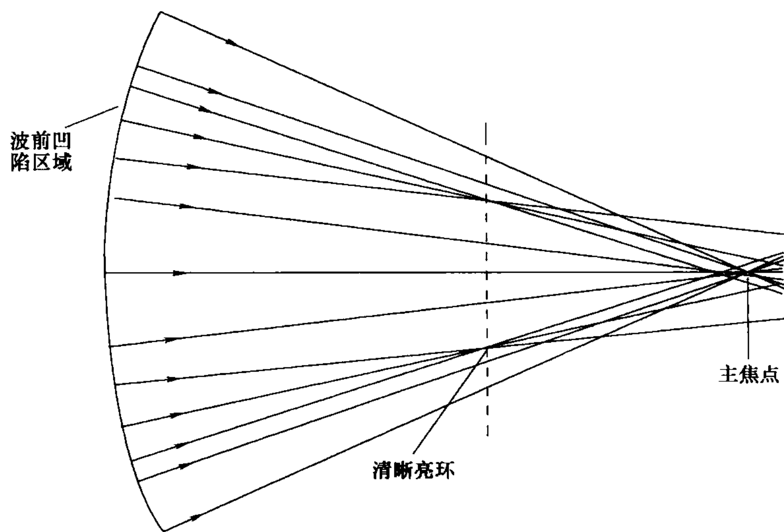


图 11.13 波面环带误差对光线汇聚的影响

断条件大多数针孔轮廓都足够不规则。如果仅能看到衍射结构，则针孔就足够小了。

一些非常昂贵的针孔通过专门的装卡后作为激光光束的空间滤波器使用。对于车间检验来说，可以把电子显微镜的孔径光阑作为针孔使用，既便宜又简单。其为直径 3mm 的电镀铜箔，上面有一系列直径 5 ~ 50μm 的小孔。这些小孔的圆形度并不高，但对星点检验来说，这一点无关紧要。

在电子显微镜光阑广泛使用之前，曾用过其他几种针孔装置，本章最初引用的参考文献对此进行过介绍。其中一种是通过显微镜玻片上冷凝水银蒸气所得到的小而干净的水银珠对远距离光源进行反射（特别是星点检验法检测显微物镜时，就曾推荐使用此方法）。车间检验时值得注意的是，水银属于累积性有毒物质，人们即使在常温常压下仍会吸入一定量的水银蒸气。因此，该方法已不再使用。

为了易于得到星点像，比较理想的方法是将卤素石英灯或高压水银灯这样的强光源聚焦在针孔上。图 11.14 所示为灯管和针孔的装配图，图中滤光片紧贴在针孔后面。我们不建议

将激光作为星点检验的光源，其主要缺点是氦氖激光相干长度太长，会在折射系统表面多次反射从而产生干涉现象。在这里，干涉所引起的亮度变化足以使得星点检验的细节模糊不清。特别是车间检验时，被检面大都没有镀上增透膜。激光作光源的另一个缺点是系统（至少对折射系统而言）可能需要针对不同的波长进行像差校正，并且球差校正量会随着波长的不同而有明显的变化。但对于大镜面反射系统来说，激光很可能是最好的光源，因为它在白天也能提供足够的光强。

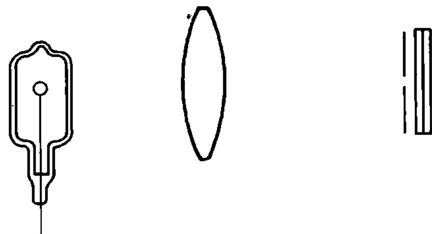


图 11.14 灯管和针孔的装配图（图中给出的卤素石英灯放在可调中心和焦距的调整架上，然后是汇聚透镜，针孔和滤波片。此时，透镜将点光源成像在针孔上。）

11.3.3 星点检验光学系统简图

检验小口径折射物镜最简单的光路如图 11.15 所示。其中，星点位于合适距离上，而这个“合适”具体为多少颇有争论。但根据设计参数和一个有限的共轭距，就肯定计算出这个距离。就大多数实际情况而言，规定“无限远是大于被检系统焦距 20 倍的距离”就足够了。

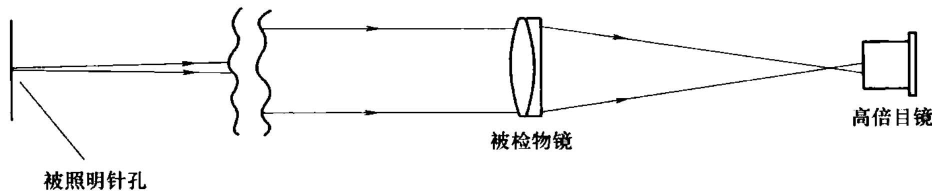


图 11.15 检验小口径折射物镜最简单的光路（根据实际检测需求，确定是否对光源滤波）

星点检验的观测目镜必须有足够放大倍数才能看清点扩散函数的所有细节。由细节尺寸量级约为第一暗环半径和理想条件下眼睛角分辨极限约为 1 角分的事实，我们引出了一个简便的判断准则：即以毫米为单位的目镜焦距应等于或小于被检系统的 f 数[⊖]；因此要检测 $f/10$的光束，就需要一个焦距为 10mm，即放大倍数 ×25 的目镜。根据经验，就很容易判断目镜是否有足够的放大倍数，因为只有放大倍数足够时，才能看到星点像的全部衍射结构。

显然，星点检验法检测一个高质量的物镜时，目镜自身的像差必须小到可以忽略。这样的要求也是可能的。根据前面所提出的准则，被检汇聚光束在目镜上的最大直径仅为 1mm，而大部分目镜设计在此这样大的孔径区域内基本都是理想的。当然偶尔也会有划痕或轻微偏心这类缺陷，但是通过旋转目镜能很容易地识别它们。

⊖ 严格地讲，这个值应为 f 数的两倍，而相应的放大倍数应缩小一半。

观测短焦比光束时，需要用低倍率显微镜代替目镜。此时，前面所说的准则应为显微镜的总放大倍数不能低于250与f数的商。

有时用折射准直仪或反射准直仪把星点像精确置于无限远处。其实并不需要这样做，因为一来要增加成本，二来被检系统的像差中还引入了准直仪像差。然而在某些车间的条件下，如图11.15所示，所需的长距离光路可能会受到热气流的影响，所以必须使用准直仪代替长光路。在通常情况下，对敏感的光学系统而言，当空气中的光路超过1m或2m就足以反映出空气扰动的影响。因此，我们或者把较长的光路屏蔽在独立的隔离仓里，或者找一个干扰最小的特殊时间进行检测。有时也把整个系统放在一个充满氦气或真空的箱子进行检测，但这对大多数车间检验来说是不可行的。大型凹球面镜可按图11.16所示的方式进行检验，因为这样没有共轭球差。这时必须使两个共轭点距离很短，以避免像散。此距离应小于

$$\frac{R\sqrt{\lambda R}}{D} \tag{11.3}$$

其中，R为凹面镜曲率半径；D为其直径。例如，当$R=1\text{m}$、$D=200\text{mm}$时，则共轭点距离必须小于7mm。

抛物面镜的一个共轭点位于无穷远处。对于短焦比的抛物面来说，星点检验肯定不是最好的方法。但从另一个角度来看，在星点检验中把抛物面镜作为检验其他系统的准直仪却是非常有用的。通常情况下，第12章中所述的零检验光路都可以用来检测二次曲面。

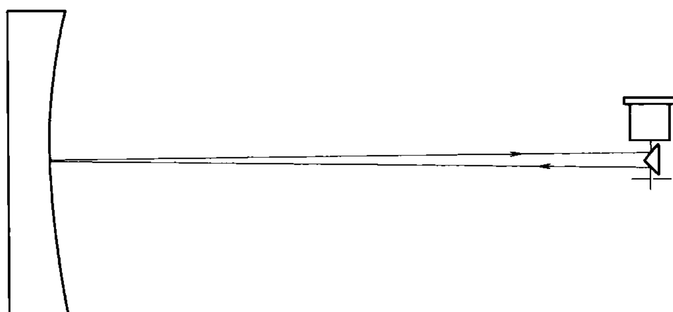


图11.16　大型凹球面镜的检验（直角棱镜两面镀铝作为反射面。对短焦比被检镜面而言，观测目镜必须由低倍显微镜代替。注意照明针孔光束要充满整个反射面。同样，显微镜目镜要有足够大的数值孔径以接收反射回来的光线）

11.3.4　显微镜物镜

星点法特别适用于检测显微镜物镜（Martin and Welford，1971）。此时的检验技术与之前所述明显不同。通过在显微镜载玻片上真空镀铝或镀银，并且在放上盖玻片之前用干净布块轻轻擦拭就能得到人造星点。如果载玻片在镀膜前没有极其仔细地清洁，则擦拭时就会出现一些适合作为人工星点的针孔。斯莱特（Slater，1960）曾介绍过另一种制作针孔直径小到0.1μm的技术。用亮灯及显微镜台下的高效率聚光器即能对显微镜物镜进行星点检验。

正像在本章一开始谈到的那样，星点检验被用于大数值口径物镜最后阶段的关键空气间隔快速调整，以平衡球差校正量。这时，物镜的球差无论对盖玻片厚度（浸没式物镜除外）还是对放大率都很敏感。如果显微镜有镜筒，则放大率由镜筒长度决定。因此对关键件的检测，必须选择合适的盖玻片厚度以使当前目镜有最小的球差（通常是高级球差的组合）。另

一方面，我们还能根据已给出的盖玻片厚度确定可使物镜性能最好的放大率。

星点检验还便于检测所说的平面场物镜的平直度及复消色物镜的色差校正情况。最后我们知道，某些氟化钙玻璃对光的散射非常强，星点检验也能给出复消色透镜或近复消色透镜中的氟化钙是否也具有这种不理想的性质。当散射很强时，可以看到散色光是以雾状形式出现在星点像周围，这很容易从衍射环中识别出来。

11.4 大像差星点检验

星点检验也能对如摄影物镜、投影物镜、电视摄像机物镜等这些像差校正精度不到衍射极限的物镜进行简单有效的定量检测。通常把被检系统安置在一个有准直仪的节点滑动光学平台上（Kingslake，1932），如图 11.17 和图 11.18 所示。当然，也可以这样测量离轴像差。赖斯特纳等（Leistner et al.，1953）的文献中有这类光学平台详细的介绍。

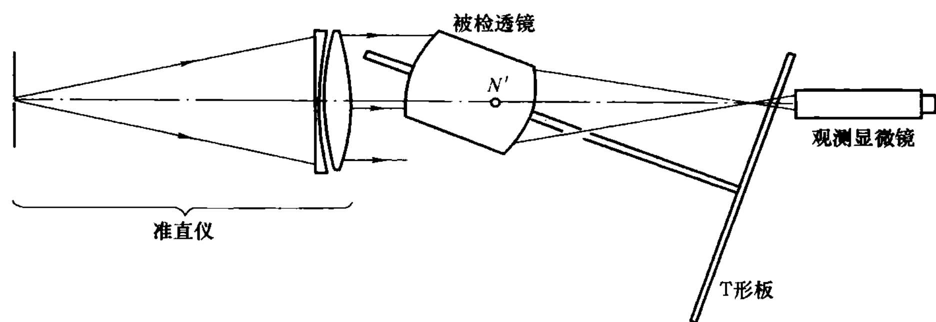


图 11.17 测量照相物镜及类似系统所用的节点滑动光学平台（T 形板代表被检透镜光轴和焦平面。当它转离光轴时，将推动观测显微镜。因此，显微镜总是聚焦在正确的焦平面上。但在有些方案中，显微镜不移动而是通过联动装置移动被检物镜；还有一些则没有 T 形板，必须计算出显微镜的移动量。）

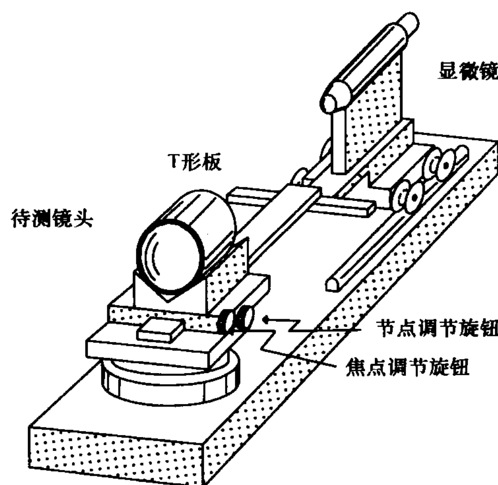


图 11.18 镜头检测节点平台的透视示意

大像差星点检验与小像差检验在原理上差别很大。对于后者，我们是研究点扩散函数的衍射结构，并根据经验尽可能确定像差的类型和大小；但对于大像差，其本质是用几何光学的概念确定光线像差。万德斯莱（Wandersleb，1952）给出了一些像差非常大的点扩散函数的相片。

11.4.1　球差

我们首先把待测物镜固定在光轴上，并用合适的滤波片滤波。然后，在被检系统的口径处放置一组环状光阑，并测量从每一环出射的汇聚光束焦点，如图11.19所示。该方法可得出纵向球差曲线，并还可用通用方法把它处理为球差的其他形式。也就是说，由纵向球差可以算出横向球差。

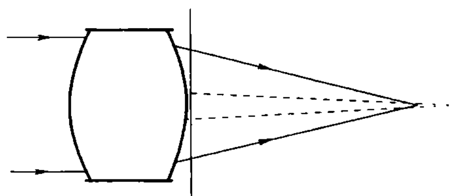


图11.19　通过环带遮拦板测量纵向球差（虚线表示近轴光线）

除了与11.4节中所介绍的其他方法一样，该方法的光路结构还有一个优点，就是针孔完全不受衍射极限的限制。它不仅提供了更多的光通量（这在大多数情况下很有用），而且更容易判定光线相交位置。

这里还有一个只能给出定性像差图像的快速检测方法。只需用一个不透光的直尺挡住半个孔径，如图11.20所示，并观看不同焦平面上的图像就可以了。正如图11.20中所给出的那样，可以在光轴两侧看到作为像差特征的半圆形环带。稍有经验的人就能容易地解释这个图像。图11.21所示为球差在焦点处和焦点内、外位置的图像。

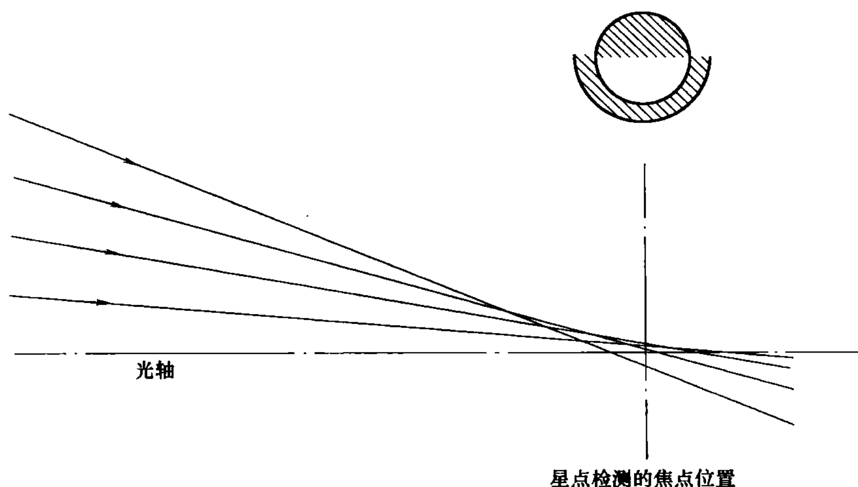


图11.20　半孔径遮拦测量球差（图中焦平面的阴影部分为亮条纹）

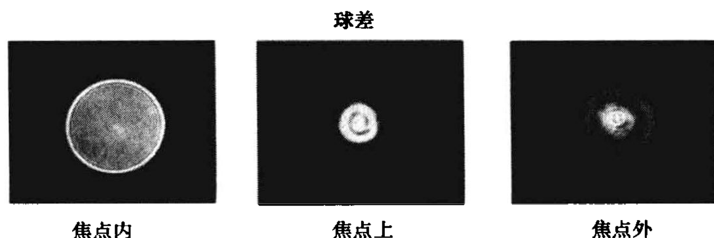


图11.21　球差在焦点处和焦点内、外位置的图像

11.4.2 纵向色差

先加上合适的滤波片并缩小通光孔径，直至球差小到可以忽略时为止。然后，通过测定不同波长的焦点位置即可直接绘出纵向色差图。如果用环形光阑还能测出球色差，但这样的精度在车间实际使用中没有什么价值。与测球差相同，用直尺挡住半个孔径，但去掉光源处的滤光镜，得到的色彩分布即能快速地得到色差校正情况。

11.4.3 轴对称性

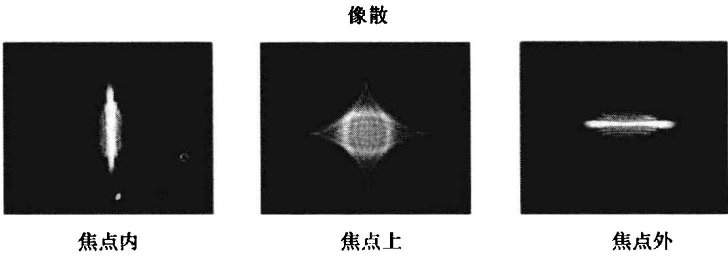
在11.4节中所涉及的那些被检系统中，常会发现由于装配误差积累而造成的不对称性。这对于变焦镜头更为明显，即在变焦过程中会出现偏心。轴上星点像能给出一个关于定心情况的即时检查。如有需要，还可以据此对像质进行调整。因此，在节点滑板上为待测镜头装一个精密的旋转机构是非常有用的。

11.4.4 像散和彗差

离轴转动镜头并轮流得到两条焦线即可给出弧矢焦线和子午焦线的位置图。当然，在此过程中还能观察到其他离轴像差（如彗差、横向色差等）。此时，我们只需把镜头光阑减到足够小，就可以消除甚至几乎完全消除球差和彗差。当然，光阑不能小到彗差也消失的程度。

在大口径系统中，同样可以选定一个视场角，然后旋转镜头观测像散焦线来检查镜头视场的对称性。有时，轴外检测比轴上检测更能发现更多的不对称性。视场像散的星点检测结果和彗差评估常结合起来调节大口径摄影物镜的空气间隔。图11.22所示为存在像散时的焦点处和焦点内、外所成图像。图11.23是相应的彗差图像。

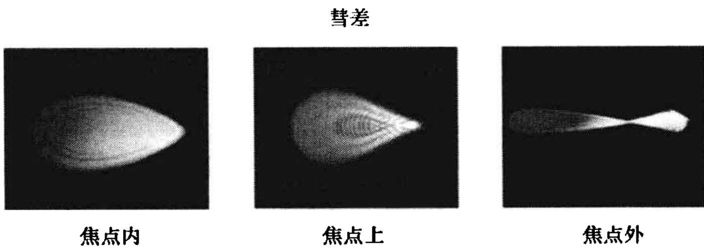
像散



焦点内　焦点上　焦点外

图11.22　存在像散时的焦点处和焦点内、外所成图像

彗差



焦点内　焦点上　焦点外

图11.23　存在彗差时焦点处和焦点内、外的图像

11.4.5 畸变

畸变的准确标定，例如对摄影测量物镜畸变的标定是一个很重大的课题。本书没有对此进行研究。然而值得注意的是用做星点检验的节点滑板光学平台也能简单测量畸变，这在许多情况下是有用的。

装上待测镜头后，我们按照如下步骤确定第二个节点下的节点滑板的轴旋转量。先在显微镜中找到星点像，然后转动滑板，使其稍微离开轴线。如果星点像移动，例如向左移动，就按照能使星点像回到显微镜视场中心的方向，把镜头沿着节点滑板移动，同时保持显微镜在焦点上。此过程中一直要持续到旋转节点滑板使星点像一点都不向旁边移动为止。但是我们几乎总是会发现镜头沿着节点滑板移动，没有一个位置可使星点像一点也不移动；而所能做到的最好情况也只能像图 11.24 所示那样，即星点像在经过一段短暂的偏离后又回到轴线上。这种残余偏移当然也是镜头畸变的一种表现形式。图 11.24 中实线表示可能测得的位置。为给出视场的立方和更高次方的畸变虚线图，常常减去适当的线性项。线性项的去除仅仅意味着对被检系统的名义焦距的选择稍有不同。

沃沙和达林（Washer and Darling，1959）给出了该方法更详细的介绍及误差分析。

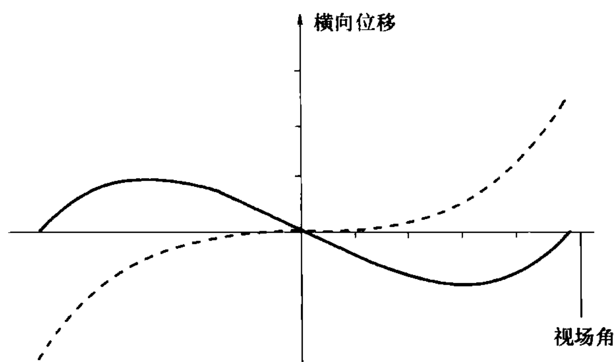


图 11.24 偏差测量（假设能找到节点轴的原点位置，图中实线表示星点的横向位移关于视场角的函数；虚线表示线性项的影响，这一影响相对于在节点近轴方向有一个偏移。）

11.4.6 非零位检验

看得出来，目前为止我们仅仅考虑了零位检验，也就是说系统测量是应该没有像差的。但有时需要检验系统像差是否与预先规定的非零像差一致。一个经典的例子当然就是具有等共轭距的抛物面镜，它比有一个共轭点在无穷远处的抛物面镜在几何学上要方便得多。另一个例子是在红外光中使用的非球面单透镜，因为其像差可能会与可见光检测得到的结果不同。

因为星点检验并不是非常准确的定量检验，即使在 11.3 节中所述的大像差测量也是这样。所以最好增加一个具有所需像差的辅助光学系统将非零位检验转换为零位检验（参见第 14 章内容）。这个辅助系统的设计应可以简单而精确地制造出来。多尔（Dall，1947）介绍了广泛用于抛物面零位检验辅助透镜光学系统。此外，还报道了许多其他辅助系统。

如果可用激光光源对系统进行检测的话，另一个可采用的新方案是使用计算全息作为辅

助系统。伯奇和格林（Birch and Green，1972）对此给出了有效的论述。只要计算机绘图系统具有足够的分辨率能绘出计算机全息图，那么就可以合成任何想要的波面。像平常所说的那样，计算全息补偿器虽然只是干涉测量系统中的一部分，但却同样可用于得到有像差的波面以投射到被检系统上。如果系统确定已知像差，得到的就是无像差星点像。

11.5 由测得的斜率和曲率恢复波前

根据测得的波前斜率和曲率，通过泊松方程积分就可以得到波前面形。下面几节对该方法进行了说明。反过来就存在多种方法可以计算出波前任意位置的斜率和曲率，典型算法有哈特曼（Hartmann）、朗奇（Ronchi）检验和径向剪切干涉测量。但有趣的是，通过测量离焦像强度也可以得到局部斜率和曲率，这样星点检验就成为了定量检验方法。

11.5.1 拉普拉斯变换和局部平均曲率

基于贝克（Beckers，1994）1979 年提出的方案，柔迪尔等人（Roddier et al.，1988）得到了通过测量离焦星点像的局部曲率计算波前形状的方法。几乎为平面的波前在 x 和 y 方向的曲率 c_x 和 c_y 为

$$c_x = \frac{\partial W^2(x,y)}{\partial x^2} \qquad c_y = \frac{\partial W^2(x,y)}{\partial y^2} \tag{11.4}$$

拉普拉斯算子定义为

$$\nabla^2 W(x,y) = 2\rho(x,y) = \frac{\partial W^2(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial W^2(x,y)}{\partial y^2} \tag{11.5}$$

其为局部平均曲率 $\rho(x,\ y)$ 的两倍。这就是著名的泊松方程。要解出该方程得到畸变波前 $W(x,\ y)$，需要知道：①局部平均曲率分布函数 $\rho(x,\ y)$，其为标量函数；②圆形光瞳边缘的波前径向斜率值，即所谓的纽曼边界条件。

可以使用雅可比（Jacobi）迭代算法或傅里叶迭代算法解出这个泊松方程（Roddier et al.，1988）。下面给出傅里叶迭代算法。

11.5.2 傅里叶变换迭代计算波前

哈德等（Hardy et al.，1977）通过测量斜率差求得波前曲率，并据此解出泊松方程求得波前。将 x 方向的相邻斜率差作为该方向的曲率，y 方向的曲率也这样得到。然后算出相关曲率的平均值。其中使用了哈金（Hudgin，1977）算法求解出泊松方程。

柔迪尔等人（Roddier and Roddier，1991；Roddier et al.，1990、1991）报道了根据拉普拉斯算子求解畸变波前 $W(x,\ y)$ 的方法。该方法根据已测得局部斜率，采用迭代傅里叶变换求解泊松方程。为了更好的说明这种方法，将波前的拉普拉斯算子进行傅里叶变换为

$$\mathscr{F}\{\nabla^2(x,y)\} = \mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2}\right\} + \mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2}\right\} \tag{11.6}$$

反过来，根据傅里叶变换理论的微分法则有

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}\right\} = \mathrm{i}2\pi f_x \mathscr{F}\{W(x,y)\} \tag{11.7}$$

同理 y 方向的偏导数也适用微分法则。再次根据微分法则，我们可以写出

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial^2 x}\right\}=\mathrm{i}2\pi f_x\mathscr{F}\left\{\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}\right\}=-4\pi^2 f_x^2\mathscr{F}\{W(x,y)\} \tag{11.8}$$

据此，下面的公式成立

$$\mathscr{F}\{\nabla^2(x,y)\}=-4\pi^2\mathscr{F}\{W(x,y)\}(f_x^2+f_y^2) \tag{11.9}$$

因此，在傅里叶定义域内，拉普拉斯算子的傅里叶变换可以转换为波前 $W(x, y)$ 的傅里叶变换与 $f_x^2+f_y^2$ 的乘积。

如果测得了 x 和 y 方向的有效斜率值，接着就可以算出波前。与哈特曼、朗奇检验和径向剪切干涉仪相同，波面可通过下面的公式计算得到

$$W(x,y)=-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{f_x\mathscr{F}\left\{\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}\right\}+f_y\mathscr{F}\left\{\frac{\partial W(x,y)}{\partial y}\right\}}{f_x^2+f_y^2}\right\} \tag{11.10}$$

该方法虽然简单，却仅适用于没有光瞳遮拦的波前。因为光瞳的实际大小是有限的，所以拉普拉斯算子还需要乘以光瞳函数。因此，拉普拉斯的傅里叶变换还需要与光瞳函数的傅里叶变换求卷积。所以，根据前面给出的方法求得的结果并不正确。这里就需要傅里叶空间的切趾处理，也就是将光瞳边界引入的频率滤除，以此来推断出光瞳外的条纹，见格西贝格（Gershberg，1974）算法。分母 $f^2+f_y^2$ 产生了这样的频率滤除效果。与格西贝格算法一样，在进行傅里叶逆变换后，这样的滤波将导致波前不再被限制在光瞳之内而超出初始边界。

从图 11.25 中可以看出，波前的复原是一个迭代过程。

我们也可以对波前的拉普拉斯算子进行傅里叶变换得到波前，即将傅里叶变换结果除以 $f_x^2+f_y^2$ 并进行傅里叶逆变换，公式如下

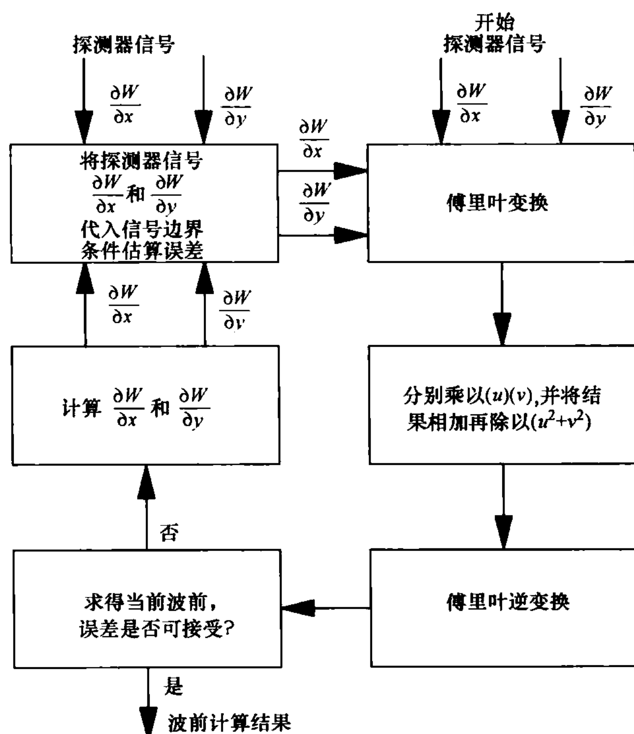


图 11.25 通过被检斜率来计算波前的傅里叶变换迭代算法流程图（Roddier，1991b）

$$W(x,y) = -\frac{\mathrm{i}}{4\pi}F^{-1}\left\{\frac{F\{\nabla^2 W(x,y)\}}{f_x^2 + f_y^2}\right\} \tag{11.11}$$

基于式（11.11）的迭代算法由柔迪尔和柔德尔（Roddier and Rodder，1991a、1991b）提出，如图 11.26 所示。该迭代算法与前面刚刚给出的算法类似。波前的拉普拉斯算子由两幅离焦像给出，具体方法如下节所述。光瞳边缘小区域内的径向斜率取零设为纽曼边界条件。为了更好地理解该边界条件，我们认为光瞳边缘的波前斜率是光瞳边缘内、外两边的斜率差。如果外侧的斜率为零，那么曲率必等于内侧的斜率。换句话说，如果外边界斜率为零，径向边界斜率不是任意独立于内侧曲率的。

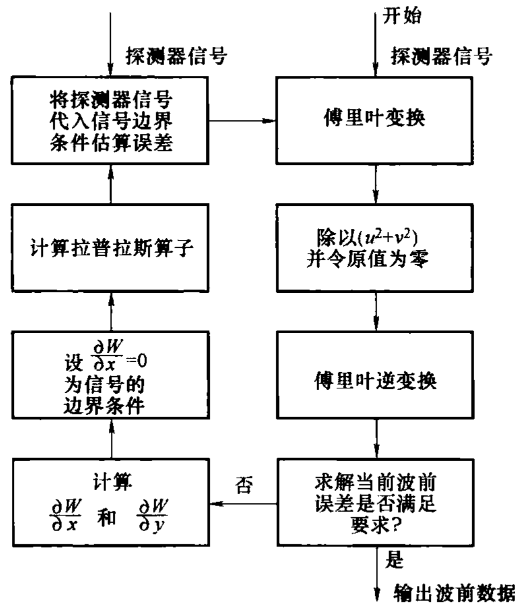


图 11.26 由拉普拉斯算子计算波前的傅里叶变换迭代算法流程（Roddier，1991b）

11.5.3 光强传递方程

为了解释由离焦星点像得到局部曲率和与之相关拉普拉斯算子，我们根据衍射理论建立了成像模型。假定光束通过 $x-y$ 平面的衍射孔径（光瞳）并沿着平均传播方向 z 轴方向传播。与波前（相前）一样，辐照度也是随着传播方向连续变化的。如果衍射孔径比波长大得多，惠更斯衍射子波的发散角就很小。因此，我们认为子波波前近似为抛物面。这相当于几何光学近似。然后，根据蒂格（Teague，1983）和斯德伯（Steibl，1984）给出的微分方程，$x-y$ 平面上的任意 z 位置的波振幅为

$$\nabla^2 u(x,y,z) = 2k^2 u(x,y,z) + 2\mathrm{i}k\frac{\partial u(x,y)}{\partial z} = 0 \tag{11.12}$$

与亥姆赫兹（Helmoltz）衍射方程不同，这里 $u(x, y, z)$ 是含有振幅和相位的波振幅。其中，波数 $k=2\pi/\lambda$。假设该方程的解具有如下形式

$$u(x,y,z) = I^{1/2}(x,y,z)\exp(\mathrm{i}kW(x,y,z)) \tag{11.13}$$

这里$I(x, y, z)$为光强。如果我们将振幅$u(x, y, z)$带入微分方程，得到的复函数应为零。也就是其实数部分和虚数部分都等于零，这样就得到两个方程。实数方程为

$$\frac{\partial W}{\partial z}=1+\frac{1}{4k^2I}\nabla^2 I-\frac{1}{2}\nabla W\cdot\nabla W-\frac{1}{8k^2I^2}\nabla I\cdot\nabla I \tag{11.14}$$

这就是我们所知的相位传递方程，通过这个方程可以得到任意传播位置的波前形状。第二个方程为

$$\frac{\partial I}{\partial z}=-\nabla I\cdot\nabla W-I\nabla^2 W \tag{11.15}$$

式（11.15）即为光强传递方程。伊其卡万等（Ichikawa et al.，1988）报道了基于此方程求得相位的实验验证。在这两个公式中，为了书写简便，省略(x, y, z)关系式。拉普拉斯算子和梯度算子只针对x和y方向。根据伊其卡万给出的一个有趣的讨论，我们给出了光强传递方程中两个代数项的解释：

1）梯度$\nabla W(x, y, z)$表示波前局部斜率（倾斜）的大小和方向。梯度$\nabla I(x, y, z)$是光强改变最快的方向。因此，它们的标量积$\nabla I(x, y, z)\cdot\nabla W(x, y, z)$就是由于局部波前斜率导致的沿光轴方向的光强变化值。伊其卡万将此项称为棱镜项。

2）第二项$I(x, y, z)\nabla^2 W(x, y, z)$可以认为是沿$z$轴方向的光强。其由波前平均曲率引入。伊其卡万等（Ichikawa et al.，1988）称此项为镜头项。

因此，上述两项表达式给出了沿z轴传播时，由于波前畸变导致的光束强度变化情况。如前面所指出的一样，传播方程采用了几何光学近似。只要孔径与波长相比足够大，孔径不是很锐利，这个方程就是有效的。只有衍射效应可以忽略，且离焦量很大时可以根据该方程计算出离焦像形状。

为了该方程性质有更深入的认识，将此方程改写为

$$-\frac{\partial I(x,y,z)}{\partial z}=\nabla I\cdot[I(x,y,z)\nabla W(x,y,z)] \tag{11.16}$$

因为∇W为波前局部斜率矢量，我们可以看出该传递方程表示了光能守恒原理。这与质量守恒和电量守恒原理具有相类似的表达形式，后两者常表示为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\nabla\cdot(\rho\nu) \tag{11.17}$$

式中，ρ和ν分别为质量或电量的密度和流速。

11.6 根据光强传递方程由两幅离焦像求解波前

由分别位于焦内和焦外的两幅大离焦像，根据传递方程（Roddier，1990）可以求得波前曲率、拉普拉斯算子及相应的波前。

柔迪尔等（Roddier et al.，1990）将光瞳函数$P(x, y)$光瞳内设为1，光瞳外设为零。并且假设光瞳平面内是均匀照明等于常数I_0。因此，除光瞳边缘外，光瞳平面任意位置的光强梯度$\nabla I(x, y, 0)$等于零。光瞳边缘的光强梯度为

$$\nabla I(x,y,z)=-I_0\boldsymbol{n}\delta_c \tag{11.18}$$

式中，δ_c为光瞳边缘的狄拉克分布；$\boldsymbol{n}$为垂直于光瞳边界并方向朝外的单位矢量。

反过来，根据这个光瞳函数，W在光瞳平面的梯度为

$$\nabla W = \frac{\partial W}{\partial \rho} \tag{11.19}$$

其中，ρ 为径向半径坐标，定义为 $\rho^2 = x^2 + y^2$。将光强梯度和波前值带入光瞳平面的光强传递方程，可以得到

$$\left(\frac{\partial I(x,y,z)}{\partial z}\right)_{z=0} = -I_0 \cdot \left(\frac{\partial W(x,y,z)}{\partial \rho}\right)_{z=0} \delta_c - I_0 P(x,y) \nabla^2 W(x,y,z) \tag{11.20}$$

其中，方程右边的微分是波前微分，其方向为垂直光瞳边缘朝外。通过测量衍射光阑左右对称平面位置的光强差可以得到曲率，如图 11.27 所示。因此，这两个观测平面上测得的光强为

$$I_1(x,y,+\Delta z) = I_0 + \left(\frac{\partial I(x,y,z)}{\partial z}\right)_{z=0} \Delta z$$

$$I_2(x,y,-\Delta z) = I_0 + \left(\frac{\partial I(x,y,z)}{\partial z}\right)_{z=0} \Delta z \tag{11.21}$$

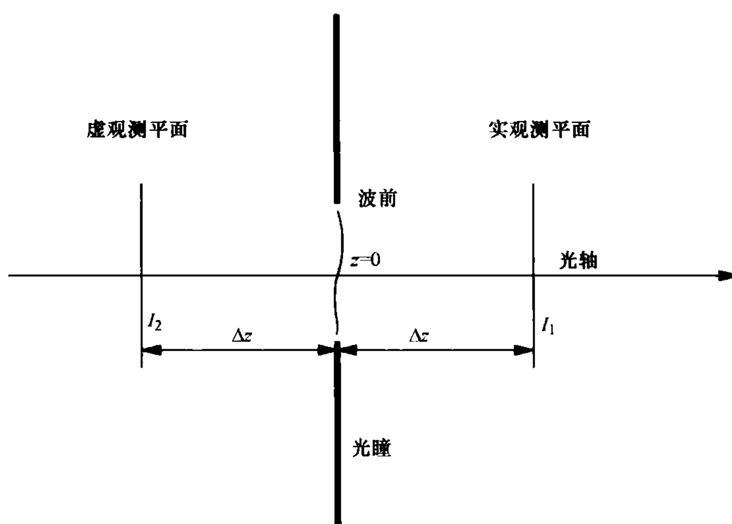


图 11.27 光瞳左右对称两平面测得的光强

当光瞳处的波前为理想平面时，光瞳内所有点的拉普拉斯算子和光瞳边缘的径向斜率等于零。

这时，$I_1(x,y,+\Delta z) = I_2(x,y,-\Delta z)$。得到这些值后，可以给出探测信号为

$$s(x,y,\Delta z) = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = \frac{1}{I_0}\left(\frac{\partial I(x,y,z)}{\partial z}_{z=0} \Delta z\right) \tag{11.22}$$

将式（11.19）带入式（11.21）有

$$\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = \left(\frac{\partial W(x,y,z)}{\partial \rho}\delta_c - P(x,y)\nabla^2 W(x,y)\right)\Delta z \tag{11.23}$$

因此，根据与光瞳平面（$z=0$）对称的两平面位置的光强 I_1 和 I_2，可以得到方程左边表达式的。这就给出了孔径内所有点 $W(x,\ y)$ 的拉普拉斯算子（局部平均曲率）。同时也给出了光瞳 $P(x,\ y)$ 边界的波前斜率 $\partial W/\partial n$，并将其作为求解泊松方程时的一个纽曼边界条件。

测量光强的平面位置必须关于衍射光瞳对称。也就是说，一个平面是实平面，因为其位

于光瞳后方，而另一个平面是虚平面，因为其位于光瞳前方。实际上，这个问题的解释很简单，因为衍射孔径就是待测透镜的光瞳，典型的例子就是望远镜目镜。

如图11.28所示，距焦点内侧 l 的平面与距光瞳后方 Δz 的平面是共轭的。如果在目镜焦点处放置一个焦距为 $f/2$ 的小透镜，则情况恰好相反。此时，距离目镜焦点后 l 的平面与距离光瞳前 Δz 的平面共轭。l 和 Δz 的关系为

$$\Delta z = \frac{f(f-l)}{l} \tag{11.24}$$

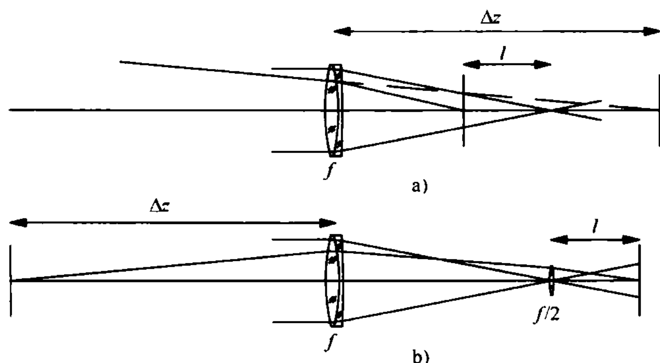


图11.28　两个共轭平面（第一个平面在光学系统前，距离光瞳 Δz，第二个平面在折射系统后，距离系统焦点 l。）
a）当第一个平面在光瞳后，则第二个面在焦点内　b）当第一个面在光瞳前，则第二个面在焦点外（这时需增加焦距为 $f/2$ 的辅助透镜。）

柔迪尔和柔迪尔（Roddier and Roddier，1991）指出，如果 l 比 f 小，那么焦距为 $f/2$ 的透镜是不必要的。必须注意的是，其中的一幅离焦像与另一幅相比旋转了180°，还有就是两幅图的放大倍数有可能不同。最值得注意的是，测得的两幅光强图像的相互加减必须对应光瞳上相同的（x，y）点。

光强的测量必须距光瞳足够近，这样才能忽略衍射效应，几何光学近似也才能成立。假设待测波前的扰动和畸变量为 r_0（最大空间周期）。根据衍射光栅方程，可以知道波前扰动在一个孔径角为 $\alpha = \lambda / r_0$ 的锥形空间中传播。因此，观察面上的光照度可以认为是一个模糊的光瞳像。我们规定能容忍的最模糊像的距离 Δz 等于 $r_0/2$。在这个条件下表明，只有当 Δz 足够小时，强度传递方程中默认的几何光学近似才是有效的。因此，需满足以下条件

$$\Delta z \ll \frac{r_0^2}{2\lambda} \tag{11.25}$$

有趣的，距离 Δz 是塔尔博特（Talbot）自成像中的瑞利距离的四分之一。由于光栅投影运用的也是几何光学，因此这个结果是意料之中的。如果已知光束扩散角 α，且等于望远镜接收到的大气光束扩散角，也可以写为

$$\Delta z \ll \frac{\lambda}{2\alpha^2} \tag{11.26}$$

当检测汇聚光束时，该条件意味着离焦距离 l 应足够大，所以

$$l \gg \frac{f}{1 + \dfrac{r_0^2}{2\lambda f}} \tag{11.27}$$

可以得到下面的结论，离焦距离的最小值取决于被检波前扰动的最大空间频率。这个频率同样决定了测量离焦像光强的采样密度。

11.7 根据傅里叶迭代变换由一幅离焦像求解波前

如果离焦距离不能做到足够大，光强传递方程所假设的几何光学近似条件就不成立。此时，衍射效应对标准的星点检验有很大影响。前面几节所述的方法就不再适用。因此，必须给出一个不同的迭代算法。

格西贝格和萨克斯顿（Gershberg and Saxton，1972）给出了只需单幅焦内离焦像的算法，而不需要两幅离焦像，步骤如下：

1）任意假设一个畸变波前（相位和光瞳透过率）。光瞳透过率通常为 1，相位可以为任意值。

2）对焦点内的观测平面的强度图（振幅和相位）进行快速傅里叶变换。

3）用观测得到的振幅（观测强度的平方根）替代计算得到的振幅，并且保留计算得到的相位。

4）通过傅里叶逆变换给出光瞳平面的波面振幅和相位（畸变波前）新的估计值。

5）计算出来的输入振幅由已知的输入振幅（光瞳透过率）所替代，保留计算出的相位。

重复上述步骤，直到测得的振幅值与计算结果的差值足够小。这个算法开始收敛很快，后面将没有什么效果。

11.8 根据菲涅耳变换迭代由两幅或三幅离焦像求解波前

菲那普和万克曼（Fienup and Wackermann，1987）介绍了一种根据傅里叶变换的模重建图像的改进方法，该方法更容易收敛并且避免不收敛的情况。米赛尔（Misell，1973a and 1973b）发现，使用两幅图像，一幅位于焦点，一幅位于焦外，能得到更好的结果。与格西贝格和萨克斯顿算法一样，在光瞳和焦点图像之间进行快速傅里叶变换迭代运算，或者是在光瞳和光瞳焦外像之间迭代运算。为了计算焦外像，一个二次相位因子加入到了光瞳函数的复振幅相位中。这个因子引入了所需要的离焦像。这个方法称为菲涅耳变换，因为这时的图像不在焦点内。

柔迪尔和柔迪尔（Roddier and Roddier，1991b）进一步讨论了一种改进的米赛尔方法，这被用来计算哈勃望远镜有缺陷的主镜面形。他们指出较大离焦量相对于较小离焦量的计算结果更加准确。虽然离焦量越大越好，但不能大到几何光学近似不再成立。为了更好地理解怎样得到这样的离焦图像，我们对图 11.29 进行分析。图中位于 P 位置的光学系统光瞳产生了一个近轴焦点位于 F 处的一个像差（非球面）波面。如果对光瞳处的复振幅取傅里叶变换，其相位由波面和中心位于 F 处的参考球面确定，就能得到近轴焦点处图像的复振幅。如果相位由波面和中心位于位置 3 的参考球面波（图中虚线所示）的距离决定，对光瞳位置的复振幅取傅里叶变换就得到了平面 3 图像的复振幅。这就是前面所说的菲涅耳变换。柔迪尔等注意到这个方法可能带来误差。因为当关于参考球相位差的径向斜率很大时，可能会引入采样差。

还有一种方法是分两步从光瞳面到所需离焦观测面，先从光瞳 P 到最佳焦点位置 1。该焦点位置使得离焦波前与参考球的离焦量最小。然后取不同的离焦因子进行傅里叶逆变换就

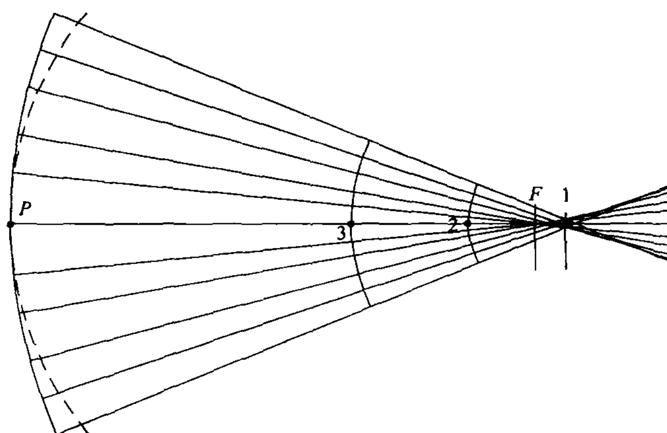


图 11.29　三个平面上观测得到的非球面波前

三个平面为：最佳焦点位置 1；近轴焦点位置 F；离焦像位置 2 和 3。

得到了所需离焦面的图像。这个方法意味着原本一次的傅里叶变换变成了两次，但是可以得到更好的结果。如图 11.29 所示。该方法使用了三个观测位置。第一步是给出初始的光瞳复振幅猜测值并计算最佳焦点 1 处的图像。保留计算得到的相位，用测得的振幅替代计算得出的振幅；然后使用不同的离焦因子通过傅里叶逆变换得到平面 2 处的复振幅；最后在平面 1 和 2 上进行这种迭代运算且不再回到光瞳系统。当收敛减慢时，不再使用图像 2，而在平面 1 和 3 之间进行迭代。图 11.30 所示为柔迪尔提出的用于哈勃望远镜重复搜索波前与光瞳强度的流程图。图 11.31 所示为柔迪尔算法中评估哈勃望远镜所用的三幅图像。图 11.32 所示为哈勃望远镜的评估结果。

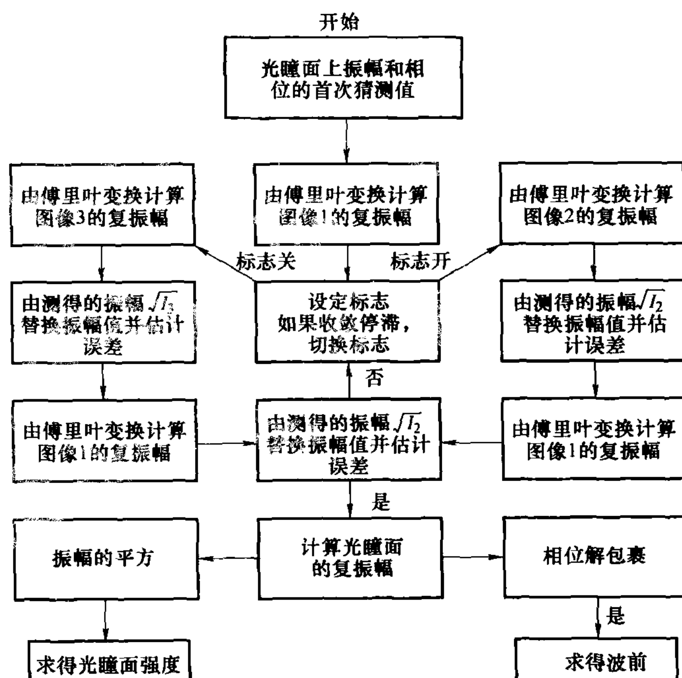


图 11.30　柔迪尔和柔迪尔（Roddier and Roddier, 1991a）提出的用于哈勃太空望远镜重复搜索波前和光瞳强度的流程

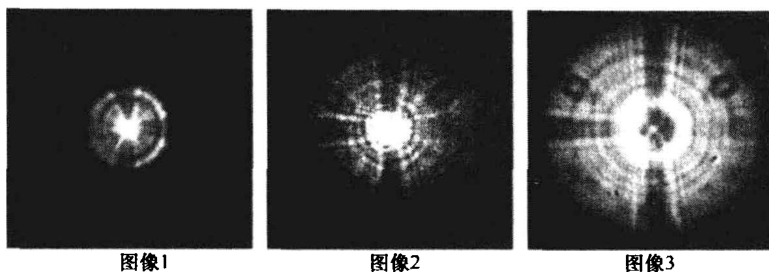


图 11.31 柔迪尔算法中评估哈勃望远镜所用的三幅图像（Roddier and Roddier, 1991a）

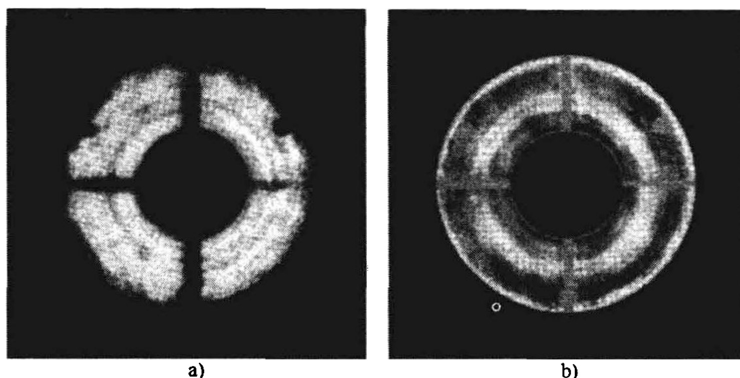


图 11.32 哈勃望远镜的评估结果（Roddier and Roddier, 1991a）
a）光瞳面强度 b）去除离焦和球差项的波前

参考文献

Barakat R. and A. Newman, "Measurement of Total Illuminance in a Diffraction Image. I: Point Sources," *J. Opt. Soc. Am.*, **53**, 1965 (1963).

Beckers J. M, "Interpretation of Out-of-Focus Star Images in Terms of Wave-Front Curvature," *J. Opt. Soc. Am. A.*, **11**, 425-427 (1994).

Beiser L., "Perspective Rendering of the Field Intensity Diffracted at a Circular Aperture," *Appl. Opt.*, **5**, 869 (1966).

Birch K. G. and F. J. Green, "The Application of Computer-Generated Holograms to Testing Optical Elements," *J. Phys., D: Appl. Phys.*, **5**, 1982 (1972).

Born M. and E. Wolf, *Principles of Optics*, 5th Ed., Pergamon Press, Oxford and New York, 1975.

Cagnet, M., M. Francon, and J. C. Thrierr, *Atlas of Optical Phenomena*, Springer Verlag, Heidelberg and New York, 1962.

Dall, H. E., "A Null Test for Paraboloids," *J. Br. Astron. Assoc.*, **57** (1947); reprinted in Amateur Telescope Making, vol. 3, A. E. Ingalls, Ed., Scientific American, New York, 1953.

Fienup J. R. and C. C. Wackermann, "Phase-retrieval Stagnation Problems and Solutions," *J. Opt. Soc. Am. A.*, **3**, 1897-1907 (1986).

Gershberg R. W. and W. O. Saxton, "A Practical Algorithm for the Determination of Phase from Image and Diffraction Plane Pictures," *Optik*, **35**, 237 (1972).

Gershberg R. W., "Super-Resolution Through Error Energy Reduction," *Optica Acta*, **21**, 709–720 (1974).

Hardy J. W., J. E. Lefevre and C. L. Koliopoulos, "Real-time Atmospheric Compensation," *J. Opt. Soc. Am.*, **67**, 360-369 (1977).

Hudgin R. H., "Wave-front Reconstruction of Phase Values from Phase Differences," *J. Opt. Soc. Am.*, **67**, 375-378, 1977.

Ichikawa K., A. W. Lohmann, and M. Takeda, "Phase Retrieval Based on the Irradiance Transport Equation and the Fourier Transport Method: Experiments," *Appl. Opt.*, **27**, 3433–3436 (1988).

Kingslake R., "A New Bench for Testing Photographic Lenses," *J. Opt. Soc. Am.*, **22**, 207–222 (1932).

Kogelnik H. and T. Li, "Laser Beams and Resonators," *Appl. Opt.*, **5**, 1550–1567 (1966).

Leistner K., B. Marcus, and B. W. Wheeler, "Lens Testing Bench," *J. Opt. Soc. Am.*, **43**, 44 (1953).

Li Y. and E. Wolf, "Three-Dimensional Intensity Distribution Near Focus in Systems of Different Fresnel Numbers," *J. Opt. Soc. Am. A*, **1**, 801–808 (1984).

Linfoot E. H. and E. Wolf, "On Telescopic Star Images," *Mon. Not. Ry. Astron. Soc.*, **112**, 452 (1952).

Linfoot E. H. and E. Wolf, "Diffraction Images in Systems with an Annular Aperture," *Proc. Phys. Soc.*, **B66**, 145 (1953).

Martin L. C., *Technical Optics*, vol. 2, 2nd Ed., Pitman, London, 1961.

Martin L. C. and W. T. Welford, in *Physical Techniques in Biological Research*, vol. I, Part A, 2nd ed., G. Oster, Ed., Academic Press, New York and London, 1971.

Misell D. L., "An Examination of an Iterative Method for the Solution of the Phase Problem in Optics and Electron Optics. I: Test Calculation," *J. Phys. D., (Appl. Phys.)* **6**, 2200 (1973a).

Misell D. L., "An Examination of an Iterative Method for the Solution of the Phase Problem in Optics and Electron Optics. II: Sources of Error," *J. Phys. D., (Appl. Phys.)* **6**, 2217 (1973b).

Nienhuis K., *On the Influence of Diffraction on Image Formation in the Presence of Aberrations*, Thesis, J. B. Wolters, Groningen, 1948.

Roddier F., "Curvature Sensing and Compensation: A New Concept in Adaptive Optics," *Appl. Opt.*, **27**, 1223–1225 (1988).

Roddier F., "Wavefront Sensing and the Irradiance Transport Equation," *Appl. Opt.*, **29**, 1402–1403 (1990).

Roddier F., C. Roddier and N. Roddier, "Curvature Sensing: A New Wavefront Sensing Method," *Proc. SPIE.*, **976**, 203–209 (1988).

Roddier C., F. Roddier, A. Stockton and A. Pickles, "Testing of Telescope Optics: A New Approach," *Proc. SPIE.*, **1236**, 756–766 (1990).

Roddier C. and F. Roddier, "Wavefront Reconstruction Using Iterative Fourier Transforms," *Appl. Opt.*, **30**, 1325–1327 (1991b).

Roddier C. and F. Roddier, "Reconstruction of the Hubble Space Telescope Mirror Figure from Out-of Focus Stellar Images," *Proc. SPIE.*, **1494**, 11–17 (1991a).

Slater P. N., in *Optics and Metrology*, P. Mollet, Ed., Pergamon Press, Oxford and New York, 1960.

Stamnes J. J., *Waves in Focal Regions*, Adam Hilger, Bristol and Boston, 1986.

Steibl N., "Phase Imaging by the Transport Equation of Intensity," *Opt. Commun.*, **49**, 6–10 (1984).

Taylor C. A. and B. J. Thompson, "Attempt to Investigate Experimentally the Intensity Distribution near the Focus in the Error-Free Diffraction Patterns of Circular and Annular Apertures," *J. Opt. Soc. Am.*, **48**, 844 (1958).

Taylor H. D., *The Adjustment and Testing of Telescope Objectives*, Sir Howard Grubb, Parsons & Co., Newcastle-upon-Tyne, 1891; 4th Ed., 1946, 5th Ed. 1983, Adam Hilger Ltd, Bristol, UK.

Teague M. R., "Deterministic Phase Retrieval: A Green's Function Solution," *J. Opt. Soc. Am.*, **73**, 1434–1441 (1983).

Twyman F., *Prism and Lens Making*, Adam Hilger, London, 1942. 2nd Rev. Ed. 1988, Adam

Hilger, Bristol, UK.

Wandersleb E., *Die Lichtverteilung in Der Axialen Kaustik eines mil Sphoiirischer Aberration Behafteten Objektivs*, Academie-Verlag, Berlin, 1952.

Washer F. E. and W. R. Darling, "Factors Affecting the Accuracy of Distortion Measurements Made on the Nodal Slide Optical Bench," *J. Opt. Soc. Am.*, **49**, 517 (1959).

Welford W. T., "On the Limiting Sensitivity of the Star Test for Optical Instruments," *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 21 (1960).

第 12 章　非球面波前和镜面的检验

D. 马拉卡拉（D. Malacara），K. 克里斯（K. Creath），
J. 施密特（J. Schmit），J. C. 怀扬特（J. C. Wyant）

12.1　引言

使用球面和非球面镜的光学系统会产生带有球差的非球面波前。在光学系统中使用非球面镜可以减小像差，同时也可以减少光学元件的数量。然而，如果将非球面镜和它所属的系统分开，那么在测量时，它会产生非球面波前。众所周知，使用干涉法测量非球面波要比球面或平面波困难。

加工中，经常使用零位检验法来检验非球面镜。所谓的零位检验就是当获得理想波前时，产生无条纹区域的检验。如果在待检波前和参考波前之间加上一个倾角，并且二者的近轴曲率一样，就可以得到相互平行的直条纹。在这些条件下，任何与直条纹的偏离就是波前变形的图形表示。因为可以很容易地识别理想波前，并且可以用很高的精度测量它，所以这是一种很理想的测量方法。通常零位检验有多种方法，但是，有时候零位检验并不简单，而且可能会成为一种误差源。

通常，若要得到波前的量化信息，干涉图必须成像在 CCD 探测器上。那么，相对于理想波前，干涉条纹的直线度是非常有用的，但不是必需的。然而，最小条纹间隔应该大于探测器像素尺寸的两倍。这是由著名的奈奎斯特（Nyquist）条件决定的，在波前有较强的非球面性时，满足这一条件才能不损失有用信息。

在非佐（Fizeau）干涉仪或泰曼—格林（Twyman-Green）干涉仪中，当旋转对称的非球面波在近轴焦点干涉时，产生的干涉条纹太多，如图 12.1a 所示。在波前中添加一个小曲率，即增加离焦量，可以稍微减小干涉条纹的最小间距。例如，假设旋转对称非球面波前可以用下面的公式表达

$$W(S) = aS^2 + bS^4 \tag{12.1}$$

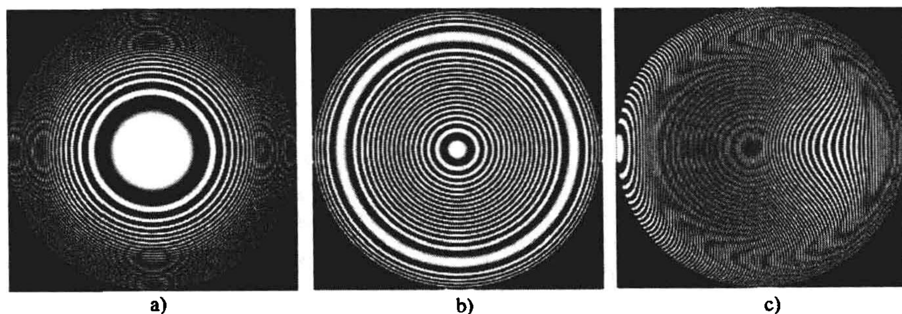


图 12.1　有初级球差的非球面波前干涉图

a）在近轴焦点，没有倾斜　b）在最佳焦点，无倾斜　c）在最佳焦点，有较大倾斜

式中，S 为距离光轴的径向距离（$S^2=x^2+y^2$）；等式右边第一项就是离焦量；第二项是非球面度（初级相差）。

离焦系数 a 应该仔细选择，以保证在光瞳口径内最小干涉条纹的间距尽可能的大。干涉条纹间距有波前倾角决定，所以最大波前倾角必须最小化。如果满足式（12.2），就可以满足最大波前倾角最小化的条件。三个不同焦点对应的波前初级球差如图 12.2 所示。

$$a=-\frac{3}{2}bS_{\max}^2 \tag{12.2}$$

这可以将干涉仪中最小干涉条纹间距增加 4 倍，如图 12.1b 所示。

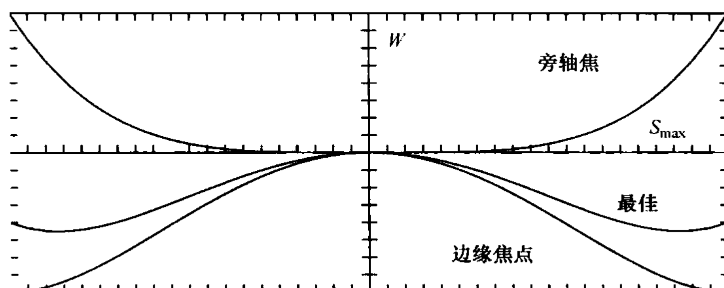
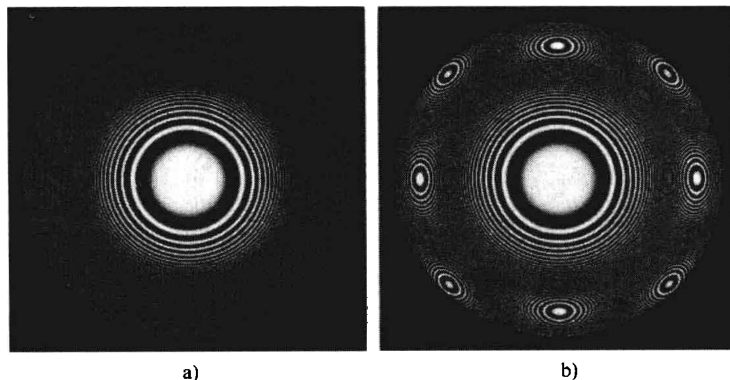


图 12.2 三个不同焦点对应的波前初级球差

为简化环形干涉条纹干涉图的分析，有时候必须使波前有较大倾角，以保证只有直条纹出现，如图 12.1c 所示。可以认为沿着 x 方向引入一个线性载体。在这些条件下，当沿水平方向扫描波前干涉图时，同一个干涉条纹不会被扫描两次。但是，这种方法的问题在于为产生直条纹而引入的大倾角会减小干涉条纹间距。在待测波前倾角与参考波前倾角之和最大的地方，干涉条纹间距会最小。

旋转对称的非球面波前的干涉条纹是一组同心环；在许多其他干涉图中，干涉条纹也是闭合的，进而形成环形条纹。这种干涉图很难分析，而且有时还必须使用一些特殊的复杂技术。另一个缺点（也是十分重要的一个）是：在光瞳的边缘附近，干涉条纹的间距十分小。

当对干涉图采样（不符合乃奎斯特条件）时，每个光瞳探测器测量的是光的平均光强。如果干涉条纹的间距小于像素尺寸的两倍，干涉条纹的像可能会丢失；如果这两个尺寸十分相近，如图 12.3a 所示，对比度会被极大地减小。如果像素的尺寸远比像素间距小，就会采集到一些错误的条纹，而不是低对比度的真实条纹，如图 12.3b 所示。这就是著名的混淆现象。大多数 CCD 探测器的像素间距和像素尺寸基本相等，所以条纹混淆不是普遍现象。



a) b)

图 12.3 有初级球差的非球面波前在近轴焦点的干涉图，且干涉条纹间距小于像素尺寸的两倍
a）像素尺寸等于像素间距 b）像素尺寸小于像素间距

12.2　一些检验非球面波前的方法

在本节中，将介绍几种已经应用的非球面检测方法。这些检验非球面表面质量的方法可以分成以下几类：

（1）使用古典的非零位检测方法可以定量的检测面形，首先用傅科（Foucault）、朗奇（Ronchi）或哈特曼（Hartmann）方法检测波前，然后用一定的数学方法计算表面相对于最佳球面的变形量。这种方法通常很费时；这类方法与干涉测量相比灵敏度低，如果非球面变形强烈，这类方法的测量精度不够高。这类方法在第 8 ~ 第 10 章已经介绍。

（2）对于旋转对称的二次曲面而言，总存在两个无球差的共轭焦距，如图 12.4 所示。如果待测面由曲率中心处在合适焦点上的发散或汇聚波前照亮，那么反射波前是球面波，非常容易测量。为产生必要的照明波前，一些辅助的光学元件是必需的。在下面的章节中，我们将会讨论一些零检验结构。

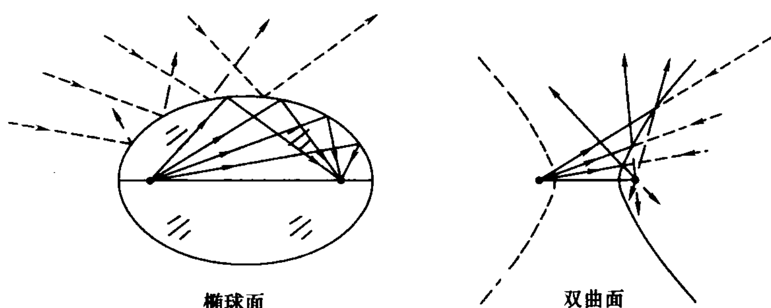


图 12.4　凸的、凹的椭球反射面和双曲面反射面

（3）往光学系统中添加一些额外的光学元件以补偿从球面表面反射回来的波前的球差。设计一个辅助的光学系统，它与非球面表面一起工作，形成点光源斑点像。我们称辅助的光学系统为零位校正器或零位补偿器，在本章中会有相关介绍。

（4）如果只需要采集一幅干涉图，并且非球面度不是太强烈，有几种干涉测量方法可以用来估计干涉图。然而，如果非球面度比较强烈，并且干涉条纹间距不大于探测器上像素间距的两倍，那么就无法对干涉图进行分析。只有用格恩卡普（Greivenkamp，1987）的方法，并且满足以下条件的时候，干涉图才可以被分析。

1）像素尺寸小于像素间距。在不满足乃奎斯特条件的地方会出现假条纹。

2）应该知道波前的一般形状。

3）预期波前是光滑的。采用合适的相位展开，直到重建的波前和它的斜面是连续的，问题就解决了。

（5）使用移相技术，即使产生的是环形干涉条纹，也可以不必引入波前倾斜而得到一系列非佐或泰曼-格林干涉图。必须设置不同的相移常数，采集一系列最小化的干涉图（三幅一组）。从数学角度来看，波前的评估就比较容易理解，但是从实验的角度来看，它就十分复杂了。第 14 章中将会详细介绍移相技术。当使用移相技术测量非球面波前时，离焦项必须仔细选择，以保证干涉条纹间隔能最小化。这一点前面已经讨论过，像前面所指出的，这项技术的局限性在于：为了符合乃奎斯特条件，必须使用最优化的调焦装置。

（6）如果波前与球面的偏差很大，甚至移相技术也无法测量镜面。在这些条件下另一个可行的办法就是将全口径波前分割成许多小区域，每个小区域内满足乃奎斯特条件，即在小区域内干涉条纹间距大于像素间距的两倍。这项技术有时会称为波前子孔径拼接技术，本章将会介绍这一技术。

（7）如果使用较长的波长，动态范围会得到增加，但是灵敏度会得到一定的下降。比如使用波长 10.6μm 的光，动态范围大约会增加 20 倍。

（8）大波长的光源和探测器是非常昂贵的。但是，可以用双波长的办法来解决这个问题。双波长方法就是使用两个波长不同的光同时曝光，得到一个相当于长波长的干涉条纹。这种干涉条纹可以使用移相的方法分析。如第 15 章和本章 12.13 小节所述，用不同的可见光可以合成不同的波长。

（9）用横向或径向剪切干涉测量法可以测量高非球面度的镜面，能提供一个很大的动态范围，但是灵敏度不高。横向或径向剪切干涉测量法在第 4 和第 5 章中已有介绍。

12.3 在非零位检测中干涉图的成像

有像差的波前会随着它的传播而发生变化；如果波前是非球面波，干涉图也会随着光束的传播而发生连续的变化，如图 12.5 所示。一个仪器的误差是用光瞳上波前的畸变来表示的，光瞳平面上的干涉图可以表示波前的畸变。

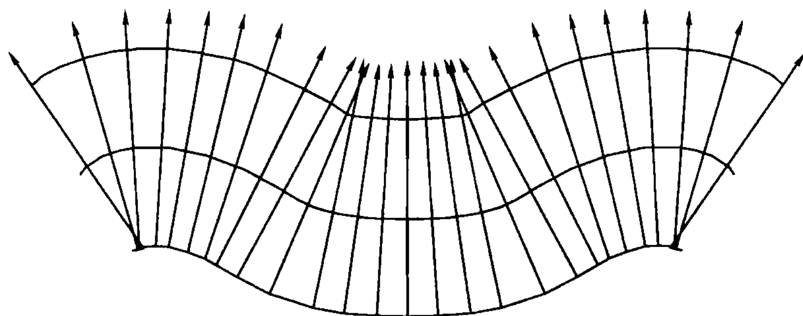


图 12.5 波前传播过程中的变化

如果波前在检测的过程中两次通过光学系统，情况会更糟。例如，在使用第 2 章所讨论的装置检验一个透镜时，波前就通过透镜两次；第二次通过是由处在透镜前面的反射镜将波前反射造成的。如果像差很小，波前两次通过时的像差是一次通过时的两倍。然而，如果像差很大，这个条件不成立了，这是因为在波前从透镜传播到反射镜、再返回透镜的过程中，波前发生了变化。于是，镜面上的缺陷不能通过凹面或凸面反射镜的反射成像与其自身重合，光线也就无法第二次通过有缺陷的地方。由于这些缺陷不能因为光线的两次通过而恰好增加一倍，这就给干涉图的识别带来很大的麻烦。

可以证明，被检透镜的像与被检透镜的距离 L 可以由下面的公式求出

$$L=\frac{2(F-r)^2}{2F-r} \tag{12.3}$$

式中，F 为被检透镜的焦距；r 为反射镜的曲率（$r>0$ 对应于凸面镜，$r<0$ 对应于凹面镜）。

从式（12.3）可以看出，最理想的情况是反射镜是凸的，并且其曲率非常接近被检透

镜的焦距（$r \sim F$）。

如果被检透镜的像差较大，为了使光瞳能和自身的像重合，必须选择适当的光路结构。光路中使用的任何辅助透镜或反射镜都不能影响波前。图12.6给出了一些例子（Malacara and Menchaca，1985）。

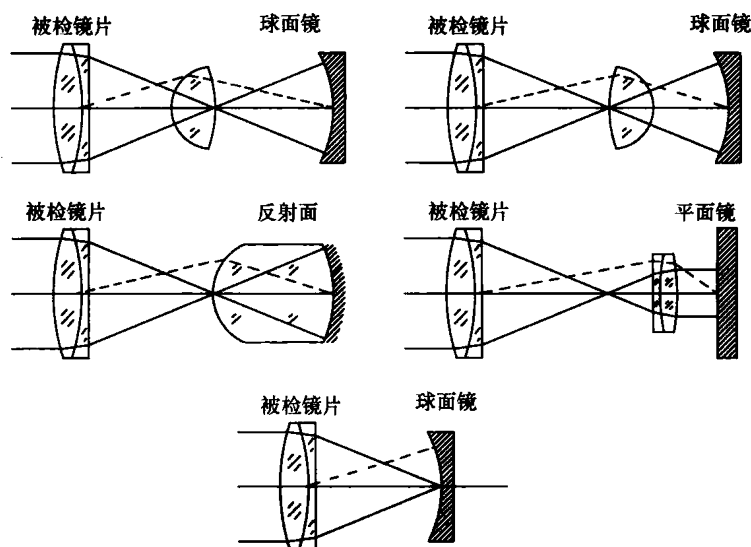


图12.6　经过反射镜后能使被检光学元件的光瞳与其像重合的系统

然而，对于显微镜物镜来讲，这一结论并不能让人满意，这是因为理想的条纹观察位置是在后焦点上。然而，图12.7所示的戴森（Dyson，1959）系统却能很好地满足这一要求。需要指出的是，戴森系统可以将自身的共轭平面置于凸面或凹面上，同时保证各个面同心。

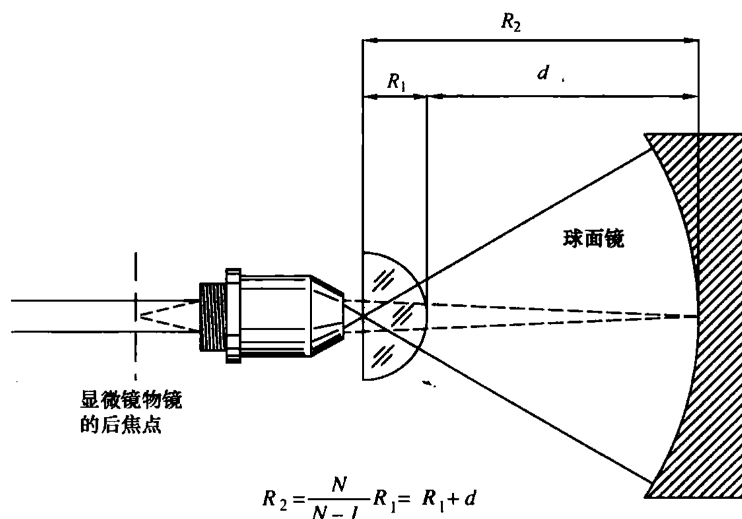


图12.7　戴森系统（波前经过一个凹面反射镜后，戴森系统能使显微镜物镜的后焦点与其像重合）

即使波前只通过被检光学系统一次，如何将干涉图成像在图像传感器、屏幕或照相底片上依然是个问题。如果成像透镜放置在分光镜后面，就可以不考虑成像透镜对波前形状的影

响，干涉波前也能通过成像透镜。但是，成像透镜必须按照一定的要求设计，那就是，如果系统光瞳与点光源的像重合，如图 12.8a 所示，成像透镜必须保证干涉图能无失真地成像。有时，在干涉图的平面上放置一片旋转的毛玻璃是非常有用的，它可以减少由光学元件缺陷和其上的灰尘造成的噪声。理想的情况是，旋转玻璃不是完全的毛玻璃，这既可以降低光强的损失，又可以保证原点处成像透镜的光阑，如图 12.8b 所示。如果旋转玻璃是完完全全的毛玻璃，必须移除成像透镜的光阑，以保证能接受到所有有用的光，但是这样一来，在设计成像透镜的时候必须将光阑的新位置考虑在内，如图 12.8c 所示。

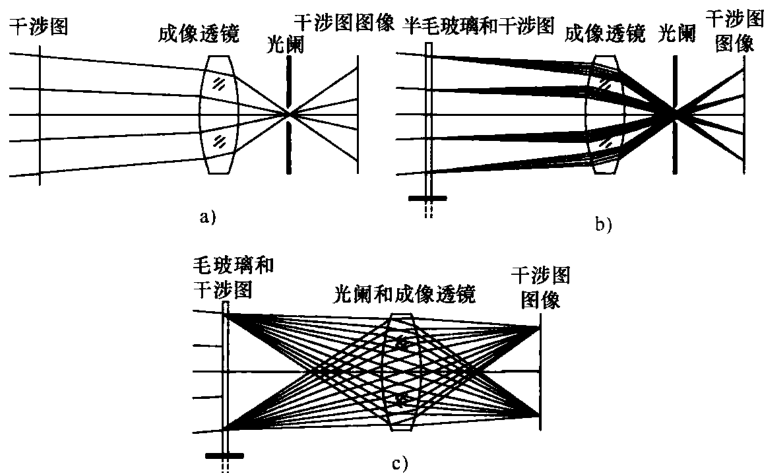


图 12.8 用透镜将干涉图成像在观测平面上

a）没有旋转毛玻璃 b）有不完全的旋转毛玻璃 c）有完全的旋转毛玻璃

12.4 一些零位检测的光路

现在我们来看一些光路，这些光路可以使用零位检测方法检测非球面镜。

12.4.1 平面和凹球面

有时不仅非面镜难以检测，如果球面镜的曲率半径与它的口径相比太大或太小，它同样难以检测。图 12.9 给出了一些适于对平面或凹球面进行零位检测的光路。

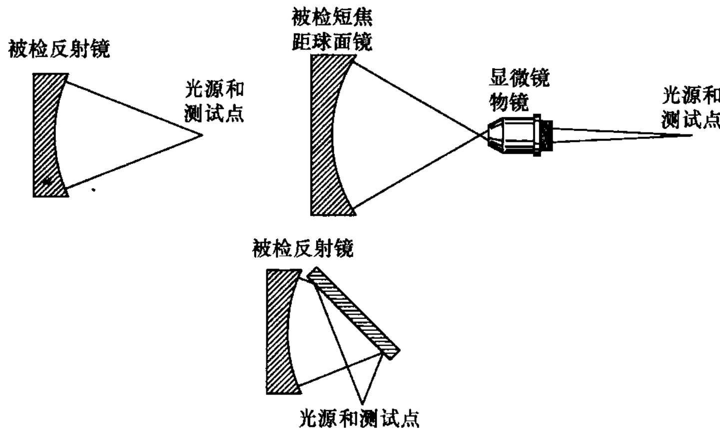


图 12.9 适于对平面或凹球面进行零位检测的光路

12.4.2　望远镜折射式物镜

可以用自准直仪正对着平面反射镜的方法来测量望远镜的双透镜物镜，如图 12.10 所示。当然，平面镜必须和系统的其他元件一样好。另外，应该使检测点和光源尽可能接近，这样可以减少像散。当系统被光两次通过时，如上面采用的光路，波前的任何反对称像差，例如彗差、横向颜色和失真，都会被消除，因为系统是对称的。

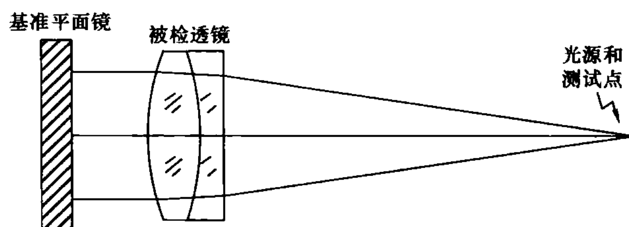


图 12.10　自准直仪正对着平面反射镜的方法来测量望远镜的双透镜物镜

12.4.3　凹抛物面镜

如果抛物镜不是太大，常用的检测方法是自准直仪与光学平面镜相结合的方法，如图 12.11 所示。自准直检测中所能接受的平面反射镜的凸度或凹度可以由伯奇（Burch，1938）的公式给出：

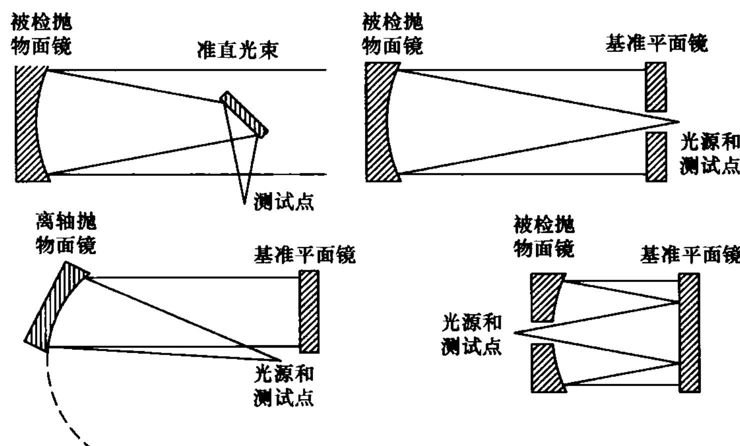


图 12.11　检测凹抛物面镜

$$\delta = 64\left(\frac{f}{D}\right)^2 \frac{\varepsilon}{4Q-0.5} \tag{12.4}$$

式中，f 为有效的焦距；D 为待检系统的口径；δ 为深度，这一深度指的是平面反射镜干涉图上条纹的球形凹度或凸度；ε 为带状效应误差公差。

如果待检系统是折射式的，带状误差就可以表示为 $-2\varepsilon/(N-1)$，其中，N 是折射系数。参数 Q 定义如下

$$Q = -\frac{\mathrm{OSC}}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{Y}{F\sin\theta}-1\right) \tag{12.5}$$

其中，OSC 指的是反正弦条件，θ 指的是入瞳面上高度为 Y 的边缘光线汇聚于系统焦点时的

汇聚角。就像伯奇所指出的，抛物面光学系统和等光程光学系统是实际应用中两个非常有用的例子：如果两者的 Q 值分别是 0.25 和 0，就会有下面的等式

$$\delta = \pm 128\left(\frac{F}{D}\right)^2 \varepsilon \tag{12.6}$$

如果抛物面镜的孔径与它的曲率半径相比较大，那么就可以将一个点光源放在它的焦点上。之后，就可以用另一个直径相同、但是焦距更长的抛物面镜来检验准直光束，这是由帕克（Parks，1974）提出的。

12.4.4 凹椭球面或球面

椭球面有时也称为长球体表面，它是由椭圆绕长轴旋转得到，可以利用共轭点对其进行检验，这对共轭点处在有限远处且距离不等（Kirkham，1953），如图 12.12a 所示。在泰曼-格林干涉仪中，可以使用类似如图 12.13 所示的光路，这是由施瓦德（Schwider，1999）提出的。干涉仪光路的两臂上必须使用完全一样的透镜，只有这样才能保证由两个透镜引入的像差是一样的。

扁球面可以由椭圆绕其短轴旋转而得到。这种曲面在焦距处所成的像是像散的。由于这种曲面是对称的，成像的时候不会出现彗差。如果需要，可以在它的焦点附近放置一个小柱面透镜，这样就可以校正散光（Everhart，1966），如图 12.12b 所示。现在已经有数种用折射式补偿器来检测扁球面的光路，罗杰斯和帕克（Rodgers and Parks，1984）对这些光路做了系统的描述。

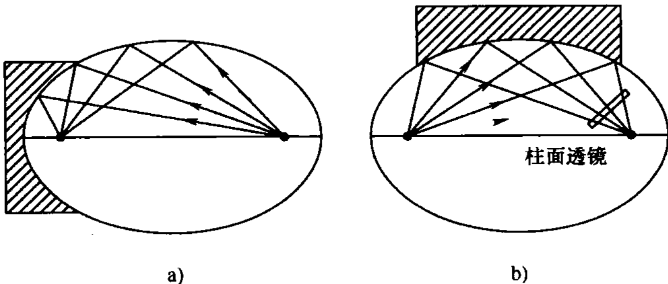


图 12.12 检验凹椭球面和扁球面

a）凹椭球面镜 b）扁球面镜

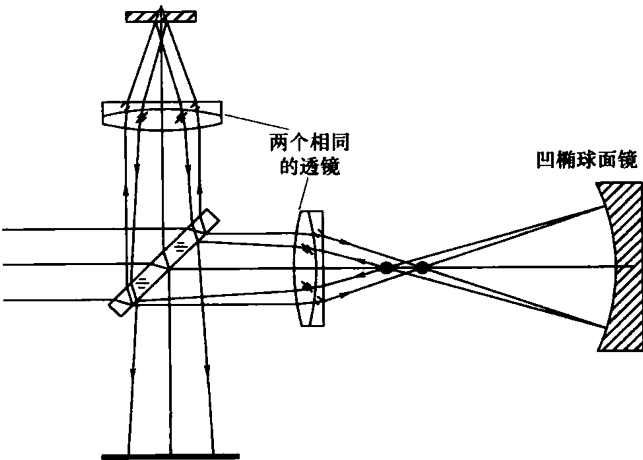


图 12.13 在泰曼-格林干涉仪中检验凹椭球面

12.5　凸双曲面的检测

12.5.1　海德类型检验

对于天文仪器而言，检验凸双曲面十分重要的。目前检验这种表面最常用的方法是使用一个海德球，这一方法将会在后面进行讨论。这种方法的问题就在于，它需要一个远比被检面大得多的凹球面。除此之外，使用补偿器的方法也可以检验这种表面，帕克和邵（Parks and Shao，1988）对这类方法做了系统描述。

我们提到过，可以使用零位检验法检验二次曲面，它需要将照明波前的曲率中心置于合适的焦距上；但是，由于有些光学元件的几何焦距是难以接近的，所以需要额外的光学元件。对于凸双曲面，可以使用海德（Hindle，1931）提出的方法来检验，海德的方法是用自动消像散光路，利用从球面逆向反射的波前来检验凸双曲面，其中球面中心与双曲面难以接近的焦点重合，如图 12. 14a 所示。凹椭球面可以用海德光路进行检验，如图 12. 14b 所示。小凹双曲面也可以用类似方法进行检验（Silvertooth，1940），如图 12. 14c 所示。如果有一个大平面参考镜，可以使用瑞奇设计的自准直光路来检验卡塞格林（Cassegrain）或瑞奇-克瑞蒂恩（Ritchey-Chrétien）望远镜的反射镜，如图 12. 14d 所示。

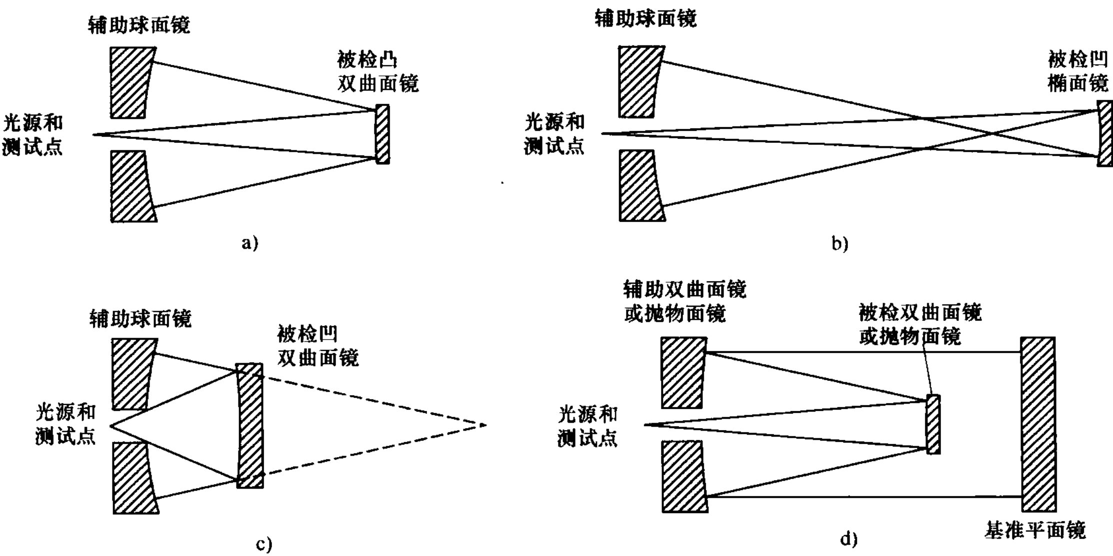


图 12. 14　用海德、赛文图斯和瑞奇方法检验双曲面镜
a）用海德光路检验凸双曲面镜　b）用海德光路检验凹椭球面镜　c）用赛文图斯方法检验小凹双曲面镜
d）用瑞奇设计的自准直光路检验

图 12. 15 所示的海德光路可以用来检验平凸抛物面和凸椭球面。除了海德球面之外，在检验凸抛物面的时候还需要一个瞄准仪。在检验长球面时，需要设计一个能将光汇聚于球面一个焦点的透镜。

尽管用海德及相关的方法检验凸二次曲面可以得到一个后向反射消像散的像，但是，这些方法经常是不可用的，这是因为需要一个大得无法接受的球面镜来保证系统的遮拦比处在

一个可以接受的范围内。对于直径为 D 的双曲面，海德球的 D_H 由下面的公式给出

$$D_H = \frac{D(m+1)}{mr+1} \tag{12.7}$$

其中，r 为可以接受的遮拦比；m 为双曲面消像散共轭点的放大倍数。按照式（12.7），对于一个 0.25m 的双曲面，如果 $m=10$，$r=0.2$，它就需要一个 0.92m 的海德球。

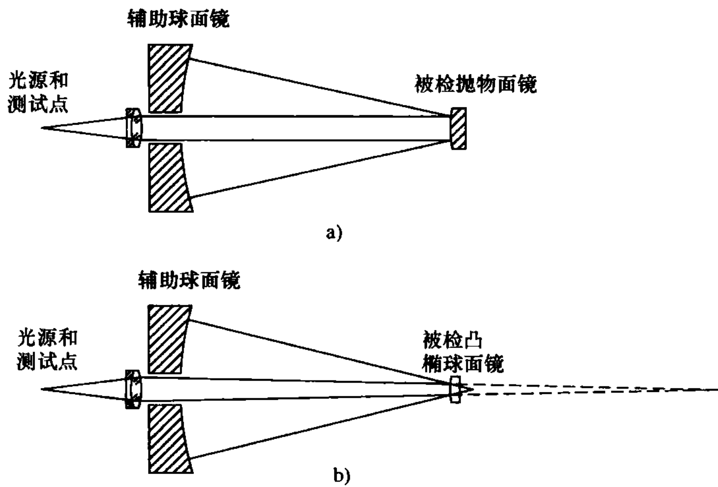


图 12.15 检验平凸抛物面镜和凸椭球面镜
a）检验抛物面镜 b）检验凸椭球面镜

为了消除这种不足，辛普森等人（Simpson et at.，1974）对海德检测方法做了改进。他们的光路如图 12.16 所示。图 12.16 中半月型元件的凹面起到海德球的作用。为了能将这个表面放在靠近二次曲面的地方，并且不会引入遮拦，这个表面是半镀银的。光线通过凹面，会产生折射，进而引入球差。这一球差可以通过选择合适的凸面半径得到补偿。罗伯特（Robbert，1979）和霍华德等人（Howard et al.，1983）已经对这种检测光路做了研究。

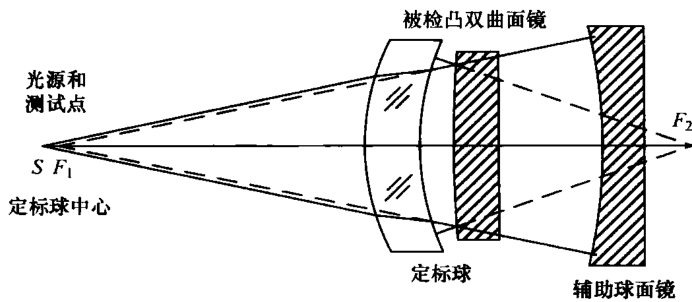


图 12.16 辛普森-奥兰德-梅克尔（Simpson-Oland-Meckel）改进的海德光路

为了检验半月形海德元件对后向反射波前的影响，可以先移除双曲面，这样就得到从校准球面来的后向反射波前 S 的像，其中校准球面的中心在点 F。这样，就可以从双曲面的面形误差测量数据中减去由新月形元件引入的像差，得到更可靠的面形误差。

设计一个用来检验双曲面镜（0.25m 10×）的新月形元件。双曲面镜的几何焦点在 0.6m 和 6m 处；基圆半径是 1.33333m；二次曲线常数是 $K=-1.49383$。玻璃（新月形元

件）的折射率是1.52。如果新月形元件距双曲面5cm，凹面半径就是65cm。5cm厚的新月形元件的凸面半径是66.6637cm，其中凸面可以补偿孔径边缘的像差。那么，这一新月形元件所要求的有效孔径是0.254m。像给出后向反射波前的*OPD*一样，波前变形的RMS是0.0016λ（λ=632.8nm）。在使用这种改进的海德检验法时，后向反射像的消像散品质就被保留下来。用这种方法检验凸二次曲面仅受折射材料的限制。

海德检验法的不便之处在于它需要一个大球面镜。A.B. 梅奈尔和M.P. 梅奈尔（Meinel and Meinel，1983a、1983b）提出了另外一种从后表面检验双曲面的方法。其中的反射镜必须使用熔融石英制造，这样可以保证它有很好的透明度和均匀性。通常有两种光路可以使用，其中的一种如图12.17a所示，其中点光源和测试点重合。其中的表面必须稍微凸起，并且曲率半径很大。A.B. 梅奈尔和M.P. 梅奈尔曾经指出，如果后表面做成平面，并且采用光轴上放置光源的方法来完全补偿球差（光源与测试点不重合），那就会得到一个更加合适的检验方法，如图12.17b所示。在帕克和邵（Parks and Shao，1988）的论文中还讲述了许多由这种检验法变化得到的方法以及其他检验方法。

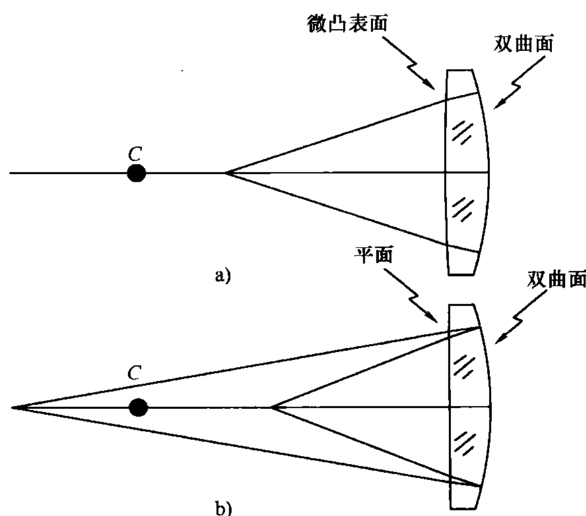


图12.17　用梅奈尔（Meinel）法检验凸双曲面镜（光源和检验点在不同的位置，但是如果使用双通道光路，在相应的点上放置小平面反射镜，它们就会重合）
a）用相等的共轭点，即点光源和测试点在相同的位置　b）用不相同共轭点

12.5.2　采用折射方式检验

笛卡儿发现如果一个折射二次曲面的二次常数等于

$$K = -\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \tag{12.8}$$

其中，n_1 是第一个介质的折射率，n_2 是第二介质的折射率，那么这个折射曲面可以无球差的聚焦准直入射光束。这分两种情况：

1）如果 $n_2 > n_1$，且 $r > 0$，这种二次曲面就是椭球面，也称为笛卡儿卵形体，如图12.18a所示。如果第一介质是空气，第二介质是玻璃，我们可以用如下的公式计算锥体

常数

$$K=-\frac{1}{n_2} \qquad (12.9)$$

如果用 L 表示圆锥面顶点到第二焦点，即聚焦点的距离，有下面公式

$$Lc=\frac{n}{n-1} \qquad (12.10)$$

其中 c 是顶点曲率半径。

2）如果 $n_2<n_1$ 且 $r<0$，它就是双曲面，如图 12.18b 所示。如果第一介质是玻璃，第二介质是空气，锥体常数的计算公式如下

$$K=-n^2 \qquad (12.11)$$

如果从双曲面顶点到焦点，即聚焦点的距离用 L 表示，有如下公式

$$Lc=-\frac{1}{n-1} \qquad (12.12)$$

其中顶点曲率是负数。

表 12.1 所示为用两种常用光学玻璃的折射式二次曲面聚焦准直光束的主要参数。

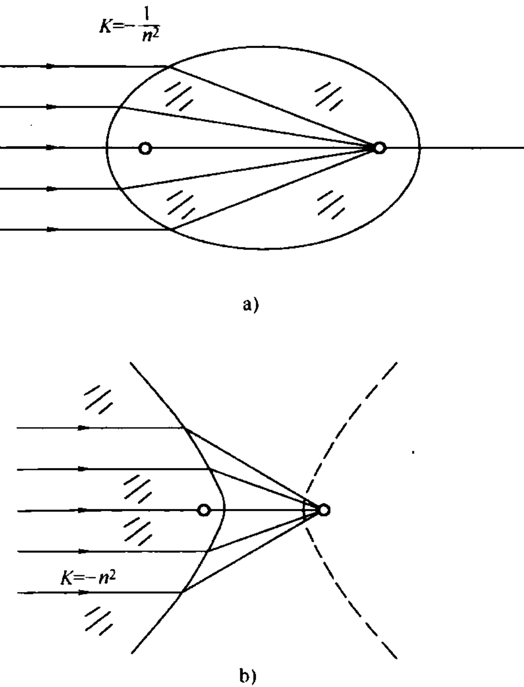


图 12.18 检测椭球面和双曲面的笛卡儿光路
a）椭球面 b）双曲面

表 12.1 用两种常用光学玻璃的折射式二次曲面聚焦准直光束的主要参数

	折射系数	椭球面		双曲面	
	n	K	Lc	K	Lc
BK7	1.5168	-0.4347	2.9350	-2.3007	-1.9350
F2	1.6200	-0.3810	2.6129	-2.6244	-1.6129

用这种特性，如果玻璃的折射系数合适，可以用如图 12.19 所示的光路来检验凸双曲面。所用的玻璃必须是透明均匀的，所以可供选择的材料只有光学玻璃或熔融石英。采用耐热玻璃或玻璃陶瓷都是不合适的。这种检测使用光的透射，而不是反射，波前变形 OPD 和表面变形 W 的关系是 $W=OPD/2(n-1)$，采用这种方式检测的灵敏度大约是反射式的一半。

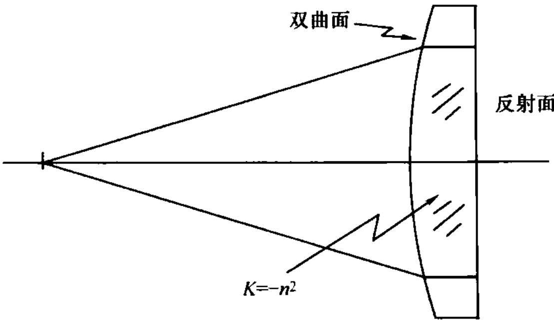


图 12.19 用笛卡儿光路检验双曲面

如果介质的折射率不足以产生齐明像，就必须选择一个合适的物距来消除初级球差。可以用追迹法获得这一物距，也可以用计算的方法获得一个使式（16.26）中三级球差为零的近似解。令 $n_{-1}=1$，$l=y/u_{-1}$，条件如下

$$(8A_1+Kc^3)+\frac{\frac{n+1}{l}+c}{n^2}\left(c+\frac{1}{l}\right)^2=0 \tag{12.13}$$

正如詹姆斯和沃特沃斯（James and Waterworth，1965）所建议的那样，凸双曲面表面透镜可以用图12.20所示的光路来检测。待检镜的第二个曲面的球差可以通过下面的方式消除：用油将该表面与一个辅助透镜表面接触，辅助透镜另一个表面是球面且与检验点同心。然而，在这种情况下补偿并不完全，依然存在少量的残余像差。这种检测光路的灵敏度大约是反射式光路的四分之一。

采用布朗斯（Bruns，1983）设计的一种光路，可以利用一个面是凸双曲面的透镜的特性来检验凸曲面。把一个会聚透镜放在待检镜面凸面的前边即可补偿由待检镜面凸双曲面引入的球差，具体光路如图12.21所示。不幸的是，任何带有球面的透镜都无法补偿双曲面的球差，正是由于这个原因，布朗斯在光路中使用了一个面是双曲面的透镜，其中的双曲面的二次常数 K_L 与所选的玻璃折射率有关。由于这个透镜的定向球差已经被补偿，当准直光束通过平面时，透镜的检测就变得十分简单了。如果将透镜颠倒使用，即准直光束由凸面进入透镜，它的球差就可以抵消反射镜凸面的球差。

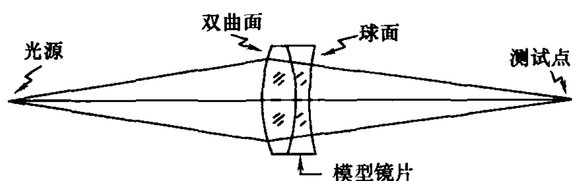


图12.20 利用调整共轭距离使球差最小的方法来检验非球面

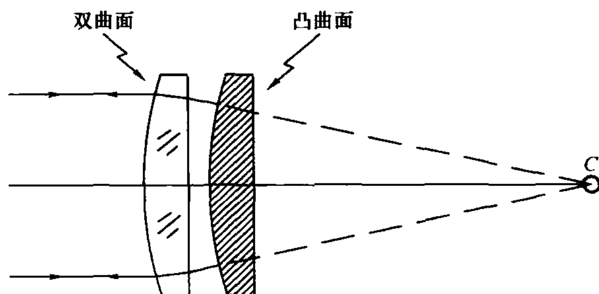


图12.21 用非球面透镜补偿球差的方法检验双曲面

如果凸反射镜的二次常数为 K_M，曲率半径为 R_M，布朗斯指出，当透镜的折射率 n_L 满足下面的关系

$$K_M=-\frac{2(n_L+1)(R_M+d)}{n_L(n_L-1)R_M} \tag{12.14}$$

系统的球差就可以得到补偿。式（12.14）中的 d 是透镜平面到反射镜的距离，并且假设透镜的厚度无限小。透镜的焦距等于 R_M+d。式（12.14）中 R_M 是一个定值，通过选择 n_L 和 d 来保证公式中各参数之间的关系。

12.6 检测圆柱面

凹柱面可以用如图12.22所示的光路图来检测，图中待检柱面的光轴在垂直方向（Shnurr and Mann，1981）。用于部分反射光线的平参考面位于柱面镜的焦点上，柱面镜的像

是在垂直方向上的一个很窄、很亮的线。后向反射波前是平面。然而必须注意，波前会绕垂直轴发生翻转。由于光在被检面上反射两次，反对称的镜面变形会被消除，同时对称的变形会被加倍。系统需要一个气体激光器之类的装置产生激光，获得在空间高度相干的光源。

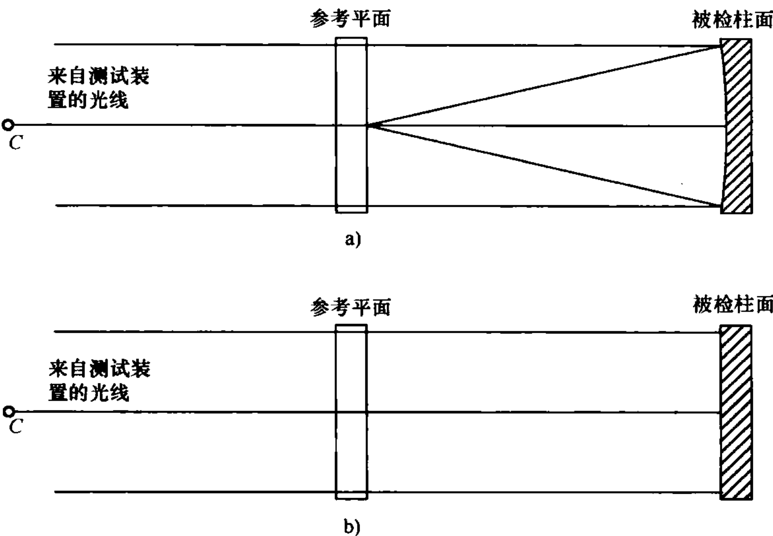


图 12.22 使用泰曼-格林干涉和辅助平面镜相检验凹柱面镜
a）顶视图 b）旁视图

由于被反射的光非常窄，如同一条亮线，所以参考平面可以用一个仅仅覆盖图像而不是全口径的窄反射镜来代替。必须注意一点，由于被检反射镜像差的存在，窄像并不是完善的。葛尔瑞和帕克尔（Geary and Parker，1987）及葛尔瑞（Geary，1991）用细光纤来代替窄反射镜，光路如图 12.23 所示。由于像差的存在，光纤需要有涂层，以保证它有很高的反射率且比像的宽度还细。经过光纤反射回柱面的波前是柱面波。这样，由于光两次通过被检面，像差不会被加倍，反对称像差会被消除。

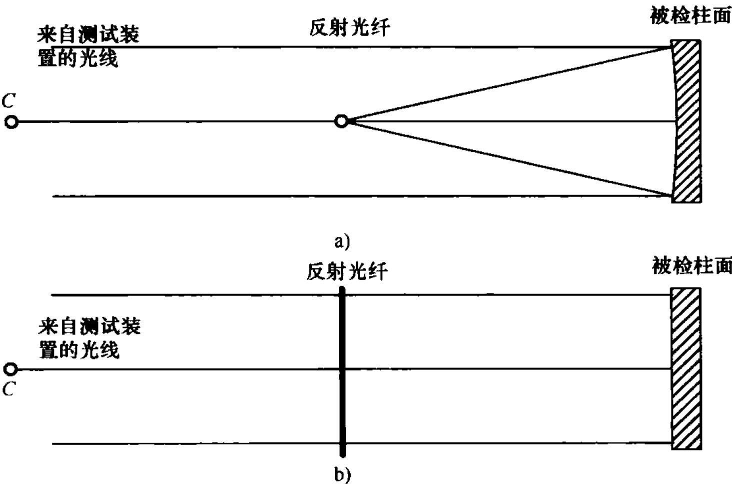


图 12.23 使用泰曼-格林干涉和反射光纤检验凹柱面镜
a）顶视图 b）侧视图

也可以用类似光路来检验柱面透镜，如图12.24所示，图中用的平面镜，也可以用光纤。上一段中的结论也可以应用在这种检验中。

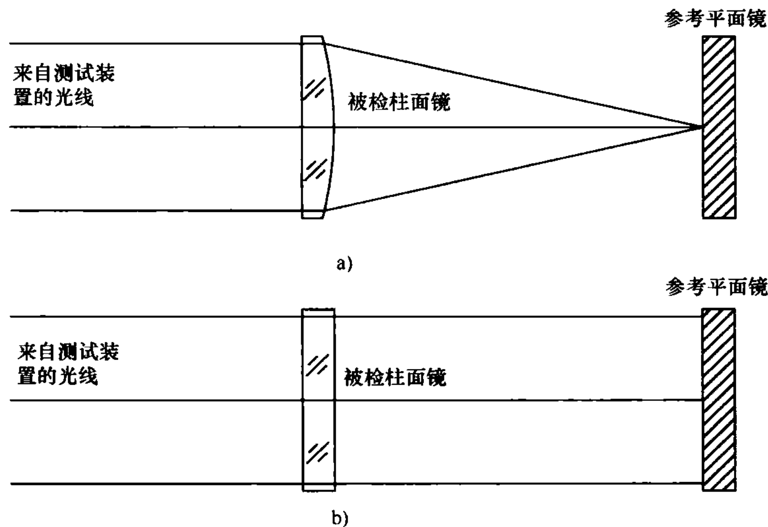


图12.24　使用泰曼-格林干涉仪检验汇聚柱面透镜
a）顶视图　b）侧视图

凸柱面反射镜可以用如图12.25所示的光路来检验。不同之处就在于，从干涉仪发出的光束必须是汇聚的。后向反射波前也是球面波。

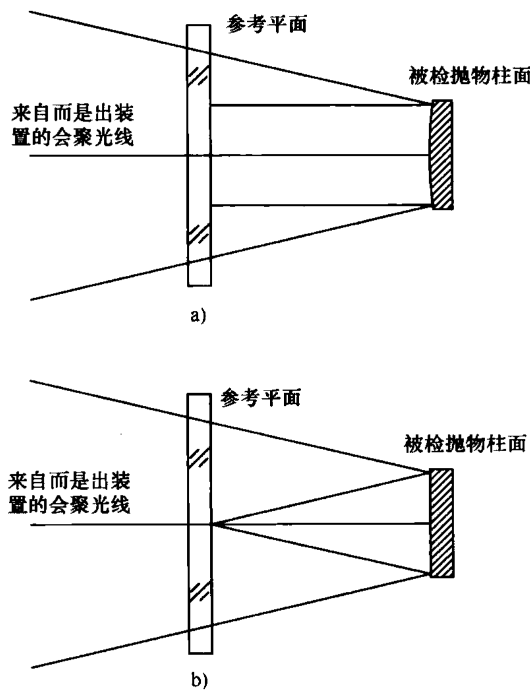


图12.25　用辅助平面检验凸抛物面和圆柱面
a）顶视图　b）侧视图

兰普雷克特等人（Lamprecht et al.，2003）提出了另外一种用于检验柱面透镜的方法。由柱面透镜产生的柱面波在向后传播的过程中，经过一个衍射光学元件成为平面波。

12.7 早期的补偿器

本节主要讲述零位补偿器，其内容是对本书上一版相应章节内容的修订，由已故阿贝奥夫纳（Abbe Offner）编写。用零补偿法检测凹抛物面镜是一种既费时精度又不高的方法。被检抛物面的形状误差必须通过测量许多区域的横向光线像差才能得出，因为在凹非球面镜或二次曲面的曲率中心测量时会产生球面像差，波阵面的变形可用下面三阶近似表达式给出

$$W(\rho)=\frac{(8A_1+Kc^3)\rho^4}{4} \tag{12.15}$$

式中，A_1 为一次非球面变形项，K 为二次曲面的常数项，$c=1/R$ 是曲率。

对于二次曲面，式（12.15）可以写成

$$W=\frac{1}{4}KR\left(\frac{\rho}{R}\right)^4 \tag{12.16}$$

多年来，在制造抛物面镜的过程中，唯一能代替刀口检验法的是自准直法，这时需要有一块尺寸和面形精度都与被加工抛物面镜一样的光学样板。

12.7.1 柯德补偿器、伯奇补偿器和罗斯补偿器

柯德（Couder，1927）指出，抛物面镜曲率中心处所成点光源的像散像差可通过在反射镜及其所成像之间插入一个小型的补偿透镜而消除。柯德式双透镜补偿器如图 12.26 所示，他在光路中使用了一个双透镜补偿器。正如他在论文中所说的，为了使补偿器的光焦度为零，以便于制造，所以需要用两块透镜。为了生产一种焦距 30cm、相对孔径 $f/5$ 的抛物面镜，柯德用了一个孔径为 4cm（根据他画的图量出）左右的补偿器。

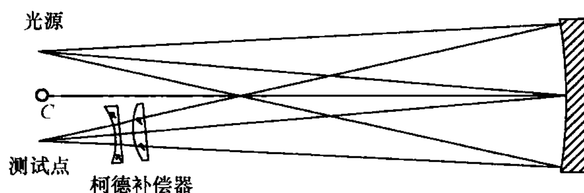


图 12.26 柯德式双透镜补偿器

伯奇（Burch，1936）介绍的一种方法是在抛物面镜曲率中心外用一个球面镜来补偿抛物面镜的像差，这时刀口和光源放在抛物面的曲率中心附近。他导出了这种类型的补偿系统的五级像差，并指出对于一个相对孔径为 $f/5$、孔径达 80cm 的抛物面镜，用图 12.27 所示的双反射镜光路可以发现抛物面镜的残余像差小于 1/40 波长，而这时所用的补偿反射镜只有抛物面孔径的 1/4。对于孔径或相对孔径更大的抛物面镜，他建议采用具有边缘塌边特征的凸球面镜，塌边量按照八次方规律变化，这样就可以平衡七级球差。他计算过，要补偿帕洛马山天文台一个焦距为 5m、相对孔径为 1/3.33 的主镜的像差，就需要大约 2.8A 的非球面度。

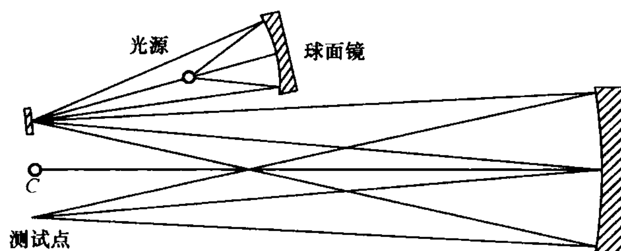


图 12.27　伯奇式双反射镜补偿器

伯奇（Burch，1938）还公开发表文章给出了折射式补偿器的一个简单三阶解。这种折射式补偿器是一个焦距为f、折射率为n的平凸透镜，其中的平面是反射面，如图12.28所示。对于一个顶点曲率半径为R的抛物面，当$f=Rn^2/(n-1)$ 2时，曲率中心处的三阶像差就能得到平衡，所以当$n=1.52$时，补偿透镜的孔径约为抛物面镜孔径的1/8。对于相对孔径不超过1/8的抛物面来说，伯奇认为能用这种零位补偿器把残余像差减小至可以忽略不计的程度。他还补充说“任何一个在分析光学和光线追踪方面天才如果能为这种或其他补偿透镜系统计算出二阶像差，那么他将受到光学制造者们的称赞和感谢。”三十年后，这一愿望终于由霍勒伦（Holleran，1968）实现了。

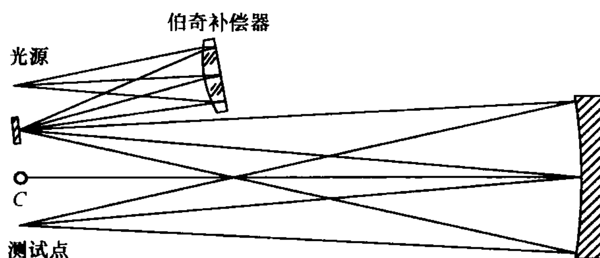


图 12.28　伯奇式平凸透镜补偿器

在为帕洛马山天文台制造焦距为5m、相对孔径为1/3.33的主镜时，应用了一个直径25cm的补偿器，以保证在反射镜曲率中心附近形成一个无像差的自准像（Ross，1943），其光路图如图12.29所示。

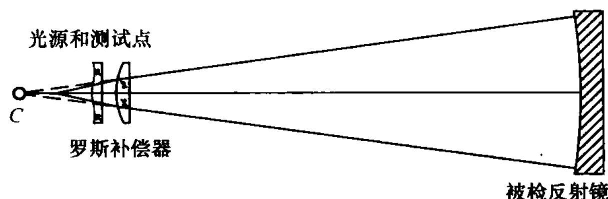


图 12.29　为帕洛马山天文台制造5m主镜时所用的
罗斯式非球面补偿器

罗斯发现，要想把残余带像差补偿到由其造成的弥散斑小于大气扰动造成的弥散斑的程度，必须在球面透镜中增加一个非球面的校正板，以平衡抛物面镜的像差。罗斯所采用的这种自准直光路具有无彗差的优点，所以对光源和刀口偏离光轴并不敏感。另外，由于光线两次通过补偿器，因此要求补偿器对像差的贡献量只有柯德式光路的一半。

12.7.2 多尔补偿器

采用伯奇提出的平凸式补偿器对解决中等孔径的抛物面镜来说是比较方便的，并且补偿器的研制也比较容易。但是，若采用这种方法，在制造抛物面镜所使用的平凸式补偿透镜只能适用于相同焦距的其他抛物面镜的检验。

多尔（Dall，1947、1953）曾指出，由于透镜的球面像差是其共轭位置的函数，因此同一个平凸透镜可以用做多个抛物面镜的补偿器。他采用图 12.30 所示的光路，它与柯德的光路十分相似。这两种光路的主要区别在于多尔式补偿器处在光源的前面，而不是在观察者的前面。补偿器放置在这样的位置是有原因的，如果在光束汇聚的系统中应用，汇聚光束过大，以至于无法对被检面检测。

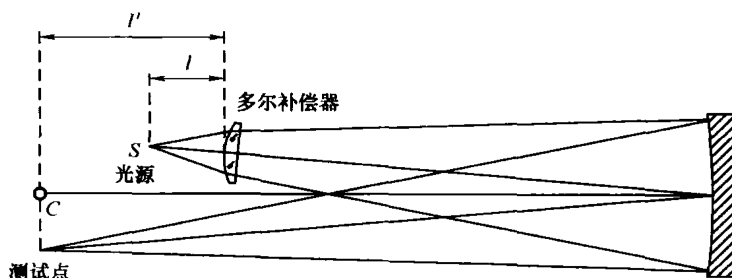


图 12.30 多尔平凸透镜补偿器

多尔补偿器通常用在光线只通过补偿器一次的离轴光路结构中。除此之外，还有另外两种光线两次通过补偿器的光路结构：①补偿器刚好位于光轴上，然后在使用分光镜；②补偿器稍微离轴。无论是会聚光还是发散光到可以通过这种光路。于是，每条通道上的补偿透镜只需要补偿总像差的一半，需要的补偿量减小了。因而，就需要在式（12.15）的前面乘以系数 2。光线两次通过对称结构的另外一个优点是无彗差。这样，因光源和观察者的横向离轴位移或补偿透镜的任何未对齐而产生的彗差，不会影响系统的彗差。不幸的是，只有在被检表面的曲率半径远大于其直径时，才能使用这种结构。

多尔发现如果抛物面镜的曲率半径 R 与补偿透镜的焦距 f 的比值在 10 ~ 40 之间时，适当的选择补偿透镜的短共轭距离可以获得足够的补偿量。要使抛物面曲率中心处的三阶像差得到平衡，则应有

$$\frac{R}{f}=\frac{1}{2}(m-1)^{2}\left[\frac{n^{2}(m-1)^{2}}{(n-1)^{2}}+\frac{(3n+1)(m-1)}{n-1}+\frac{3n+2}{n}\right] \tag{12.17}$$

式中，m 为长共轭距离 l' 与短共轭距离 l 之比；n 为平凸透镜的折射率（在多尔光路中，$m>1$）。

多尔补偿器已经被广泛采用，特别是望远镜业余爱好者。用这种极其简单的补偿器所能达到的补偿程度可通过下面的例子加以说明。

现在，我们设计一个多尔补偿器，用于检测焦距 0.6m、相对孔径 1/5 的抛物面镜。假设式（12.17）中 $m=2$，$N=1.52$，$F=3\text{m}$，则可以求出 $R/f=11.776$，这个值在多尔所规定的范围之内。这时补偿器的技术参数是 $f=50.950\text{cm}$，$l=-25.475\text{cm}$，$l'=-50.950\text{cm}$。采用这种补偿器，可以算出形成光源像的汇聚波面与其最接近球面的均方根（RMS）为 $0.048\lambda(\lambda=632.8\text{nm})$。用这种补偿器进行补偿检测而制造出来的抛物面，其面形误差为 0.024A。根据此面形误差算出来的斯特雷尔数为 0.91。平凸透镜要达到这样的补偿量，其

直径大约是抛物面镜直径的1/12。

这里列举的抛物面几乎是最大的，对于这种抛物面而言，采用多尔补偿器是比较合适的。由于多尔提出的光路有彗差，所以必须把光源精确地放在凸透镜的轴线上，并且使该轴线穿过抛物面的顶点。

在斯科拉齐（Schlauch，1959）、史托兹曼和海齐（Stoltzmann and Hatch，1976）的两篇论文对多尔补偿器的制作和使用做了详细介绍。如果平凸透镜的折射率定为1.52，则直接利用施劳赫文章中给出的曲线，而不必用式（12.17）进行计算，此曲线是根据多尔（Dall，1953）发表的曲线修改得到的。

通过计算可以得到多尔补偿器（用BK_7玻璃，用红光）的曲线如图12.31所示。多尔补偿器的曲率半径为25mm，厚度为5mm。但是，这里所用的光路假定补偿透镜的平面与测量点（刀口）处在同一个平面上，如图12.32所示。这与图12.30所示的光路不同。如果只存在三阶球差，根据式（12.16），我们可以发现，从光源到补偿透镜凸面顶点的距离 d 只是 KR 乘积的函数。但是，这个结论仅对小孔径镜面（R/D 值较大）有效。如果孔径大（R/D 值较小），多尔补偿透镜中就会出现五阶球差，三阶球差的过度补偿量会将它的一部分补偿掉。最后，会有一个无法补偿的球差带。就像罗杰斯（1986）所指出的，如果孔径小或者有一个大的中心暗斑，残余球差不会太严重。

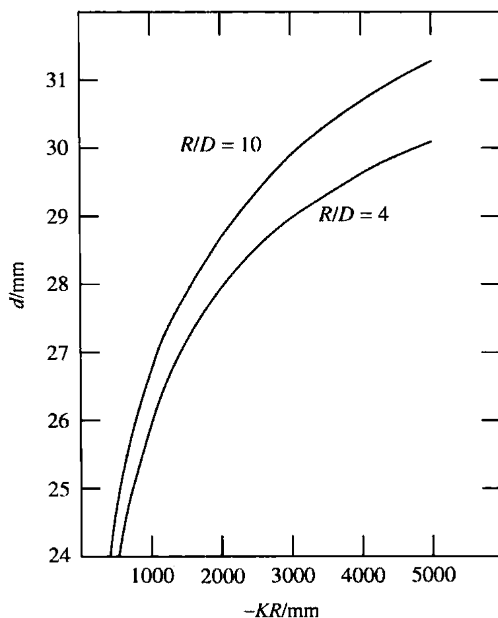


图12.31　图12.32中多尔补偿器到光源距离 d 与 KR 的关系

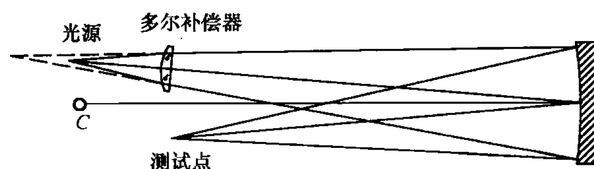


图12.32　多尔补偿器（假定测量点与多尔补偿透镜的平面在同一平面上）

在光轴上放置平凸透镜即可将多尔补偿器改造成无彗差的，这与罗斯的自准直光路很相似。这时只要对式（12.17）稍加修改就能适用于这样的光路。由于光线在透镜中来回往返两次，所以要将式中的系数 1/2 去掉。例如，采用这种自准直光路设计一个用于检测焦距 0.6m、相对孔径 1/5 的抛物面的补偿器，那么，$R/f=23.552$，$f=25.475\text{cm}$，$l=-12.737\text{cm}$，$l'=-25.475\text{cm}$。平凸透镜的直径是抛物面直径的 1/24。按这种光路对抛物面进行补偿检测所得的残余面形误差与上述例子中的计算结果完全一致。这种自准直式光路虽然有它的优点，但是，由于它没有彗差，所以反应不出光源对平凸透镜轴线的微小偏离。

普里耶夫（Puryayev，1973）曾提出对多尔补偿器作一个有趣的改动，即在罗斯的自准直光路（参见图 12.29）中，用一个凹面为二次曲面的远焦距弯月透镜取代多尔用的平凸透镜。对远焦距弯月透镜有如下关系

$$r_1-r_2=\frac{d(n-1)}{n} \tag{12.18}$$

式中，r_1 为弯月透镜凹面的曲率半径；r_2 为凸面的曲率半径；d 为厚度；n 为折射率。

为补偿一个顶点曲率半径为 R 的抛物面的像差，要求凹面的二次曲面系数 K 的三阶系数值为

$$K=\frac{R}{(N-1)\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 l} \tag{12.19}$$

式中，l 为光源到弯月透镜的距离（按照符号规则，K 为负值）。

普里耶夫用直径为 20cm 的一块弯月形补偿透镜补偿了焦距不超过 24m、相对孔径不超过 1/4 的任意抛物面或接近抛物面的表面。对此范围内的任何抛物面来说，经过补偿，自准直波面的最大残余像差约为 $\lambda/2(\lambda=632.8\text{nm})$。此残余像差可以计算出来，并且可在确定被检反射镜的面形误差时予以考虑。

12.8 奥夫纳补偿器

如上所述（Burch，1936；Ross，1943），只要在补偿器中加入一个非球面零件就能把抛物面或其他非球面镜的球差补偿到任意所要求的精度。但是，这种方法只有当非球面补偿零件的面形精度不低于被检镜所要求的精度时才能采用。目前，卫星上衍射极限光学系统的主反射镜，要求其面形误差的均方根小于可见光波长的百分之一。为了能按照这样高精度测量补偿器的面形误差，将补偿器做成球面或平面是一个合理的选择。

罗斯在设计补偿器的时候发现，当恰好在中心和边缘部分校正像差时，补偿透镜距离反射镜的曲率中心越远，残余像差就越小。这是由于，虽然抛物面法线的轴向球差 S 满足简单公式：$S=y^2/2R$（其中 y 为抛物面法线距离轴线的距离，R 为其曲率半径），但还是需要用一个幂级数的辅助项来表示新坐标中该球差的分布情况，新坐标系的原点位于补偿器所处的坐标系中。对于一个与抛物面靠在一起的补偿器，球差的补偿情况应以上述简单公式表示，但遗憾的是该补偿器要做得和抛物面一样大。

12.8.1 折射式奥夫纳补偿器

奥夫纳（Offner，1963）曾指出，一个能把点光源在抛物面镜曲率中心成一实像的小透

镜与一个位于曲率中心能把小透镜成像在抛物面上的场镜相组合，从光学上来说就相当于一个位于抛物面上的大透镜。舒普曼（Schupmann，1899；Offner，1969）首先提出，以这样的方式，利用场镜来控制二级光谱。这种类型的补偿器被广泛应用于检测天文光学器件的不同特性（Sasian，1988）。

在一个通过场镜把补偿透镜 c 成像在抛物面上的奥夫纳光路中，补偿透镜的球差必须遵循和抛物面法线一样的随孔径而变化的规律。

然而，对补偿透镜的这种限制并非必要，唯一要求的是使透镜 c 提供足够的三阶球差以补偿抛物面法线的三阶球差。因而，为了使高阶像差最小化，场镜的光焦度（透镜 c 的成像位置）需要改变。

为了补偿二次曲面系数为 K、顶点曲率半径为 R 的二次曲面反射镜的三阶像差，平凸透镜的焦距 f、折射率 n 必须满足下面的关系式

$$-\frac{KR}{f}=(1-m)^2\left[\frac{n^2(1-m)^2}{(n-1)^2}+\frac{(3n+1)(1-m)m}{n-1}+\frac{(3n+2)m^2}{n}\right] \tag{12.20}$$

式中，$m=l'/l$（参见图 12.33），如果二次曲面的法线像差要用平凸透镜的球差来补偿二次曲面的法线像差，根据符号规则，$m<0$。

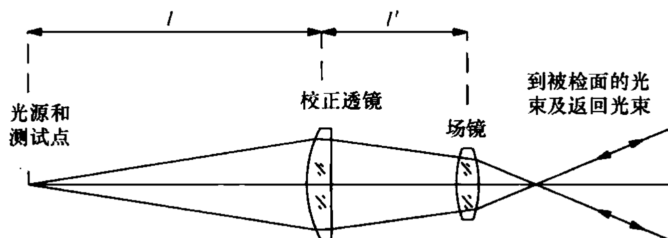


图 12.33　场镜的折射补偿

由于通常被检镜面的球差比较大，所以，场镜并没有一个理想的位置。它可能处在镜面及其散焦面之间，可能在散焦区域内部，也可能在散焦面之外。通过对场镜位置的微调，它的任何放置方式都能产生很好的补偿效果，这一点赛仙（Sasian，1989）曾对此做出过说明。兰德格夫和莫雅（Landgrave and Moya，1987）、莫雅和兰德格夫（Moya and Landgrave，1987）等人探索采用不同的技术来设计这种补偿器。

使用场景的主要目的是避免五阶球差，但同时也出现了一个问题，被检镜面的波阵面成像在观察像差的平面，即补偿透镜所在的平面。

在奥夫纳光路中，场镜的重要性可以从一个补偿器的例子中看出，该补偿器是为检测一个焦距 1m、相对孔径为 1/4 的抛物面而设计的，其材料的折射率为 1.52。首先，选定 m 值，它影响到自准直波面的会聚角。

若把会聚角选定为 $f/12$，则 $m=-0.6667$。为了补偿抛物面法线的三阶像差，从式（12.20）中可以得出补偿透镜的焦距值为 20.9115cm，其中 $K=-1$，R = 800.0cm。当 $m=-0.6667$ 时，共轭距离 $l=-52.2772$cm，$l'=-34.8532$cm。使光源处在补偿透镜的远共轭位置处，抛物面的曲率中心在它的短共轭位置处，这样的自准直系统就能矫正三阶球差，但是却存在 -0.0205mm 的五阶横向球差。当波长 $\lambda=632.8$nm 时，自准直波阵面的光程差的均方根（RMS OPD）为 0.23λ。

在抛物面曲率中心处放置一个焦距为 33.3976cm 的场镜可以把补偿透镜成像到抛物面

镜上。这样，五阶球差的符号就会发生变化，它的值就变成 +0.0207mm。自准直波阵面的光程差的均方根为 0.26λ，与前面相比略有增加。

按照高阶球差最小的原则，可以发现，上述场镜的焦距为 66.8900cm。采用这样的场镜，算出自准直波阵面的光程差均方根减至 0.0003λ，这远小于能够测量的数值。达到这样的补偿程度时，补偿透镜的直径为 $f/4$ 抛物面直径的 1/20。

在式（12.20）中，假定平凸透镜式场镜位于抛物面的曲率中心。但是，有时将场镜放在靠近曲率中心而又不是曲率中心的位置比较好。在这种情况下，场镜会带来一个附加的放大倍数 m_f，于是三阶像差的补偿条件就变成

$$-\frac{KR}{f_f^2}=(1-\overline{m})^2\left[\frac{n^2(1-\overline{m})^2}{(n-1)^2}+\frac{(3n+1)(1-m)\overline{m}}{n-1}+\frac{(3n+2)\overline{m}^2}{n}\right] \tag{12.21}$$

式中，$\overline{m}=m_f^2/m$。

与罗斯式光路一样，奥夫纳自准直光路由于本身就没有彗差，所以当光源靠近光轴面而又没有刚好位于光轴上时，自准直波面的像差仍然可以得到矫正。

由于用奥夫纳补偿器可以使像差得到高度的补偿，所以已用于对大孔径凹曲面反射镜的面形误差的定量测定。出于这种目的，可以把自准直波面与球面干涉仪中的参考球面进行比较（Houston et al.，1967）。自准直波面和参考球面在光学上互相共轭的多通道型球波面干涉仪对这种高精度测量特别有用。这种多通道式球波面干涉仪（缩写为 SWIM）据说已经达到 0.003λ 的波面测量精度。

12.8.2 谢弗补偿器

谢弗（Shafer，1979）设计的这种补偿器有三个部件，所以它需要满足下面三个条件：

1）如果光源到补偿器的距离是一个定值，那么从光源发出的球面波经过补偿器后依然为球面波。然后，沿着光轴移动系统的位置，就可以得到正的或负的补偿量。

2）系统是无焦点的（焦距为无限大），所以，在通过补偿器后，进入光学系统的光线与光轴的夹角不发生变化。

3）无焦系统的角放大率（近轴物体的横向放大率）为 +1。所以，当补偿器沿着光轴移动时，光源的视位置不发生变化。

在图 12.34 中一个负透镜位于两个正透镜之间。这个系统对于任意大小的正二次曲面系数（扁球面）和中等大小的负二次曲面系数（抛物面或双曲面）都是合适的，如图 12.35 所示。当一个正透镜放在两个负透镜之间时，图 12.35 中的曲线会发生倒转。

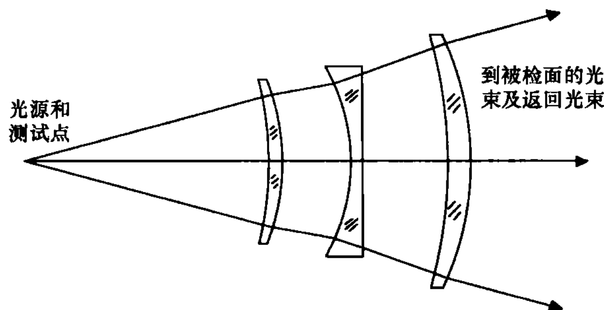


图 12.34 谢弗补偿器（所有透镜都用 BK_7 玻璃制造）

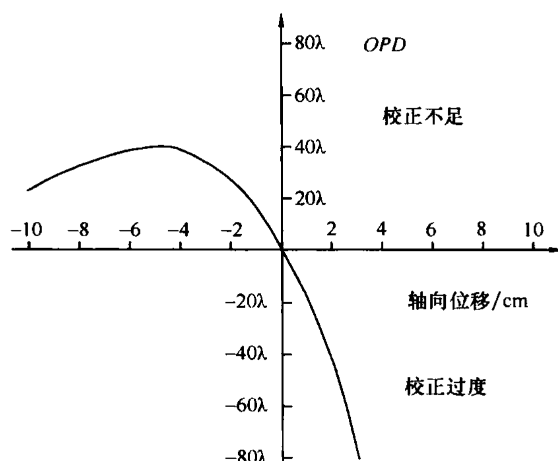


图 12.35　由三阶球差造成的波前像差和谢弗补偿器透镜的轴向位移（$f/2$ 的系统，$\lambda=632.8\mathrm{nm}$）

12.8.3　折射式补偿器总结

主要的折射式补偿器有柯德式、多尔式、谢弗式和奥夫纳式。它们的共同特点如下：

1）都可以补偿球差，但是补偿的程度不一样。其中奥夫纳补偿器的补偿效果最好。

2）都可以用在单通道或多通道的系统中。但是，柯德补偿器和多尔补偿器一般用在单通道系统中，并且常常位于光源前面，而谢弗补偿器和奥夫纳补偿器经常应用在双通道系统中。

3）这些补偿器都无法补偿色差，所以需要使用单色光。获得单色光的方法有两种：一是使用激光，另一种是使用滤光片。为了使波阵面的波形不受滤光片的影响，一般建议在接近眼睛或传感器（在补偿器之后）的地方加装红色滤光片。

4）球差的补偿量主要取决于补偿透镜在光轴上的位置，所以，除非知道补偿透镜的正确位置，否则无法知道被检凹面的二次曲线常数的确切值。必须用别的无需补偿器的方法，如哈特曼检测来测量它。幸运的是，只用一个补偿器可以很简单地测量出曲面大致的面形。

5）在光线两次通过补偿镜的结构中，光源和观测点相对于光轴的反向、等量的位移不会产生彗差。这一论断成立的前提条件是被检二次曲面的光轴与补偿透镜的光轴一致，否则会产生一定程度的彗差。

12.9　反射式补偿器

用奥夫纳补偿器进行测量时，其缺点是很难按照要求的精度测量补偿零件的折射率。例如奥夫纳（Offner，1963）介绍的一个实例中，一个直径为 4.5cm 的补偿透镜，其厚度为 1.05cm，在光线两次通过透镜的情况下，沿光路方向的折射率平均偏差为 3×10^{-7} 时，可造成 $\lambda/100$ 的光程差（$\lambda=632.8\mathrm{nm}$）。孔径和相对孔径越大的非球面镜要求补偿透镜的直径和厚度也越大。因此，即使是一个微小的折射率平均偏差值都能造成巨大的光程差。要加工和检验这样高均匀等级的大口径光学零件，在目前并不是一件容易的事情。

若用球面镜代替图 12.33 中的平凸透镜即可避免这个难题。采用这种方法，能够以很高

的精度来测量元件的面形误差。小的场镜仍可保留，因为选择折射率变化极小的小块玻璃还是可能的。

众所周知，一个放大倍数不等于 -1 的球面镜的轴向球差可用来补偿具有负二次曲面系数的二次凹曲面法线的像差（Burch，1936）。用奥夫纳折射式补偿器所能达到的补偿程度，用图 12.36 所示的在二次曲面曲率中心装有场镜的反射式奥夫纳补偿器也能达到。像折射式补偿器一样，可以用补偿反射镜的曲率半径 R_N 及其共轭距离 l 和 l' 来补偿半径为 R_C、二次曲面系数为 K 的二次曲面法线的三级像差。通过改变场镜的焦度可以使高级球差减至最小。满足上述要求的关系式如下

$$R_N = -\frac{8KR_C}{(m^2-1)^2} \tag{12.22}$$

$$l = \frac{(1-m)R_C}{2} \tag{12.23}$$

$$m = \frac{l}{l'} = -\frac{2\eta_C}{\eta_N} \tag{12.24}$$

式中，$2\eta_C$ 和 $2\eta_N$ 分别为二次曲面曲率中心和自准直像处光束的 f 值。

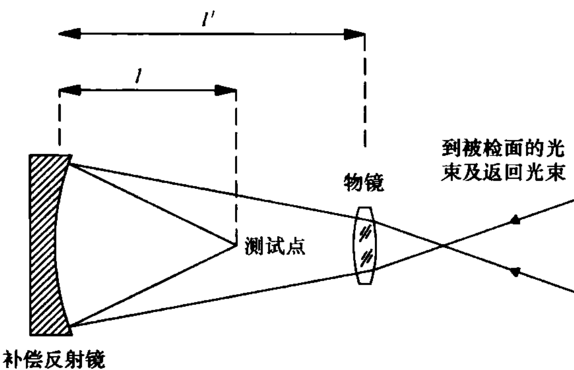


图 12.36 带有场镜的反射式奥夫纳补偿器

二次曲面直径 D_C 与补偿镜直径 D_N 的比值可以由式（12.25）算出

$$\frac{D_C}{D_N} = \frac{(m^2-1)^2}{4K(m-1)} \tag{12.25}$$

表 12.2 单反射镜补偿器的放大率及其直径比

放 大 率	直 径 比
-3	4
-3.5	7
-4	11.25
-4.5	16.8
-5	24

根据式（12.25）算出的二次曲面直径与单反射镜补偿器的直径之比的部分数据列于表 12.2。直径比大于 10 时，要求 $-m$ 大于 4。m 值的实际取之范围取决于合成值 h_N，即自准直像处的 f 数，该值与 m 成反比（参见式（12.24））。如果被补偿波面不通过中继光学系统

而直接用于干涉法检测，则干涉仪必须能够接受孔径为f/η_N的光束。如果η_C即二次曲面反射镜的f数小，那么单反射镜补偿器就需要用大的补偿反射镜。对于已经补偿过像差的像，它的残余像差必须加以考虑，在某些情况下，残余像差所确定的A_C值大于η_N的下限所确定的A_C值。

例如，曾经为瑞奇-克瑞蒂恩（Ritchey-Chrétien）系统中焦距为3m、相对孔径为1/2.45的双曲面主镜设计了一个单反射镜补偿器。该反射镜的二次曲面系数为-1.003313。m值选为-4.9时，自准直像处光束孔径为$f/1$。根据式（12.18）~式（12.21）计算出来的满足三阶像差要求的补偿反射镜的参数最佳设计参数如表12.3所示。能将高阶像差最小化场镜的焦距为55.4849cm，计算出的自准直波面的均方根光程差为0.009λ（λ=632.8nm）。如果要求得到更小的像差，则必须把补偿器的$-m$值选得更小。这样，最后的补偿反射镜就会更大一些，而自准直光束会聚角则更小。

表12.3　用于检验焦距为3m、相对孔径为1/2.45的双曲面单反射镜补偿参数

设计类型	m	R_N	l	A_N	η_N
三阶值	-4.9	22.2849	65.7404	13.42	1.000
优化值	-4.7	22.2849	65.7518	13.5	1.044

12.9.1　反射式奥夫纳补偿器

虽然图12.36所示的单反射镜补偿器从光学角度看是最简单的反射式补偿器，但是，实际使用的时候还需要附加一个类似于图12.37所示的折射光路用的平板附件，以便得到自准直像。当然该平板的精度必须与球面镜的精度相当。

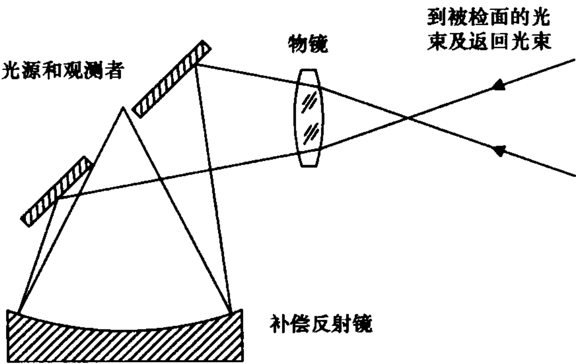


图12.37　实际使用的单反射镜补偿器

图12.38所示的带有场镜双反射镜补偿器也需要相同数量的高精度光学元件，图中采用了共轴光路的形式，以便精确地调整和得到自准直像。

采用双反射镜补偿器时，由于补偿器上开有小孔，所以非球面镜的中心部分是观察不到的。在设计这类补偿器时，应保证在用这类补偿器检测时，非球面镜的中间遮光部分不能大于实际使用时的遮光部分。

每块反射镜上的遮光比的大小对双反射镜补偿器的三阶像差设计是有影响的。当两块反射镜上的遮光比r相同时，适用于下面的公式。与单反射镜补偿镜一样，各参数和孔径都是放大率的函数。对于双反射镜补偿器来说，放大率就是中间像与非球面曲率中心处像的比

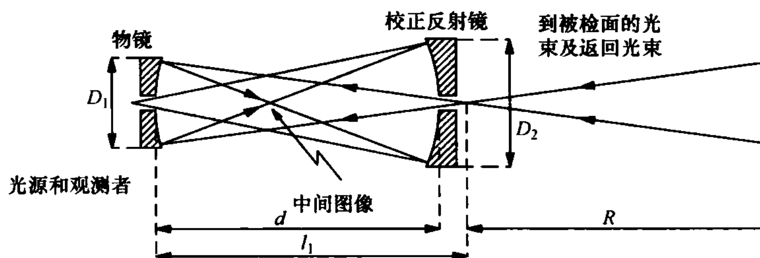


图 12.38 带有场镜的双反射镜补偿器

值，由式（12.16）确定

$$m_1 = -\frac{2\eta_C}{\eta_1} \tag{12.26}$$

式中，η_1 为中间像处的f数。

当二次曲面法线的三阶像差由补偿器的三阶像差补偿时，两个补偿反射镜的孔径 D_1 和 D_2 与二次曲面的孔径 D_C 的比值可用下列公式表示

$$\frac{D_C}{D_1} = \frac{1}{4K}(m_1+1)[m_1^2(1+2r-r^2)-2m_1(1-r)-2] \tag{12.27}$$

$$\frac{D_C}{D_2} = \frac{D_C m_1 r - 1}{D_1\ m_1+1} \tag{12.28}$$

三阶像差设计所需的其他公式如下

$$R_1 = \frac{4D_1\eta_C}{1-m_1} \tag{12.29}$$

$$R_2 = \frac{4D_2\eta_C}{m_1(2-r)+1} \tag{12.30}$$

$$l_1 = 2\eta_C D_1 \tag{12.31}$$

$$d = \eta_1(D_1+D_2) \tag{12.32}$$

$$\eta_N = -\frac{2\eta_C}{m_1(1-r)+1} \tag{12.33}$$

式中，l_1 为从二次曲面的曲率中心到场镜的距离；d 为两个反射镜之间的距离；η_N 为自准直像处的f数。

在两个遮光比不同的情况下，两块反射镜的孔径值和自准直像处的f数随放大率 m 而变化的情况可以由表 12.3 看出。通过将表 12.3 与表 12.1 相比较，可以看出在给定放大率的情况下，双反射镜补偿器中较大的反射镜与单反射镜的尺寸大致相同。然而，表 12.3 中，m_1 与 $2\eta_C\eta_N$ 之间的差异表明：在给定补偿元件最大尺寸的情况下，在使用双反射镜补偿器时，其自准直像的光束会聚角大约是使用单反射镜补偿器时的一半。

从下面的例子可以看出，用双反射镜补偿器所能达到的补偿程度是极高的。设计一个补偿器用于检测一个遮光比为0.5、焦距为3m、相对孔径为1/1.5 的抛物面。需要一个可把会聚角调至 $f/1.2$ 的球面波的干涉仪，为了保证 $\eta_N=1.5$，选取 $r=0.25$，$m_1=-4$。由式（12.27）和式（12.28）可以得到 $A_1=14.82\text{cm}$ 和 $A_2=27.22\text{cm}$。用式（12.29）~式（12.33）计算的参数可作为三阶像差的设计参数，如表 12.4 所示。为了优化补偿器，使用弯月形场镜，其折射率为 1.519，厚度为 0.5cm，凸面的曲率半径为 14.619cm，凹面的曲率

半径为71.656cm，并且凸面朝着二次曲面。根据此场镜和其他稍加修改的参数（见表12.4）可以算出自准直波面的均方根光程差为0.009λ(λ=632.8nm)。如果要求更小的残余像差，则 m_1 的值应减小，这将导致 A_1、A_2 和 η_N 的增大。

表12.4　用于检测焦距为3m、相对孔径为1/1.5的抛物面的双反射镜补偿器的参数

设计类型	m_1	R_1	R_2	l_1	d	A_2	η_2
三阶值	-4.900	17.7778	22.2222	44.4444	27.7778	22.22	1.50
优化值	-3.99	17.7776	22.2227	44.3868	27.7789	13.5	1.52

12.9.2　反射式自适应补偿器

蒂齐亚尼等（Tiziani et al.，2001）提出了另外一种有趣的反射式补偿器。他们在光路中使用的反射式补偿器是一个自适应反射镜，它的面形可以根据计算机的指令而发生变化。如图12.39所示，系统可以将从被检非球面反射出去的波阵面与自适应反射镜的面形进行比较。由于光在自适应反射镜表面被反射两次，所以它的面形与被检非球面波阵面比较两次。变形镜由铝制成，并且有氮化物镀膜。由于光在镀膜上反射两次，这种镀膜的变形量可以达到20μm(PV值)，相当于80个波长。

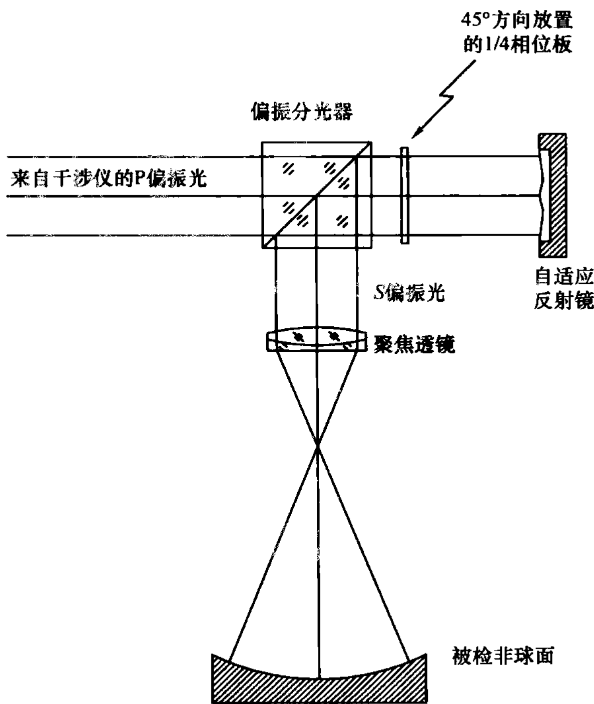


图12.39　使用自适应镜的非球面补偿器

12.10　用于二次凹面的其他补偿检验法

上述各节中所介绍的这些小型简单补偿器之所能得到成功的应用是与下述有利条件的分不开的：

1）凹非球面镜自身可以将光源发出的发散波面变成一个带有像差的汇聚波面。

2）由非球面产生的大部分像差都是初级像差。

3）非球面镜产生的像差符号与由凹面镜或单片凸透镜所产生的像差的符号恰好相反。

如果补偿器小于被检非球面镜，则第一个条件必须满足。第二个条件则保证采用外形简单便于加工的单个零件就可达到较好的补偿。第三个条件为利用一个简单的中继透镜提供了可能性，这就为场镜提供了一个位置。只有这三个条件都得到满足时，才能用凹球面镜作补偿器。

对于任何一个由二次曲面绕其主轴旋转所得的凹面镜，都可以设计出一个外形相同的小型补偿器。

凹扁球面不需要用补偿器，因为它们的几何焦点与所有具有几何焦点的二次曲面一样都是无像差的共轭点。但是，当这些几何焦点之一离镜面很远的时候，12.2～12.4 节中介绍的任一种补偿器都可以比较方便地在曲率中心做补偿检验。

扁球面，例如在赖斯-斯密特（Wright-Schmidt）系统中做主镜用的扁球面，不满足上述第三个条件。但是，用一个平凹透镜取代多尔型补偿器的平凸透镜，如图 12.40 所示，同样能实现另一种多尔型补偿检测。由于透镜的曲面对着扁球面，所以三阶像差的解法在形式上与奥夫纳平凸透镜补偿器的相同。补偿扁球面的三阶像差所需的平凸透镜的各种参数和共轭位置可由式（12.20）得出。m 的值等于 l'/l 的比值。这时 m 的值大于零，而小于 1。m 的选择与扁球面尺寸与补偿器尺寸之比的关系如表 12.5 所示，这些参数是在 $N=1.52$ 和 $K=1$ 时计算出来的。要使 m 的值等于零，就需要再附加一个准直透镜，以便把光源成像在无穷远的共轭点出。最后得到的光路如图 12.41 所示。

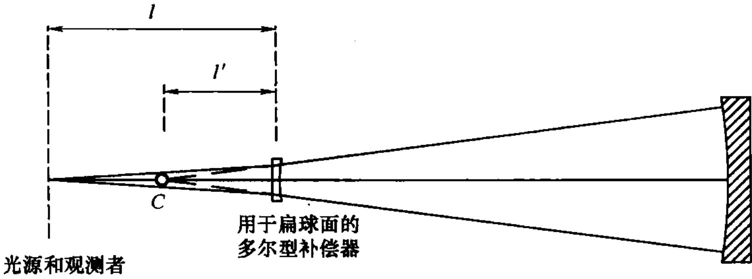


图 12.40 用于检测扁球面的改进型多尔型补偿器

表 12.5 用于检测扁球面的平凹透镜式补偿器的孔径（$N=1.52$，$K=1$）

m	非球面直径/补偿器直径
0.0	8.54
0.1	7.13
0.2	5.88
0.3	4.77
0.4	3.8

有人为一个焦距为 0.6m、相对孔径为 $f/5$、二次曲面系数 $K=1$ 的扁球面设计了一个这种形式的补偿器。其中非球面与基球面的偏差在数值上虽然与 12.2 节例子中抛物面与基球面的偏差相等，但符号却是相反的。选择 $n=1.52$，$m=0$，从式（12.20）可以得到平凸透

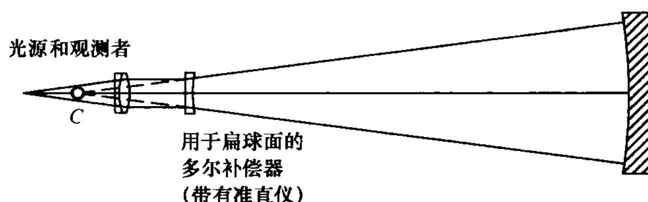


图 12.41 带有准直透镜的用于检测扁球面的补偿器

镜的焦距为70.2216m。自准直波面的均方根光程差为0.033λ(λ=632.8nm)。补偿透镜的直径为0.7cm。

霍勒伦（Holleran，1963、1964）曾介绍过一种用于凹二次曲面的补偿检验法。这种方法的优点是不需要制造额外的光学零件。把被检测的表面水平的浸放在液体中，于是液体就形成一个表面与被检测表面相接触的平凸透镜。最简单的检验方式是把一个针孔光源和刀口放在液面上方的距离 d 处。当液体透镜的厚度为 t，折射率为 n 时，则有下面的关系式

$$d=\frac{R}{n}-t \tag{12.34}$$

式中，R 为二次曲面顶点的曲率半径。

如果满足条件

$$n^2=1-\frac{KR}{R-t} \tag{12.35}$$

则自准直像的三阶球差就能得到补偿。其中 K 为反射镜的二次曲面系数。

对于中等孔径的弯曲量不大的曲面，检验精度是非常高的。在满足式（12.35）和 $t \ll R$ 时，偏离理想二次曲面的峰-峰值 Δw 为

$$\Delta w \approx \frac{KR}{41.5\eta^6}\text{波长} \tag{12.36}$$

式中，η 为二次反射面的 f 数；R 为其曲率半径，以 mm 为单位；波长为632.8nm。

用这种方法对一个直径0.5m、相对孔径 $f/3$ 的抛物面镜进行理想零位补偿后，它的峰-峰值误差为0.10个波长。如果把 f 值降至2.5，但口径保持不变，则面形误差增大到0.25波长。当孔径为0.2m、$f/2.5$ 时，误差为0.10波长。

通过平的背面进行观察，这种形式的浸液检验法也适用于检验凸的非球面。这时，光学材料取代了浸液。普里耶夫（Puryayev，1971）对这种把浸液放在平面上引申出来的方法进行了分析。由于这时液体必须延伸到自准直像处，所以这种引申出来的方法实际上只适用于小型光学零件的检验。当把浸液换成空气时，普里耶夫的公式就变换成了霍勒伦的公式。

诺曼（Norman，1957）介绍过一种关于凸双曲面检验的方法。此法利用了以下事实：如果平凸透镜的凸面是二次曲面，并且该曲面的偏心率与制造该透镜所用材料的折射率相同，则此平凸透镜能使位于其轴线上的无限远处的点光源形成一个无像差的像点。为了确定凸表面的面形，通过检验离透镜凸面一倍焦距、从其平面或一个与此平面平行的平面镜反射回来的点光源的自准直像，就可以判断其凸面的面形。与霍勒伦和普里耶夫检验法一样，能用此法检验的二次曲面的变化范围受到折射率变化范围的限制。当玻璃折射率在1.5～1.8范围内变化时，这种方法可以对放大率在3.5～5之间的双曲面进行检验。霍勒伦（1966）曾指出，一个球形的后表面可以作为检验凹扁球面的补偿器。这时需要从扁球面背后通过球

面进行检验。

12.11 使用实全息图的干涉仪

光学零件全息检验法能够使用各种各样的实验装置。因为全息图是一幅简单的干涉图，在图上参考波前与物波前之间有一个大的倾角，所以既可以使用标准的干涉仪进行全息检测，也可以使用参考光束与物体之间有较大倾角的装置进行全息检测。如图 12.42 和图 12.43 所示的干涉仪可用全息法来检测凹透镜。

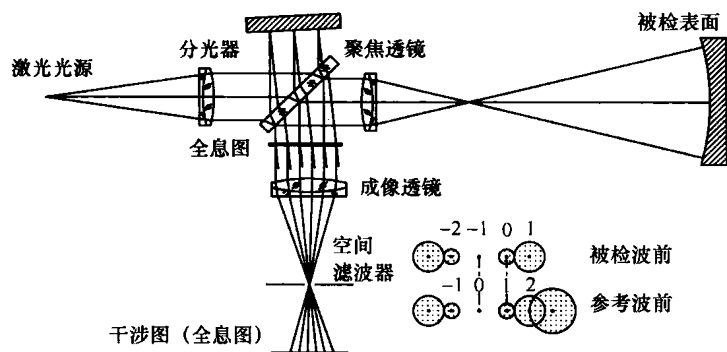


图 12.42 有全息补偿器的泰曼-格林干涉仪

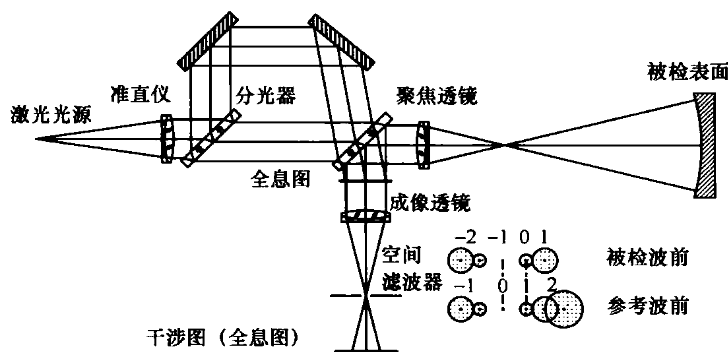


图 12.43 有全息补偿器的马赫-泽德（Mach-Zehnder）干涉仪

全息图可在被检测面的共轭平面上获得。一旦获得全息图，就可以利用平面波照射及成像到观察屏上实现在原位置上替换并重建全息图。当物体光束被阻断，参考镜面倾斜以便于参考平面波与全息图一级衍射光干涉，这样就可以重构镜面波前。由于全息图会产生多级衍射光，所以有必要使用空间滤波器选择其中的一级。只有在重构全息图的时候，成像透镜和空间滤波器才是必需的。

全息图可以存储在光敏材料、热塑性材料或光聚材料中。其中，光敏材料有最高的分辨力；在处理的过程中，它们需要大量的化学物品，而且除非能在原来的位置处理它们，否则很难在实时技术中使用它（Biedermann，1975）。热塑性材料可以提供高达每毫米 1000 条线的分辨力，其上的信息可以反复擦除数百次（Leung et al.，1979；Friesem et al.，1980）。而且它们的转换速度很快。光聚材料具有作为高分辨存储介质的巨大潜能（Lam et al.，1984；Uhrich and Hesselink 1988）；然而，它的光学装置太复杂，而且与获得其他存储材料

相比，获得高质量的晶体不易。一个非常有前途的技术是使用高分辨率的探测器阵列或 CCD 相机直接存储全息图。

12.11.1　全息波前存储

在一定情况下全息存储一个光学系统的波前，并且在以后没有被检光学系统存在时分析这个波前是相当方便的（Hildebrand et al.，1967；Hansler，1968）。

使用的时候，需要保证全息图再现的波前与记录全息图时的波前相同。但是这很难做到，因为再现装置的光路结构与记录装置光路结构存在差异，记录材料的变形，记录材料基片引入的像差等都可能产生误差。如果使用一个准直参考波前并且使物波前也尽可能准直，那么就能大大减小由于再现装置结构与记录装置结构的差异而产生的误差。如果再现波长与记录波长不相同，则使用准直波前就特别重要了。记录材料的变形会改变记录干涉条纹的形状，因而也改变再现波前的形状。实验证明，使用柯达 649F 照相底片，波前均方根误差可能会有小于 $\lambda/40$（Wyant and Bennett，1972）。照相底片所用玻璃基片的光学厚度变化一般至少是每英寸一个条纹。这个厚度变化已经超过了波前记录所允许的限度。把照相底片放在液门里，或使底片的两个表面与两个高质量的光学样板的指标匹配都可以解决这个问题。也可以采用使干涉对比所用的两个波前都通过全息图的方法，减小光学厚度的变化量，进而消除像差。

存储的全息图可用于检测对称的光学零件（Greivenkamp，1987）。首先，获得被检面的一个全息图，然后相对于全息图旋转被检面。旋转前后被检面的两个波前的条纹与被检面上对称的偏移量对应。必须注意，被检面在旋转时不能发生移动，否则额外的干涉条纹会影响被检面。

12.11.2　全息检测板

一旦组装好一个十分理想的光学系统，就可以全息地存储这个光学系统产生的波前，并且用这个波前来检验其他光学系统。这和检验光学零件使用样板的作用几乎一样（Hansler，1968；Pastor，1969；Snow and Vandewarker，1970；Lurionov et al.，1972；Broder-Bursztyn and Malacara，1975）。将处理过的全息图放在原来的位置，并且用被检镜代替主镜。将全息图上存储的波前与被检镜产生的波前进行干涉比较。在被检面出瞳的共轭位置上记录存储波前与被检镜产生的波前次级干涉图。如果全息图是在与被检系统出射光瞳共轭的平面上制作的，那么简单的改变全息图重构时所用波前的倾斜量就能够选择所制作干涉图的倾斜量。但是，如果全息图不是在与被检测系统的出射光瞳共轭的平面上制作的，那么除干涉图引入倾斜之外，倾斜参考光束会引起被检光学出射光瞳的像与已经存储的主光学系统出射光瞳之间产生位移。

可以从莫尔条纹的角度来考虑全息板干涉仪（Pastor，1969）。存储在全息图上的波前与来自被检光学零件的波前相干涉而得到的干涉条纹，可以看成是两种干涉条纹叠加而产生的莫尔条纹，其中一种是记录在全息图板上的干涉条纹（由主光学系统和平面波产生的波前形成的），另一种是由被检波前和平面波前形成的实时干涉条纹。用空间滤波的方法能提高莫尔条纹的对比度，也就是通过只选取由被检镜面产生的波前并从全息图中选取衍射级，这些衍射级能够给出由主光学系统生成的存储波前。

除去上面已经介绍过的误差源，干涉仪中全息图的位置不当也会产生误差。全息图的任

何移动或转动都会产生误差。如果全息图与主光学系统的出射光瞳共轭，那么被检光学系统的出射光瞳必定与全息图重合。如果用 $\phi(x, y)$ 表示全息图平面上的被检波前，则全息图在 x 方向上的移动距离 Δx 产生的误差为

$$\Delta\phi(x,y) \approx \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\Delta x \tag{12.37}$$

式中，$\frac{\partial\ \phi(x,\ y)}{\partial\ x}$是 x 方向上波前的斜率。

同样，如果用 $\phi(r, \theta)$ 表示波前，转动误差 $\Delta\theta$ 产生的误差为

$$\Delta\phi(r,\theta) \approx \frac{\partial\phi(r,\theta)}{\partial\theta}\Delta\theta \tag{12.38}$$

在干涉仪的参考光光路上放置一个移相器，并使次级干涉条纹的相位发生移动，即移相技术可以测量次级干涉条纹的相位（Hariharan et al.，1982；Hariharan，1985）。因为次级干涉条纹的间距对应于存储波面与实时被检测波面之间一个波长的光程差，所以条纹相对于被检面 $\pi/2$ 的相位变化会导致次级干涉条纹发生 $\pi/2$ 的相位变化。计算出来的相位曲面对应于主光学元件和被检光学元件之间的相位差。为保证条纹正确的对应于被检面，在进行相位检测时，全息图必须是在被检面的成像面上获得的，并且全息平面成像于探测器阵列。

12.12 应用综合全息图的干涉仪

在许多情况下不能用主光学零件制作实全息图，这时可以制作一种计算机生成（或合成）全息图（CGH）（Pastor，1969；Lee，1970、1974；MacGovern and Wyant，1971；Wyant and Bennett，1972；Schwider and Burow，1976；Caulfield et al.，1981；Ono and Wyant，1984；Dörband and Tiziani，1985；Beyerlein et al.，2002；Reichelt et al.，2004；Pruss et al.，2004）。一个 CGH 是实际干涉图（全息图）的二进制表示法，如果被检测系统的理想波前与一个倾斜的平面波前互相干涉，就能获得这种实干涉图。这种检测装置与实全息图使用的装置一样。在检测非球面光学元件时，CGH 是零位光学系统之外的一种选择。

12.12.1 CGH 的制作

要制作符合要求的计算机全息图（CGH），首先应对检验装置进行光线追迹，以便得到在全息图平面上由倾斜平面波与完善的被检反射镜对应的非球面波前相互干涉产生干涉条纹的位置。正如实全息图作为样板使用一样，应该在与被检光学系统的出射光瞳共轭的平面上制作全息图。干涉条纹可以看成是占空比为 50% 的二元光栅。怀扬特和班尼特（Wyant and Bennett，1972）、李（Lee，1974）和阿诺德（Arnold，1989）等人给出了计算这种条纹的方法。梁等（Leung et al.，1980）介绍了一种将干涉条纹编码成一系列长方形的方法。但是，这种将干涉条纹编码成长方形或多边形的方法会占用大量的计算机存储单元，而且显示图形也会花费很多时间。所以如果知道干涉仪中所有光学零件的参数并且能对它们进行光线追迹，那么任何普通的光学系统都可以采用这种方法来生成 CGH 计算机生成全息图。

典型的计算机生成全息图 CGH 如图 12.44 所示。图 12.45 所示为用于检测深度非球面光学元件的干涉仪光路。如果被检面与球面的偏移量较大，那么边缘光线（不是近轴光线）

在经过被检面反射后会以不同的路径通过发散透镜。当被检面刚好成像在观察面时，即使光路不同，边缘光线到达的点刚好是其对应光线沿光路通过参考镜后到达的位置。这一点与没有球面变形时一样。按照费马（Fermat）原理，从被检面上任一点到观察平面的任何可能的光路都是一样的，都能自动补偿误差。总之，当不能在观察平面上成理想像的时候，最终干涉图中就会有额外的像差。然而，当能对整个系统进行光线追迹的时候，只需使用零位补偿检测即可补偿全息图中的额外像差。另外还有重要问题需要考虑，那就是如果被检测元件与光线的偏移量过大，那么经被检元件反射的光线无法返回干涉仪。如果发生这种情况，就必须使用一个偏振零位透镜来保证光线能返回干涉仪。在零位光学元件与计算机生成全息图 CGH 组合一节中有详细的介绍。

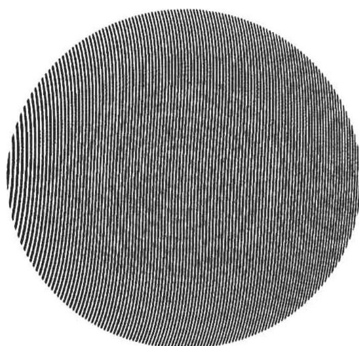


图 12.44　典型的计算机生成全息图 CGH

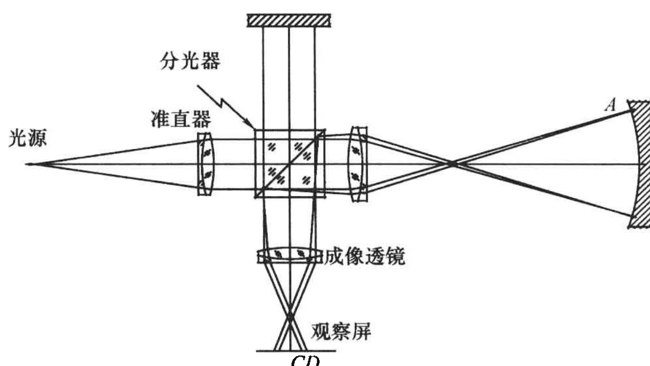


图 12.45　用于检测深度非球面光学元件的干涉仪光路

一旦得到干涉条纹，既可以直接将其打印在全息基板上，也可以将其精简后打印在全息基板上。近年来，绘图技术已经得到了长足的发展。早期工作使用笔式绘图仪绘制一幅放大的全息图，而现在全息图通过摄影技术被精简到一个合适的尺寸（MacGovern and Wyant，1971；Wyant and Bennett，1972；Wyant and O'Neill，1974）。较大幅面可以生成高分辨率的 CGH 计算机生成全息图。但是，绘图仪自身无规律的变化，诸如线宽、画笔质量、绘图仪变形等会造成重构波前的误差。照相法中固有的非线性和精简光学系统中的失真会进一步降低图像质量。随着激光记录仪的出现，由于记录速度和无变形记录点数量的增加，计算机生成全息图 CGH 的分辨率得到很大的改善。电子束记录仪是目前记录 CGH 的最先进技术，以往它用于制作半导体掩模（Emmel and Leung，1979；Leung et al.，1980；Arnold，1989）。这些仪器在光刻胶上刻写，光刻胶沉积在光学质量玻板上，可以生成高质量的 CGH。在所需要尺寸的全息图上可以生成包含 10^8 个数据点的图形。一般的电子束记录仪能以 0.25μm 的分辨力在 1mm 的范围内写信息。利用小面积拼接的方法，电子束记录仪可以制作大面积的全息图。采用这种技术时，误差的主要来源是电子光学系统的像差、电子束的漂移、电子控制系统的不稳定性和光刻机定位误差。对于同轴全息图，伯格等人（Burge et al.，1994）使用了一种基于氧化铬的热化学方法，其中的氧化铬附着在基板上。用这种技术时，首先使用一个带有空气轴承的特殊记录装置来旋转基板，以便使用 Ar^+ 激光选择性地氧化附在基板上的铬。然后，即图形写入后，将基板连同它的附着物浸入液体中，除去基板上没有氧化的铬。

计算机生成全息图中的许多误差具有可重复性，可以在记录仪的控制程序中加以补偿（Chang and Burge，1999；Arnold and Kestner，1995）。可以通过生成全息图的方法来评估绘

图仪的误差，全息图中的直线以正交方式形成网格（Wyant et al.，1974）。然后，用两个平面波照射全息图，以便使 $+N$ 级和 $-N$ 级衍射光进行干涉。用全息图的 $\pm N$ 级衍射光来评估 CGH 绘图仪的装置如图 12.46 所示。干涉条纹与直线的偏差就是绘图过程中的误差。N 级衍射光产生的干涉图中的像差是一级衍射光的 $2N$ 倍。

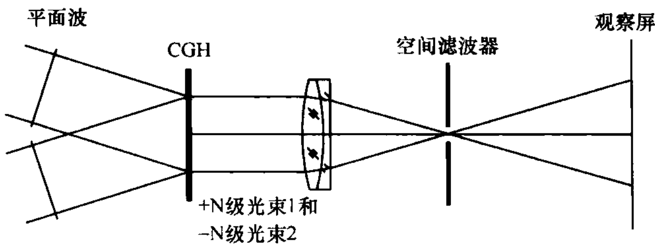


图 12.46 用全息图的 $\pm N$ 级衍射光来评估 CGH 绘图仪的装置

12.12.2 应用综合全息图的干涉仪

CGH 检测有多种方法，一种是用存储在全息图中参考波前与被检波前进行干涉。采用这种检测方法时，必须覆盖零级检测光，而一级参考光会在全息图的傅里叶平面上形成全息图。CGH 检测的另一种方法是用负一级检测光与零级参考光进行干涉，这是比较两个平面波，而不是比较两个非球面波。当检测波前与参考波前发生偏离时，与两个波前偏离量对应的干涉条纹就会出现。在全息图的傅里叶平面上，如果干涉仪正确放置，那么参考波前的零级和一级衍射点将与被检波前的负一级和零级衍射点重叠。这两种输出量可以产生相同的干涉图。如果用于产生全息图的参考平面波的倾角足够大，使用空间滤波器可以提高干涉条纹的对比度。

CGH 补偿器既可以在离轴情况下，也可以在非离轴的情况下使用，至于 CGH 在两种情况下的优缺点，将在下节中介绍。

CGH 可以放置在不同的位置。通常有两种方法：一种是将 CGH 放置在检测空间，其中检测空间是只有被检波面通过全息图的空间；另一种是将 CGH 放置在观察空间，其中观察空间是指用于干涉的两个波前都通过全息图的空间。下面详细分析这两种情况。同实全息图一样，计算机生成全息图对误差也很敏感。正是由于这个原因，计算机生成全息图应该放在干涉仪内部，以便使全息图基板的厚度不均对最终结果无影响。它的重要性取决于计算机全息图的位置。

1）如果全息图位于观察平面，那么参考波面和被检波前都通过全息图。每个波前都会产生自己的衍射波前。在这种情况下，选择合适的空间滤波器，可得到衍射的参考波前（非球面）与被检波前的干涉图，或者未衍射的参考波前（几乎是平面）与补偿过的被检波前的干涉图。因为相互干涉的两个波前都通过计算机生成全息图，所以全息图玻璃基板的小的缺陷不会对最终结果产生太大的影响。

这种情况下，全息图与干涉图叠加后的图案可以认为是莫尔条纹。如果再将这个图案进行空间滤波，那么就可以得到代表波前相对于非球面（不是相对于平面）偏离量的干涉条纹。甚至将带有干涉图案的玻璃片与带有全息图的玻璃片重叠的方法也可以得到这样的条纹，如图 12.47 所示。

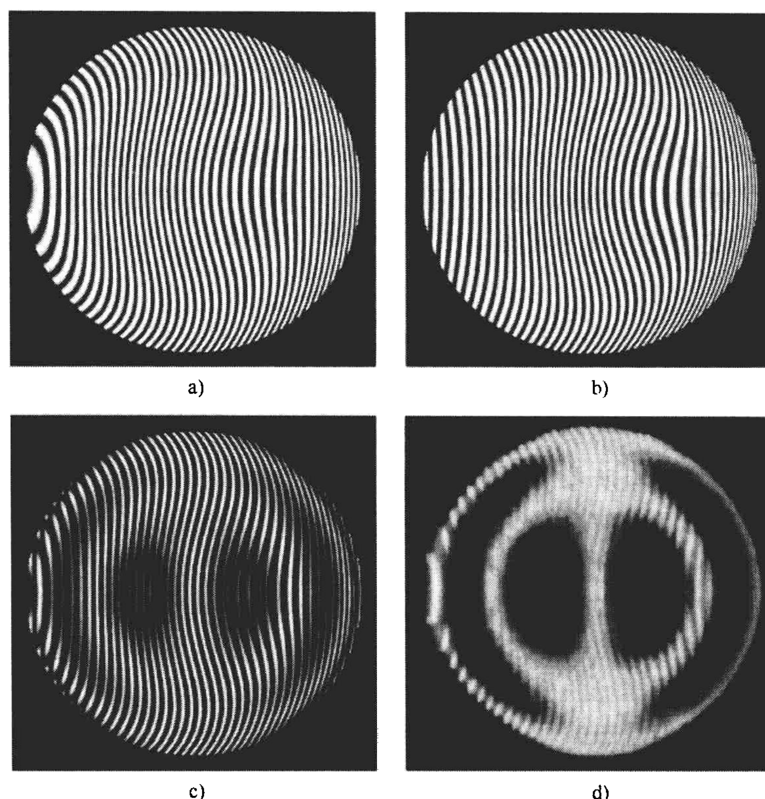


图 12.47　有较大倾角的干涉图的莫尔条纹分析

a）待分析干涉图　b）计算机生成的理想干涉图　c）待分析干涉图与理想干涉图叠加后的合成图

d）经过低通滤波的合成图

2）如果全息图放在干涉仪的内部，那么只有被检波前经过全息图，但是它会通过全息图两次。用波前第一次经过全息图的衍射级数来表示对应的衍射光线。由于所有的光线在被待检非球面反射后返回全息图，所以它们可以用一对数来表示，第一个数是波前第一次经过全息图时的衍射级数，第二个数是第二次经过时的衍射级数。它们的排列如下所示：

(−1, −1)　(−1, 0)　(−1, 1)

(0, −1)　(0, 0)　(0, 1)

(1, −1)　(1, 0)　(1, 1)

上面的每一行对应于一个衍射角。选择合适的空间滤波器，就可以分离和观测特定光线，例如（1，0）与（0，1）或者（0，1）与（1，0）。由于被检波前通过全息图，计算机生成全息图应该在高质量的玻璃板上制作，玻璃板应该有很高的平面度和高度均匀的折射率，否则它的像差就会叠加到衍射波前上。

除与实全息图有关的误差源外，计算机生成全息图还有别的误差源，主要有绘图仪失真、不正确的全息图尺寸和缩小全息图尺寸造成的失真。这些误差的大小与非球面波前偏离球面或平面波的最大斜率成正比。当被检波前是相对于球面波计算得到时，误差可以最小

化，而相对于球面波来计算被检波前可以使被检面与球面波偏离量的斜率最小化。另外，使用电子束记录仪直接将正确尺寸的全息图写入玻璃基板，这样可以消除因缩减全息图尺寸造成的误差。

我们知道，产生误差的另一个原因是全息图尺寸不正确。设全息图平面上被检有像差的波前为 $\phi(r,\ \theta)$，如果全息图的尺寸不正确，那么全息图的波前用 $\phi(r/M,\ \theta)$ 来表示，其中 M 是放大倍数。全息图尺寸不正确造成的误差等于差值 $\phi(r/M,\ \theta)-\phi(r,\ \theta)$，用泰勒级数表示如下

$$\phi\left(\frac{r}{M},\theta\right)-\phi(r,\theta)=\phi\left[r+\left(\frac{1}{M}-1\right)r,\theta\right]-\phi(r,\theta)$$
$$=\left[\frac{\partial\phi(r,\theta)}{\partial r}\right]\left(\frac{1}{M}-1\right)r+\cdots \tag{12.39}$$

如果 M 近似于 1，并且所考察的是小范围，就可以忽略展开式中高于第一级的项。需要注意的是这种误差类似于径向剪力。当绘制计算机生成全息图的时候，用于获得全息图合适尺寸的对准辅助线也必须与全息图一块绘制。

全息图绘图仪的失真是产生误差的主要原因（Wyant et al.，1974）。计算机全息图波前的准确度取决于绘图仪分辨点的数目及被检非球面波前的最大斜率。假设绘图仪有 $P\times P$ 个分辨点，所以通过全息图半径的分辨点有 $P/2$ 个。由于在绘制任意一点时的最大误差是半个分辨单位，所以构成全息图的每一条线的任何部位都可以偏移其正确的位置，移动距离等于 $1/P$。如果在全息图的每条半径上被检面与倾斜平面之间的最大夹角为 $4S$ 个波长，那么在全息图上平面波的相位与所要求的波前对应线上的相位差能够高达 $4S/P$ 个波长（1980）。重构波前的最大误差有 $4S/P$ 个波长，当在全息图的成像面上记录最终干涉图时，一般用有限个分辨点对干涉图进行量化，但是，这种量化会在最终的干涉图中造成 $4S/P$ 个波长的峰值误差。需要注意的是，$4S/P$ 个波长的波前误差是一个非常糟糕的情况；只有在全息图斜率差最大的区域，绘图仪的失真也为最大的情况下，它才会发生。如果知道绘图仪的失真量，那么由它造成的综合误差就可以得到校正（Wyant et al.，1974）。当绘图的最大误差等于 1/2 个最小量化单位时，计算机生成全息图检测的灵敏度 Δw 就等于 $4S/P$，其中的 P 是不失真绘图点的数量。当被检波前的每条半径上波前的最大斜率为 1000 个波长时，用分辨力为 0.25μm 的电子束记录仪记录直径为 10mm 的全息图，其检测的灵敏度可以达到 $10/\lambda$（假设绘图仪是理想的）。

12.12.3 离轴 CGH 非球面补偿器

为保证一级衍射光和二级衍射光不在傅里叶平面（该平面上放置空间滤波器）上发生叠加，参考平面波的倾角必须比有像差波的最大波前斜率大三倍。需要注意的是，对于占空比为 50% 的光栅来讲，它的衍射级数没有偶数。图 12.48 是全息图在傅里叶平面上的衍射图，各个衍射级经过必要分离后如图 12.49 所示。第 N 级衍射光的带宽为 $2NS$，其中的 S 为重构波前每条半径上最大波前斜率。这种带宽（傅里叶平面上衍射光线的直径）决定着空间滤波器的孔径。通过改变空间滤波器的孔径，干涉仪要么输出两个平面的干涉图，要么输出两个非球面波的干涉图。

如果全息图是记录在高质量光学平面上或者被应用于反射系统中，它就可以放在干涉仪中一个光束的光路上，如图 12.50 所示。如前所述，可以用一个针孔将（-1，0）衍射级

与（0，-1）衍射级分开，或者将（1，0）衍射级与（1，0）衍射级分开。波前需要经过 CGH 两次，但是整个波前的补偿只需一次通过 CGH 即可完成。

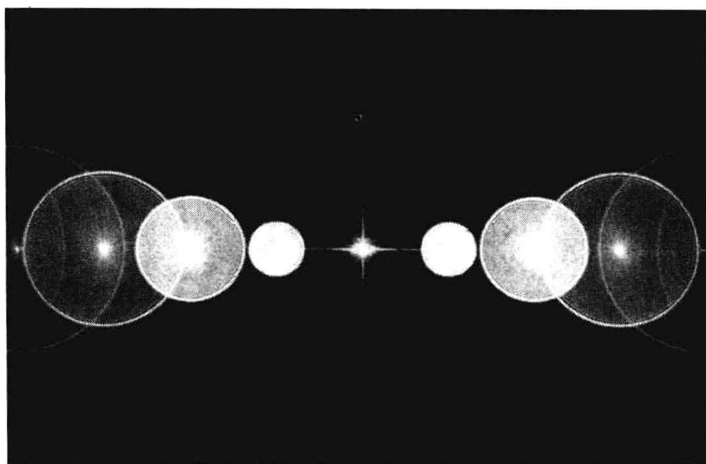


图 12.48　CGH 在傅里叶平面上的衍射级

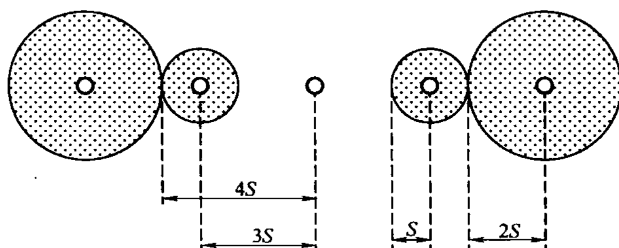


图 12.49　CGH 在傅里叶平面上的衍射级

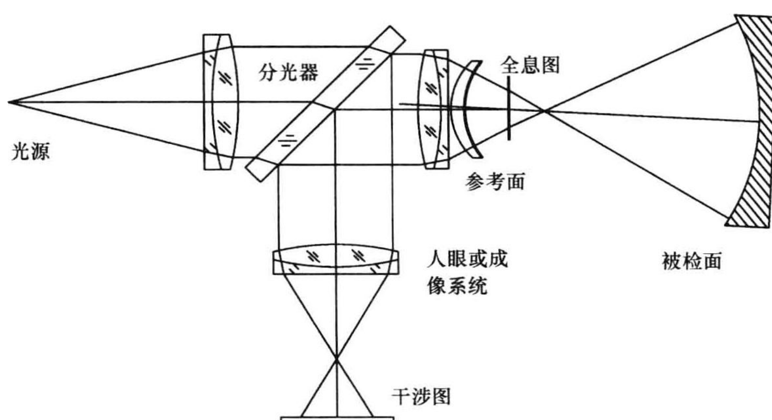
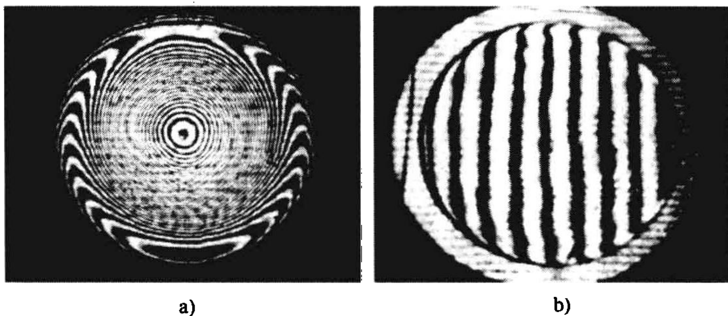


图 12.50　在一个光束中使用 CGH 的非佐干涉仪

图 12.51 给出来用 CGH 检测直径 10cm、相对孔径 $f/2$ 的抛物面的结果，其中 CGH 是用电子束记录仪制作的（Leung et al.，1980）。图 12.51a 是没有使用 CGH 时泰曼-格林干涉仪

的结果，其中的干涉仪使用氦氖光源。在将 CGH 放入干涉仪后，可以得到一个比较简单的干涉图，如图 12.51b 所示。CGH 可以矫正由球差造成的大约 80 个干涉条纹，进而使检测更加容易。



a) b)

图 12.51 直径 10cm、相对孔径为 $f/2$ 的抛物面检测结果
a）没有使用电子记录仪制作的 CGH b）使用电子记录仪制作的 CGH

12.12.4 同轴 CGH 的非球面补偿器

对于离轴 CGH，同轴 CGH 的缺点就在于无法完全分离高阶像。在这种全息图中，分离像的原理是不同的像聚焦在不同的平面上，但是这种方法无法分离一阶像。然而，同轴 CGH 有两大优点：一个是光学元件的对齐十分简单；另一个是能够测量的非球面度比较高，这主要得益于没有横向装置。梅谢尔等（Mercier et al.，1980）、费克尔（Fercher，1976）和蒂齐亚尼等（Tiziani et al.，2001）都对同轴 CGH 做过研究。它可以应用在泰曼-格林干涉仪或菲佐干涉仪中，如图 12.50 所示。

为避免不对称，以保证进出系统的光路一样（其中的系统是指由 CGH 和被检表面组成的系统），被分离的光束是（1，-1），且该光与参考光的相互干涉形成干涉条纹。

检测凸非球面的光路如图 12.52 所示。伯格（Burge，1995）曾建议，减小参考面与凸面之间的距离可以减小辅助参考凹面镜的尺寸，具体的方法就是在凹参考面上雕刻全息环带，如图 12.53 所示。需要注意的是，光线首先垂直入射到凹参考面上，然后，经过衍射，它们与被检面垂直。这样，即使参考面和被检面紧密的放在顶点，它们的曲率半径也不会完全一样。

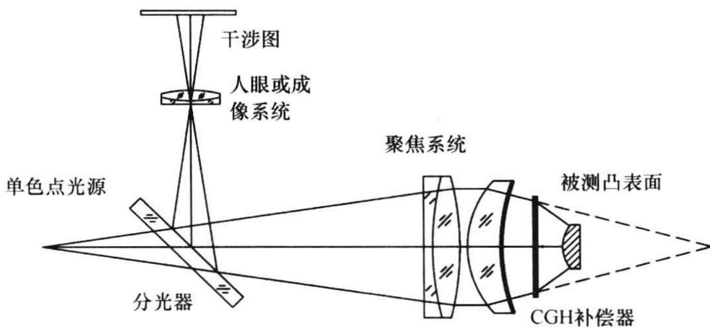


图 12.52 使用带有 CGH 补偿器的菲佐干涉仪检测凸非球面

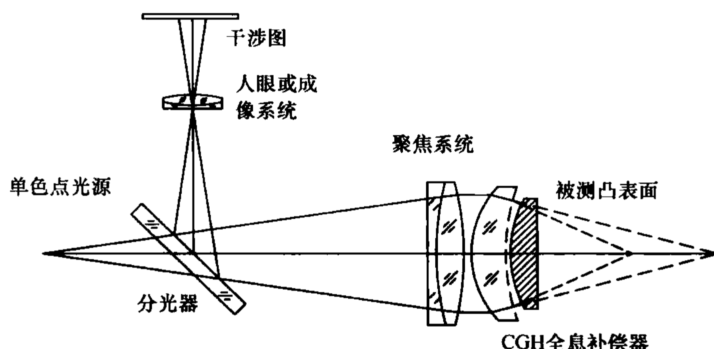


图 12.53　用检测板检验凸非球面（检验板的凸表面上有一个内置的 CGH）

12.12.5　CGH 与补偿光学元件的组合使用

虽然能够设计任何光学系统的 CGH，但是很快就可以发现制作一幅 CGH 所花费的时间和费用是不合算的。同样，花费足够多的时间和资金也可能设计和制造出用来检验几乎所有任意复杂光学系统的反射和折射的补偿光学系统。

经过研究发现，在许多情况下，可以把相对简单的补偿光学零件和比较简单的 CGH 结合在一起，代替检验复杂非球面（高度非球面）光学零件所需的复杂 CGH 或复杂补偿光学零件。

为了说明这两种检验方法结合在一起的优点，图 12.54（Wyant and O'Neill，1974）给出了用 CGH 补偿透镜检验一个偏心卡塞格林系统中主反射镜的结果。在这个主反射镜中，偏差大约是 455 个波长（在 514.2nm 波长上），最大斜率为每个半径 1500 个波长。主反射镜是一个直径为 69cm 的离轴反射镜，其中心距离母体非球面的对称轴为 81cm。补偿光学零件是一个马克苏托夫（Maksutov）球面镜，如图 12.55 所示，该球面镜把非球面波前的偏差从 910 个波长减小到 45 个波长，把斜率从每条直径 3000 个波长减小到 70 个波长。然后使用全息图消除剩余的非球面偏差。

图 12.54a 所示为用 CGH-马克苏托夫球面检验装置得到的两幅干涉图。图 12.54b 所示为用相当昂贵的折射补偿透镜进行同一检验时得到的干涉图。在考虑到用补偿透镜获得干涉图的变形比用 CGH-马克苏托夫干涉图的变形大得多这个事实和考虑到二者灵敏度的差异以后（补偿透镜检测时 $\lambda = 632.8$nm，CGH-马克苏托夫检验时 $\lambda = 514.5$nm），看来这两种检验结果非常相似。正如预料的那样，对两种检验方法来说，在反射镜表面上的“峰”和“谷”几乎是相同的。用补偿透镜的方法测得的表面误差峰-峰值是 0.46 个波长（$\lambda = 632.8$nm）；而用 CGH-马克托苏夫检验方法时，峰-峰值是 0.39 个波长（$\lambda = 514.5$nm）。用补偿透镜方法时，表面误差的均方根为 0.06 个波长（$\lambda = 632.8$nm），而用 CGH-马克托苏夫检验方法时，表面的均方根是 0.07 个波长（$\lambda = 514.5$nm）。毫无疑问，以上的测量结果表明可以用相对比较便宜的补偿光学元件和 CGH 结合来代替昂贵的补偿光学元件。

在光学设计中越来越普遍地采用非球面，通过使用 CGH 可以使非球面检验难题变得容易解决。检验非球面光学元件的主要问题在于如何充分降低像差以确保光线能返回穿过干涉仪。将简单的补偿光学元件与 CGH 结合进行检验，几乎可以测量所有光学器件的面形。制作和使用 CGH 的过程类似于使用一个干涉仪产生大量的干涉条纹并在大量数据点上测量干

涉图。记录并分析高密度干涉图遇到的困难与制作 CGH 所涉及的困难也很相似。在两种情况中，都需要大量的数据点，并且都必须对干涉仪进行追迹，以便得知干涉仪产生的像差。采用 CGH 技术的优点在于一旦制成 CGH，就能够多次检验单个光学零件或者检验多个相似的光学零件（Greivenkamp，1987）。另外，对于光学技师来讲，将其与补偿装置一起使用会更加方便。

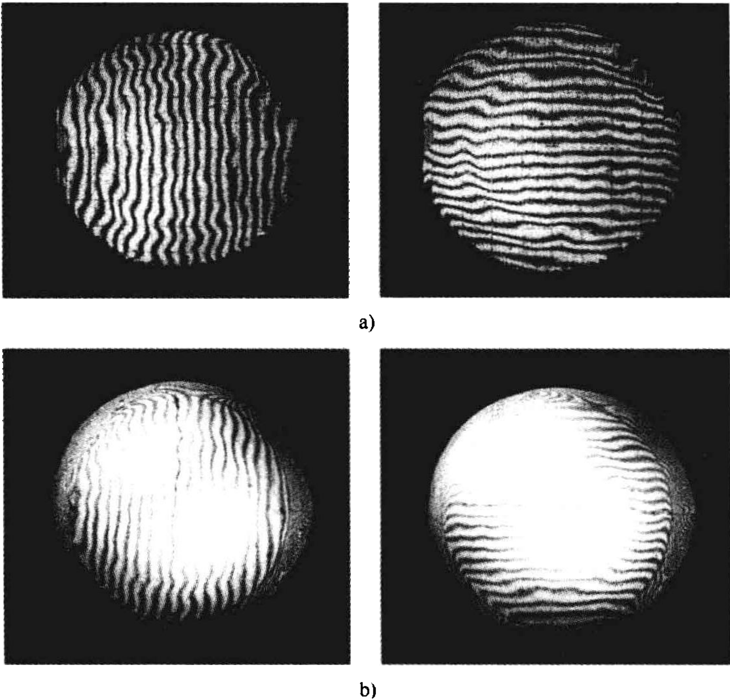


图 12.54 两种检验方法的结果
a）用 CGH-马克苏托夫球面检验装置得到的两幅干涉图（$\lambda=514.5$nm）
b）利用补偿透镜得到的干涉图（$\lambda=632.8$nm）

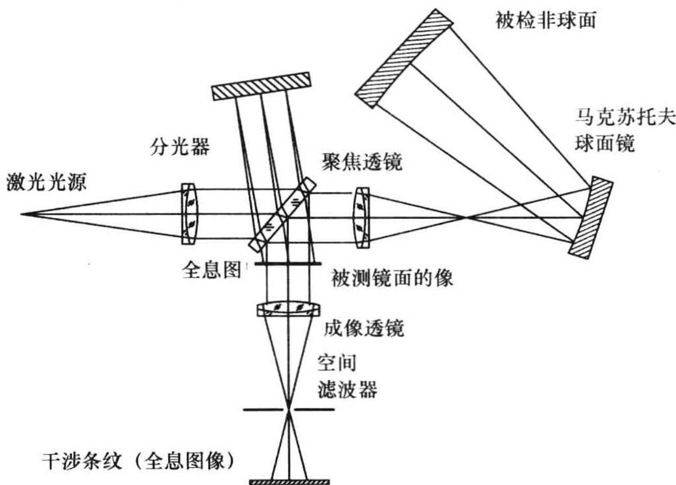


图 12.55 CGH-马克苏托夫球面检验装置

12.13　利用双波长全息图检验非球面

常常由于对待测面了解不充分而无法使用零位检测法。即使试图使用零位检测法，最后得到的干涉图由于包含太多的干涉条纹而无法进行分析。由于零件加工初期的检验对精度要求不高，所以能够在干涉仪中使用较长波长的光源以减少干涉条纹数量。但很遗憾，由于不能用照相底片或探测器阵列直接记录干涉图及看不见光辐射，因此使用较长波长的光源给实验带来相当大的困难。正如许多文章指出的一样（Wyant，1971；Wyant et al.，1984；Cheng and Wyant，1984、1985；Creath et al.，1985；Creath and Wyant，1986；Wyant and Creath，1989），双波长或多波长技术提供了一种用可见光合成一种有效长波长光的方法，使用该技术得到的干涉图与直接使用长波长光源得到的干涉图十分相似。

使用双波长全息图技术时，首先是对干涉条纹进行拍照，该干涉条纹是在诸如图12.55所示的干涉仪中利用波长 λ_1 的光检验光学元件时所得到的。然后，把这张记录有干涉条纹（全息图）的底片显影，并且放回它在干涉仪中曝光时所在的确切位置上，利用另一个不同波长 λ_2 的光对光学零件进行检验，用检验得到的条纹图样照明上述全息图。最后得到的双波长干涉条纹可以认为是存储在全息图中干涉条纹（在 λ_1 处记录，在 λ_2 处重现）与现场干涉条纹（λ_2 处）之间的莫尔条纹，也可以认为是存储在全息图中的被检波前与现场检验波前之间的次级干涉条纹。这些条纹与使用长有效波长 λ_e 对光学元件进行检测时得到的干涉条纹一样（Wyant，1971），其中

$$\lambda_e = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{|\lambda_1 - \lambda_2|} \tag{12.40}$$

表12.6所示为用氩离子激光器和一台氦-氖激光器产生的波长进行各种不同配对所得到的等效波长 λ_e 的值。使用一台染料激光器能够在一定范围内连续得到等效波长。另外，用输出光的波长可在绿光与红光之间调节的氦-氖激光器也可以得到等效波长。

表12.6　用氩离子激光器和氦-氖激光器能够得到的等效波长　（单位：μm）

λ/nm	459.7	476.5	488.0	496.5	501.7	514.5	632.8
459.7	—	11.73	9.95	5.89	5.24	4.16	1.66
476.5	11.73	—	20.22	11.83	9.49	6.45	1.93
488.0	9.95	20.22	—	28.50	17.87	9.47	2.13
496.5	5.89	11.83	28.50	—	47.90	14.19	2.30
501.7	5.24	9.49	17.87	47.90	—	20.16	2.42
514.5	4.16	6.45	9.47	14.19	20.16	—	2.75
632.8	1.66	1.93	2.13	2.30	2.42	2.75	—

用空间滤波器可以提高最终干涉图的对比度。如果这种滤波方法有效，那么干涉仪中两个干涉光束之间的夹角必须满足只允许物体光束通过空间滤波器（孔径），而参考光不能通过，如图12.55所示。这个经过空间滤波的条纹在两个波前之间产生干涉：一个波前是照射（使用波长 λ_2）全息图（使用波长 λ_1 记录）时所产生的，另一个是使用波长 λ_2 照射光学零件产生的。由于双波长全息干涉图只能在全息图平面上给出两条干涉光束之间差异，所以必须在与被检面共轭的平面上记录干涉条纹（全息图）。应该在全息图的像平面上拍摄最终的

干涉图照片。

图 12.56a 是使用波长为 488.0nm 的激光得到的一幅被检零件的干涉图。图中其他几幅干涉图是用双波长全息技术检验同一个光学零件得到的干涉图。图 12.56b ~ e 是先用 514.5nm 的激光记录干涉图，再利用另一波长照亮该干涉图而得到的图案，其中图 12.56b 和 c 的第二个激光波长是 476.5nm，图 12.56d 和 e 的第二个激光波长是 488.9nm。这些干涉图是经过空间滤波的，所表示的倾斜量是在再现过程中通过改变参考波前入射到全息图上的角度来实时调节的。图 12.56f 和 g 两幅干涉图是先用波长 488.0nm 的激光记录干涉图，然后分别使用波长分别为 476.5nm 和 496.5nm 的激光照亮干涉图而获得的。

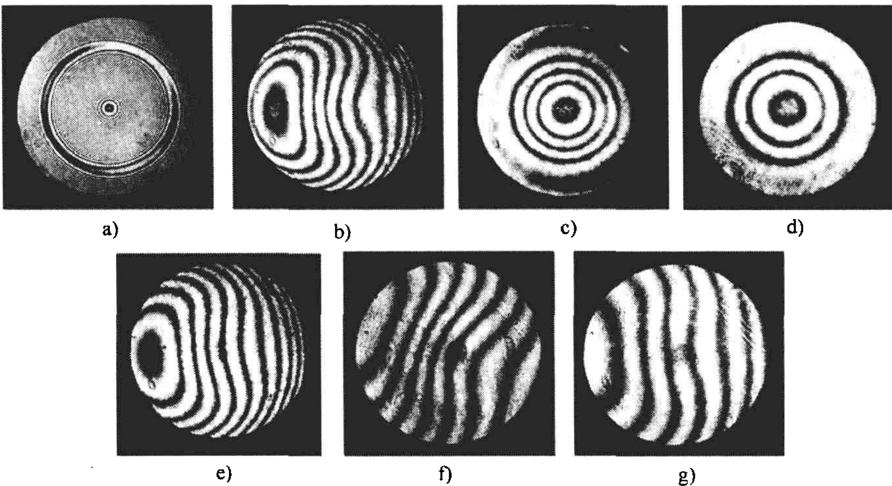


图 12.56 使用等效波长时一个光学零件的干涉图

a) λ =488nm b) λ_e =6.45μm c) λ_e =6.45μm d) λ_e =9.47μm e) λ_e =9.47μm f) λ_e =20.22μm g) λ_e =28.50μm（来自 Wyant，1971）

在上述的双波长全息技术中，最后得到的干涉图给出了在某一时间点记录的条纹图与随后某一时间点存在的条纹图之间的差异。如果两个条纹图的差异是由于除波长变化以外的原因引起的（例如空气湍流），那么得到的结果是错误的。换而言之，如果空气湍流使得用 λ_1 =488.0nm 的激光得到的干涉图与用 λ_2 =514.5nm 激光得到的干涉图有一个条纹的变化，那么莫尔条纹就包含一个条纹的误差，即相当于 9.7μm。

同时记录由两个波长得到的两幅干涉图的方法可以减小空气湍流的影响。如果记录过程是充分非线性的，并且干涉图有足够高的对比度，则所得到的干涉图呈现出前述的莫尔条纹。通常这种莫尔条纹的对比度太差，没有使用价值。但是，当用平面波照射时，该干涉图被空间滤波并且按照图 12.55 所示的方式重新成像，会得到一幅高对比度的干涉图，与前面利用双波长全息术方法得到的干涉图相同。由于两个干涉图是同时记录的，并且空气色散很小，所以干涉仪对于空气湍流的灵敏度基本上和干涉仪中使用长波长光源是一样。

有关双波长和多波长干涉测量技术的更多应用细节问题会在 15 章中介绍。

12.14 波前拼接

在波前的非球面度过大及参考波前没有倾斜的情况下干涉条纹的最小间隔过小时，在不

违背奈奎斯特（Nyquist）条件的前提下，一种测量波前的可选方法就是将整个口径分割成一系列的小区域，这样，干涉条纹的最小间隔就可以大于两倍像素间距。有多种口径分割方法，大致可以把它们分成三类。

12.14.1 环形划分

一个显而易见的方法就是像刘等（Liu et al.，1988）和梅洛兹等（Melozzi et al.，1993）所描述的，先用数个不同的离焦量。然后，就会出现几个干涉条纹间距不超过设定值的环带，在这些区域中奈奎斯特条件就成立。这个可以用图 12.57 来解释，图 12.57 中使用了三种不同的离焦量。可以处理干涉条纹的有用环形区域比其他部分的对比度更大。

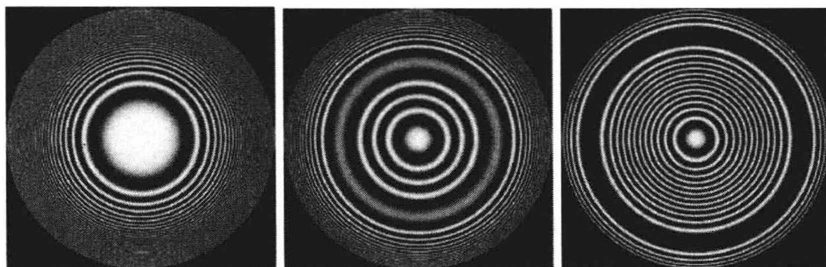


图 12.57 非球面镜三个不同离焦量的干涉图
（干涉条纹能被处理的环形区域比其他部分有更大的对比度）

12.14.2 圆形划分

另外一种用拼接法检验非球面面形的方法是将整个口径划分成许多圆形区域。为了实现干涉条纹最小间距的最大化，圆形区域的倾斜量和其离焦量都要经过优化。例如，可以用一系列小的检光板检验非球面镜的面形，但是，每一个检光板都必须经过优化，以适应各自不同的位置（Jensen et al.，1984）。

在检测光学表面远大于干涉仪的口径，如检测非常大的平面（Negro，1984）时，这种方法也十分有用（Sjödahl and Oreb，2002）。必须采用特殊的处理方法，以保证不同孔径之间的连续性，例如，采用孔径的部分重叠和多项式拟合方法来连接各孔径。

12.14.3 动态倾斜开关

另外一种方法是由雷让勒和蒂齐亚尼（Liesener and Tiziani，2004）及雷让勒等（Liesener et al.，2004）提出来的，它通过动态的改变参考波前的倾角来实现测量。这里，有用区域比无法处理干涉条纹的欠采样区域有更好的对比度。

在泰曼-格林干涉仪中，为了动态的改变参考波前的倾角，采用了图 12.58 所示的结构，其中倾斜的参考光源是利用电子技术选择点亮点光源阵列中不同点光源而产生的。这种阵列叫做相移点光源阵列，它包含一个处于微透镜焦点上的高分辨率液晶显示器，液晶显示器后面有一个微透镜阵列、微透镜阵列后面有一个小孔阵列。当小孔前面的一个小区域透明时，其余的区域不透明。然而，即使所有的小区域都透明，来自微透镜的光只有完全穿过所需区域生成的衍射光栅发生衍射，其第一级衍射光线刚好落在针孔上，这样光线才能进入针孔。图 12.59 对此作了很好的说明。一旦选定倾角，待处理的干涉图如图 12.60 所示。

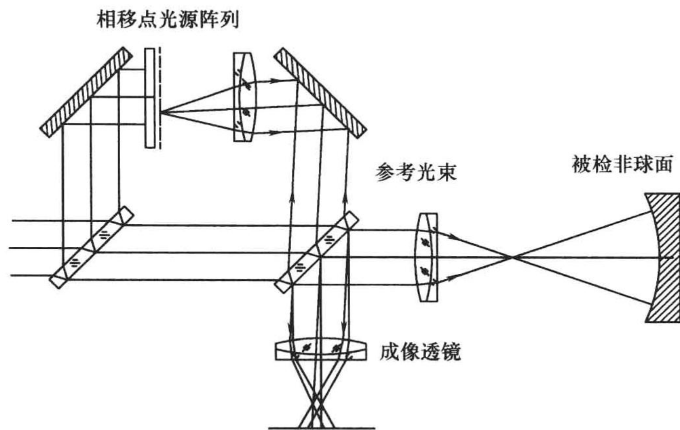


图 12.58 马赫－泽德干涉仪中使参考波前产生动态倾斜的系统结构图

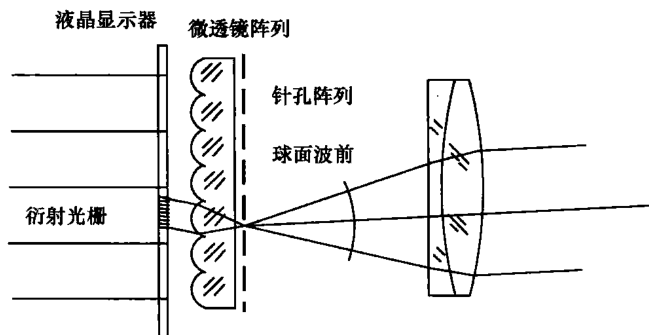


图 12.59 动态倾斜切换装置

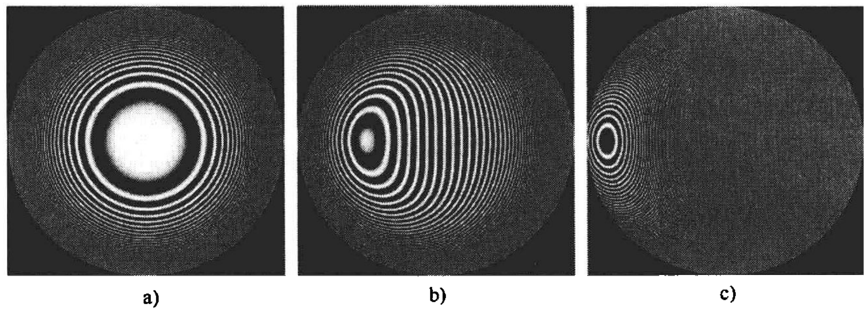


图 12.60 三个不同倾角的干涉图
（处理区域的干涉条纹间距较大，没有超过所用探测器的奈奎斯特极限）

参考文献

Arnold S. M., "How to Test an Asphere with a Computer-Generated Hologram," *Proc. SPIE*, **1052**, 191–197 (1989).

Arnold S. M. and R. Kestner, "Verification and Certification of CGH Aspheric Nulls," *Proc. SPIE*, **2636**, 117–126 (1995).

Beyerlein M., N. Lindlein, and J. Schwider, "Dual-Wave-Front Computer-Generated Holograms for Quasi-Absolute Testing of Aspherics," *Appl. Opt.*, **41**, 2440–3106 (2002).

Biedermann K., "Information Storage Materials for Holography and Optical Data Processing," *Opt. Acta*, **22**, 103–124 (1975).

Broder-Bursztyn F. and D. Malacara, "Holographic Interferometer to Test Optical Surfaces," *Appl. Opt.*, **14**, 2280–2282 (1975).

Bruns D. G., "Null Test for Hyperbolic Convex Mirrors," *Appl. Opt.*, **22**, 12 (1983).

Burch C. R., "On Reflection Compensators for Testing Paraboloids," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **96**, 438 (1936).

Burch C. R., "Report of the General Meeting of the Association," *J. B. Astron. Assoc.*, **48**, 99 (1938).

Burge J. H., "Fizeau Inteferometry for Large Convex Surfaces," *Proc. SPIE*, **2536**, 127–138 (1995).

Burge J. H., D. S. Anderson, T. D. Milser, and C. L. Vernold, "Measurement of a Secondary Mirror Using a Holographic Test Plate," *Proc. SPIE*, **2199**, 193–198 (1994).

Caulfield H. J., P. Mueller, D. Dvore, A. Epstein, and J. S. Loomis, "Computer Holograms for Optical Testing," *Proc. SPIE*, **306**, 154–157 (1981).

Chang Y.-C. and J. H. Burge, "Error Analysis for CGH Optical Testing," *Proc. SPIE*, **3782**, 358–366 (1999).

Cheng Y.-Y. and J. C. Wyant, "Two-Wavelength Phase Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **23**, 4539–4543 (1984).

Cheng Y.-Y. and J. C. Wyant, "Multiple-Wavelength Phase Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **24**, 804–807 (1985).

Couder A., "Procede d'Examen d'un Miroir Concave Non-Spherique," *Rec. Opt. Theor. Instrum.*, **6**, 49 (1927).

Creath K. and J. C. Wyant, "Direct Phase Measurement of Aspheric Surface Contours," *Proc. SPIE*, **645**, 101–106 (1986).

Creath K., Y.-Y. Cheng, and J. C. Wyant, "Contouring Aspheric Surfaces Using Two-Wavelength Phase-Shifting Interferometry," *Opt. Acta*, **32**, 1455–1464 (1985).

Dall H. E., "A Null Test for Paraboloids," *J. Br. Astron. Assoc.*, **57**, 201 (1947).

Dall H. E., "A Null Test for Paraboloids," in *Amateur Telescope Making*, vol. 3, A. E. Ingalls, Ed., Scientific American, New York, 1953, pp. 149–153.

Dörband and H. J. Tiziani, "Testing Aspheric Surfaces with Computer Generated-Holograms: Analysis of Adjustment and Shape Errors," *Appl. Opt.*, **24**, 2604–2611 (1985).

Dyson J., "Unit Magnification Optical System without Seidel Aberrations," *J. Opt. Soc. Am.*, **49**, 713 (1959).

Emmel P. M., K. M. Leung, "A New Instrument for Routine Optical Testing of General Aspherics," *Proc. SPIE*, **171**, 93–99 (1979).

Everhart E., "Null Test for Wright Telescope Mirrors," *Appl. Opt.*, **5**, 717–718 (1966).

Friesem A. A., Y. Katzir, Z. Rav-Noy, and B. Sharon, "Photoconductor-Thermoplastic Devices for Holographic Nondestructive Testing," *Opt. Eng.*, **19**, 659–665 (1980).

Geary J. M., "Fiber/Cylinder Interferometer Test: Focus and Off-Axis Response," *Opt. Eng.*, **30**, 1902–1909 (1991).

Geary J. M. and L. J. Parker, "New Test for Cylindrical Optics," *Opt. Eng.*, **26**, 813–820 (1987).

Greivenkamp J. E., "Sub-Nyquist Interferometry," *Appl. Opt.*, **26**, 5245–5258 (1987).

Hansler R. L., "A Holographic Foucault Knife-Edge Test for Optical Elements of Arbitrary Design," *Appl. Opt.*, **7**, 1863–1864 (1968).

Hariharan P., "Quasi-Heterodyne Hologram Interferometry," *Opt. Eng.*, **24**, 632–638 (1985).

Hariharan P., B. F. Oreb, and N. Brown, "A Digital Phase-Measurement System for Real-Time Holographic Interferometry," *Opt. Commun.*, **41**, 393–396 (1982).

Heintze L. R., H. D. Polster, and J. Vrabel, "A Multiple-Beam Interferometer for Use with

Spherical Wavefronts," *Appl. Opt.*, **6**, 1924 (1967).

Hildebrand B. P., K. A. Haines, and R. Larkin, "Holography as a Tool in the Testing of Large Apertures," *Appl. Opt.*, **6**, 1267–1269 (1967a).

Hildebrand B. P. and K. A. Haines, "Multiple-Wavelength and Multiple-Source Holography Applied to Contour Generation," *J. Opt. Soc. Am.*, **57**, 155–162 (1967b).

Hindle J. H., "A New Test for Cassegrainian and Gregorian Secondary Mirrors," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **91**, 592 (1931).

Holleran R. T., "Immersion Null Test for Aspherics," *Appl. Opt.*, **2**, 1336 (1963).

Holleran R. T., "Null Testing Telescope Mirrors by Immersion," *Sky Telesc.*, **28**, 242 (1964).

Holleran R. T., "Third-Order Wavefronts and Related Null Tests," *Appl. Opt.*, **5**, 1244 (1966).

Holleran R. T., "An Algebraic Solution for the Small Lens Null Compensator," *Appl. Opt.*, **7**, 137 (1968).

Houston J. B., Jr., C. J. Buccini, and P. K. O'Neill, "A Laser Unequal Path Interferometer for the Optical Shop," *Appl. Opt.*, **6**, 1237 (1967).

Howard J. W., M. H. Beaulieu, and R. J. Zielinski, "A Nonobscuring, Easily-Callibrated Method for Testing Ellipsoids on a Fizeau Interferometer," *Proc. SPIE*, **389**, 26 (1983).

James W. E. and M. D. Waterworth, "A Method for Testing Aspheric Surfaces," *Opt. Acta*, **12**, 223–227 (1965).

Jensen S. C., W. W. Chow, and G. N. Lawrence, "Subaperture Testing Approaches: A Comparison," *Appl. Opt.*, **23**, 740–744 (1984).

Kirkham A. R., "The Ronchi Test for Mirrors, " in: *Amateur Telescope Making*, vol. 1, A. G. Ingalls, Ed., Scientific American, New York, 1953, p. 264.

Lam P., J. D. Gaskill, and J. C. Wyant, Two Wavelength Holographic Interferometer," *Appl. Opt.*, **23**, 3079–3081 (1984).

Lamprecht J., N. Lindlein, and J. Schwider, "Null Test Measurement of High-Numerical-Aperture Cylindrical Microlenses in Transmitted Light," *Proc. SPIE*, **5180**, 253 (2003).

Landgrave J. E. A. and J. R. Moya, "Dummy Lens for the Computer Optimization of Autostigmatic Null Correctors," *Appl. Opt.*, **26**, 2673 (1987).

Lee W. H., "Sampled Fourier Transform Hologram Generated by Computer," *Appl. Opt.*, **9**, 639–643 (1970).

Lee W. H., "Binary Synthetic Holograms," *Appl. Opt.*, **13**, 1677–1682 (1974).

Leung K. M., T. C. Lee, E. Bernal G., and J. C. Wyant, "Two-Wavelength Contouring with the Automated Thermoplastic Holographic Camera, " *Proc. SPIE*, **192**, 184–189 (1979).

Leung K. M., J. C. Lindquist, and L. T. Shepherd, "E-Beam Computer Generated Holograms for Aspheric Testing," *Proc. SPIE*, **215**, 70–75 (1980).

Liesener J. and H. Tiziani, "Interferometer with Dynamic Reference," *Proc. SPIE*, **5252**, 264–271 (2004).

Liesener J., L. Seifert, H. J. Tiziani, and W. Osten, "Active Wavefront Sensing and Wavefront Control with SLMs," *Proc. SPIE*, **5532**, 147–158 (2004).

Liu Y.-M., G. N. Lawrence, and C. L. Koliopoulos, "Subaperture Testing of Aspheres with Annular Zones" *Appl. Opt.*, **27**, 4504–4513 (1988).

Loomis J. S., "Computer-Generated Holography and Optical Testing," *Opt. Eng.*, **19**, 679–685 (1980).

Lurionov N. P., A. V. Lukin, and K. S. Mustafin, "Holographic Inspection of Shapes of Unpolished Surfaces," *Sov. J. Opt. Technol.*, **39**, 154–155 (1972).

MacGovern A. J. and J. C. Wyant, "Computer Generated Holograms for Testing Optical Elements," *Appl. Opt.*, **10**, 619–624 (1971).

Malacara Z. and D. Malacara, "Design of Lenses to Project the Image of a Pupil in Optical Testing Interferometers," *Appl. Opt.*, **34**, 739–742 (1995).

Malacara D. and C. Menchaca, "Imaging of the Wavefront Under Test in Interferometry," *Proc. SPIE*, **540**, 34 (1985).

Meinel A. B. and M. P. Meinel, "Self-Null Corrector Test for Telescope Hyperbolic Second-

aries," *Appl. Opt.*, **22**, 520 (1983a).

Meinel A. B. and M. P. Meinel, "Self-Null Corrector Test for Telescope Hyperbolic Secondaries: Comments," *Appl. Opt.*, **22**, 2405 (1983b).

Melozzi M., L. Pezzati, and A. Mazzoni, "Testing Aspheric Surfaces Using Multiple Annular Interferograms," *Opt. Eng.*, **32**, 1073–1079 (1993).

Mercier R., F. Bridou, B. Bonino, and M. Mullot, "Control of Aspherics by In-Line Computer-Generated Holograms," *Proc. SPIE*, **235**, 80–84 (1980).

Moya J. R. and J. E. A. Landgrave, "Third-Order Design of Refractive Offner Compensators," *Appl. Opt.*, **26**, 2667 (1987).

Negro J. E., "Subaperture Optical System Testing," *Appl. Opt.*, **23**, 1921–1930 (1984).

Norman B. A., "New Test for Cassegrainian Secondaries," *Sky Telesc.*, **17**, 38 (1957).

Offner A., "A Null Corrector for Paraboloidal Mirrors," *Appl. Opt.*, **2**, 153 (1963).

Offner A., "Field Lenses and Secondary Axial Aberration," *Appl. Opt.*, **8**, 1735 (1969).

Ono A. and J. C. Wyant, "Plotting Errors Measurement of CGH Using an Improved Interferometric Method," *Appl. Opt.*, **23**, 3905–3910 (1984).

Parks R. E., "Making and Testing an f/0.15 Parabola," *Appl. Opt.*, **13**, 1987–1987 (1974).

Parks R. E. and L. Z. Shao, "Testing Large Hyperbolic Secondary Mirrors," *Opt. Eng.*, **27**, 1057 (1988).

Pastor J., "Hologram Interferometry and Optical Technology," *Appl. Opt.*, **8**, 525–531 (1969).

Pruss C., S. Reichelt, H. J. Tiziani, and W. Osten, "Computer-Generated Holograms in Interferometric Testing," *Opt. Eng.*, **43**, 2534–2540 (2004).

Puryayev D. T., "A Quality Control Technique *for* Convex Elliptical, Parabolic and Hyperbolic Surfaces of Simple Lenses," *Soc. J. Opt. Technol.*, **38**, 684 (1971).

Puryayev D. T., "Compensator for Inspecting the Quality of Large-Diameter Parabolic Mirrors," *Sov. J. Opt. Technol.*, **40**, 238 (1973).

Reichelt S., C. Pruss, and H. J. Tiziani, "Absolute Testing of Aspheric Surfaces," *Proc. SPIE*, **5252**, 252–263 (2004).

Ritchey G. W., "On the Modern Reflecting Telescope and the Making and Testing of Optical Mirrors," *Smithson. Contrib. Knowl.*, **34**, 3 (1904).

Robbert C. F., "Typical Error Budget for Testing High-Performance Aspheric Telescope Mirror," *Proc. SPIE*, **181**, 56 (1979).

Rodgers J. M. and R. E. Parks, "Null Tests for Oblate Spheroids," *Appl. Opt.*, **23**, 1246–1247 (1984).

Rodgers J. M., "A Null-Lens Design Approach for Centrally Obscured Components," *Proc. SPIE*, **679**, 17 (1986).

Ross F. E., "Parabolizing Mirrors without a Flat," *Astrophys. J.*, **98**, 341 (1943).

Sasian J. M., "Design of Null Correctors for the Testing of Astronomical Optics," *Opt. Eng.*, **27**, 1051 (1988).

Sasian J. M., "Optimum Configuration of the Offner Null Corrector: Testing an F/1 Paraboloid," *Proc. SPIE*, **1164**, 8 (1989).

Schlauch J., "Construction of a Dall Null Tester," *Sky Telesc.*, **18**, 222 (1959).

Schupmann L., *Die Medial-Fernrohre:* Eine *neue Konstruktion jar grosse astronomische Inhrumente*, Teubner, Leipzig, 1899.

Schwider J. and R. Burow, "The Testing of Aspherics by Means of Rotational-Symmetric Synthetic Holograms," *Opt. Appl.*, **6**, 83 (1976).

Schwider J., "Interferometric Tests for Aspherics," *OSA TOPS*, **24**, 103–114 (1999).

Shafer D. R., "Zoom Null Lens," *Appl. Opt.*, **18**, 3863 (1979).

Shnurr A. D. and A. Mann, "Optical Figure Characterization for Cylindrical Mirrors and Lenses," *Opt. Eng.*, **20**, 412–416 (1981).

Silvertooth W., "A Modification of the Hindle Test for Cassegrain Secondaries," *J. Opt. Soc Am.*, **30**, 140 (1940).

Simpson F. A., B. H. Oland, and J. Meckel, "Testing Convex Aspheric Lens Surfaces with a Modified Hindle Arrangement," *Opt. Eng.*, **13**, 101 (1974).

Sjödahl M. and B. F. Oreb, "Stitching Interferometric Measurement Data for Inspection of Large Optical Components," *Opt. Eng.*, **41**, 403–408 (2002).

Snow K. and R. Vandewarker, "On Using Holograms for Test Glasses," *Appl. Opt.*, **9**, 822–827 (1970).

Stoltzmann D. E. and M. Hatch, "Extensions of the Dall Null Test," *Sky Telesc.*, **52**, 210 (1976).

Tiziani H. J., S. Reichlet, C. Pruss, M. Rocktächel, and U. Hofbauer, "Testing of Aspheric Surfaces," *Proc. SPIE*, **4440**, 109–119 (2001).

Uhrich C. and L. Hesselink, "Optical Surface Inspection Using Real-Time Fourier Transform Holography in Photorefractives," *Appl. Opt.*, **27**, 4497–4503 (1988).

Wyant J. C., "Testing Aspherics Using Two-Wavelength Holography," *Appl. Opt.*, **10**, 2113–2118 (1971).

Wyant J. C. and K. Creath, "Two-Wavelength Phase-Shifting Interferometer and Method," U.S. Patent No. 4,832,489 (1989).

Wyant J. C. and V. P. Bennett, "Using Computer Generated Holograms to Test Aspheric Wavefronts," *Appl. Opt.*, **11**, 2833–2839 (1972).

Wyant J. C. and P. K. O'Neill, "Computer Generated Hologram: Null Lens Test of Aspheric Wavefronts," *Appl. Opt.*, **13**, 2762–2765 (1974).

Wyant J. C., B. F. Oreb, and P. Hariharan, "Testing Aspherics Using Two-Wavelength Holography: Use of Digital Electronic Techniques," *Appl. Opt.*, **23**, 4020–4023 (1984).

Wyant J. C., P. K. O'Neill, and A. J. Mac Govern, "Interferometric method of measuring plotter distortion," *Appl. Opt.*, **11**, 1549–1551 (1974).

第 13 章　泽尼克多项式与波前拟合

维伦德拉（Virendra），N. 马哈詹（N. Mahajan）

13.1　简介

光学成像系统通常有一个旋转对称轴，并且它们的光瞳通常是圆形或者环形的，如带有反射镜的系统。这类系统的像差函数可以展开为一个幂级数或者一组完整的正交多项式。泽尼克（Zernike，1934a、b）在利用刀口检验法或相衬法测试一个圆反射镜时首先提出了泽尼克多项式的概念，之后尼齐玻尔（Nijboer，1943、1947）和宁胡依斯及尼齐玻尔（Nienhuis and Nijboer，1949）对泽尼克圆多项式做了更深入的研究并提出了用来描述像差的衍射理论。我们可以看到，这些多项式在整个圆形孔径上是正交的，代表产生最小变化的平衡像差。对小像差光学系统而言，最小的像差方差能产生最大的斯特列尔比（Mahajan，1982，1983，1993），给出了幂级数展开式系数与泽尼克多项式展开式系数之间的关系。我们特别讨论了赛德尔（Seidel）系数与泽尼克多项式系数之间的相互转换。类似地，还讨论了表示环状光瞳系统中最小方差平衡像差的泽尼克环多项式（Mahajan，1981a，b；1984；1994）。这种产生最小光束像差方差的平衡像差，通常称作均方根光斑半径，本书不作介绍（Braat，1987）。最后，讨论利用波前误差数据的一个离散集求解泽尼克系数，波前误差数据是在光学设计中进行光线追迹及在光学检测中进行测量得到的，而不管光瞳的具体形状。上述的处理程序可应用于离轴成像得到的椭圆形光瞳及六边形分块分节镜的六边形光瞳等。

13.2　具有圆形光瞳的旋转对称系统的像差

13.2.1　幂级数展开法

考虑一个旋转对称光学系统对一个点目标 P 成像，如图 13.1 所示。该旋转对称轴叫做光轴，表示为 z 轴。设该目标点的位置矢量为 $\vec{h}$，在与该光轴垂直的平面内，笛卡儿坐标为（x_o，y_o）。类似的，设该系统出瞳平面上点 Q 的位置矢量为 $\vec{r}$，该出瞳平面正交于光轴，其笛卡儿坐标为（x，y）。坐标原点（x_o，y_o）和点（x，y）在光轴上，并假设 x_o 轴和 x 轴是共面的。目标和光瞳点的极坐标分别是（h，θ_o）和（r，θ），与其笛卡儿坐标的关系见公式

$$(x_o, y_o) = h(\cos\theta_o, \sin\theta_o) \tag{13.1a}$$

$$(x, y) = r(\cos\theta, \sin\theta) \tag{13.1b}$$

如图 13.2 所示，对极角进行标准转换来表示一个位置矢量与 x 轴的夹角。

在光学系统中普遍设定点目标在 y 轴上。当使用出瞳平面上点的极坐标时，极角 θ 定义为其位置矢量与 y 轴的夹角，对该点的转换与 x 轴上的情况恰好相反。选定一个在 x 轴上的点目标，彗差表示为 $x(x^2+y^2)$ 而不是 $y(x^2+y^2)$。彗差的正值生成一个衍射点扩展函数，

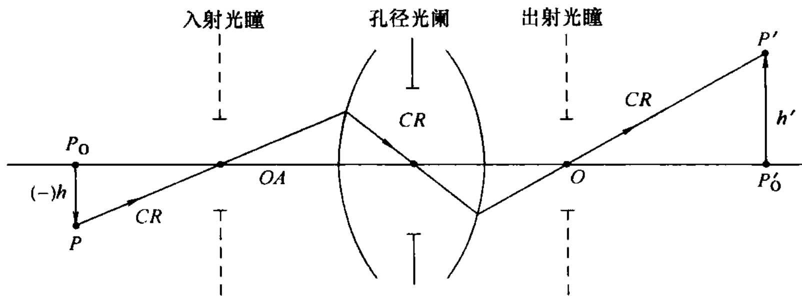


图 13.1 光成像系统的示意图

（OA 光轴上高 h 的物点目标 P 成像为 P'，高 h'，CR 为主光线）

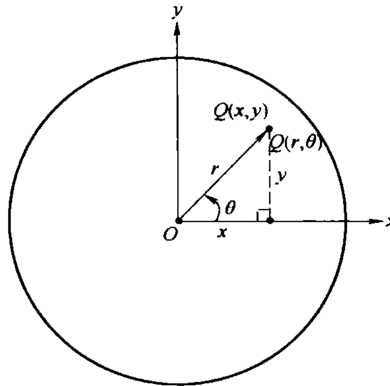


图 13.2 出瞳平面上瞳点 Q 的笛卡儿坐标和极坐标分别为 (x, y)、(r, θ)

关于 x 轴对称（或者关于 y 轴对称），它的峰值和质心相对于高斯成像点偏移正值 x。

旋转对称系统的像差函数取决于4个坐标值（x_o，y_o）和（x，y），并依赖于三个旋转不变量 h^2、r^2 和 $hr\cos(\theta-\theta_o)$。不考虑普遍性，我们假设这个点目标在 x_o 轴上，所以 $\theta_o=0$。该像差函数的级数展开 $W(h'; r, \theta)$ 表示如下（Mahajan，2001）

$$
\begin{aligned}
W(h';r,\theta) &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{lpm}(h^2)^l(r^2)^p(hr\cos\theta)^m \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{lpm}h^{2l+m}r^{2p+m}\cos^m\theta \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} {}_{lpm}a_{nm}h'^{2l+m}r^n\cos^m\theta
\end{aligned}
\tag{13.2}
$$

其中，C_{lpm} 和 $h_{2l+m}a_{nm}$ 是展开系数。l、P 和 m 是正整数（包括0），$n=2p+m$。注意 $n-m\geqslant 0$ 并且为偶数。$n=m=0$ 的项称为平移像差，尽管这类项不构成像差（因为它符合定义为零像差的主光线）。该像差函数定义为到达曲率半径为 R 的高斯参考球面光线的光程差，该主光线穿过出瞳中心，参考球面的曲率中心在高斯成像点 P'，距光轴高 h'。成像的放大率为 $M=h'/h$。穿过出瞳平面的一个点 $Q(x, y)$ 的光束的波像差 $W(x, y)$ 表示它与主光线的光程差，即穿过入瞳和出瞳中心的主光线。这个值是正数或者负数取决于它与到达参考球面的主光束相比具有或长或短的光程。

像差项的级数 i 等于其在目标坐标系和光瞳坐标系的级数，表示为 $i=2l+m+n$。参数 i 为偶数，该等级的项数 N_i 表示为

$$N_i=(i+2)(i+4)/8 \tag{13.3}$$

该像差项称为经典像差。一条光束的光束像差可以表示为光束与成像平面的相交点相对于高斯成像点的坐标，由于它和波像差的关系可以根据式（13.4）用空间导数来表示（Welford, 1974; Malacara and Malacara, 1994; Mouroulis and Macdonald, 1997; Mahajan, 2001）：

$$(x_i,y_i)=\frac{R}{n_i}\left(\frac{\partial W}{\partial x},\frac{\partial W}{\partial y}\right) \tag{13.4}$$

式中，$W(x,y)$ 为笛卡儿坐标的波像差；n_i 为成像空间的折射率（通常等于1），它的级数比波像差小1级，例如，一个四阶波像差生成一个三阶光束像差。

如果将那些与目标坐标具有不同的相关性、而与光瞳坐标具有相同的相关性的像差项结合起来，则每一对（n，m）值只有一项，该像差函数的幂级数展开式（13.2）可以写成

$$W(\rho,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}a_{nm}\rho^n\cos^m\theta \tag{13.5a}$$

其中，$\rho=r/a$ 是径向变量，由出瞳半径 a 进行归一化，展开系数

$$a_{nm}=a^n\sum_{l=0}^{\infty}{}_{2l+m}a_{nm}h'^{2l+m} \tag{13.5b}$$

a_{nm}表示该像差公式的峰值。像差函数的幂级数 i 级展开式的项数由式（13.3）给出。当 $n+m\leqslant i$ 时，展开级数为 i 的式（13.2）的项对应于式（13.4）中相应的项。很明显，当用干涉测量法测量系统像差时，像差项与 h'之间的明确依赖关系不存在了。

13.2.2　初级像差函数或赛德尔像差函数

初级像差函数或者赛德尔像差函数对应于 $i=4$ 时并且由如下式（13.6）的五项组成

$$W_p(h';r,\theta)={}_0a_{40}r^4+{}_1a_{31}h'r^3\cos\theta+{}_2a_{22}h'^2r^2\cos^2\theta+{}_2a_{20}h'^2r^2+{}_3a_{11}h'^3r\cos\theta \tag{13.6}$$

其中，${}_0a_{40}$、${}_1a_{31}$、${}_2a_{22}$、${}_2a_{20}$和${}_3a_{11}$分别表示球差、彗差、像散、场曲、畸变系数。简化的初级像差函数（$n+m\leqslant4$）如下

$$W_P(\rho,\theta)=a_{40}\rho^4+a_{31}\rho^3\cos\theta+a_{22}\rho^2\cos^2\theta+a_{20}\rho^2+a_{11}\rho\cos\theta \tag{13.7}$$

初级像差如表13.1所示。其畸变项和波前倾斜像差与光瞳坐标（ρ，θ）的相关性相同，但是它的系数 a_{11}随 h'、h'^3 而变化。类似的，场曲项和波前焦点分散像差与光瞳坐标的相关性相同，但其系数 a_{20}随 h'、h'^2 而变化。

表13.1　初级像差的一个简化形式（$i=4$，$n+m\leqslant4$）

n	m	像差项 $a_{nm}\rho^n\cos^m\theta$	像差名
1	1	$a_{11}\rho\cos\theta$	畸变
2	0	$a_{20}\rho^2$	场曲
2	2	$a_{22}\rho^2\cos^2\theta$	像散
3	1	$a_{31}\rho^3\cos\theta$	彗差
4	0	$a_{40}\rho^4$	球差

为了进一步简化符号，将初级像差函数写成

$$W(r,\theta;h') = a_s r^4 + a_c h' r^3 \cos\theta + a_a h'^2 \cos^2\theta + a_d h'^2 r^2 + a_t h'^3 r\cos\theta \tag{13.8}$$

或者

$$W(\rho,\theta) = A_s\rho^4 + A_c\rho^3\cos\theta + A_a\rho^2\cos^2\theta + A_d\rho^2 + A_t\rho\cos\theta \tag{13.9}$$

很明显，像差系数 A_i 表示相应像差项的峰值。对于球差 A_s，高斯像平面的光束光斑几何半径等于 $8FA_s$，相应的纵向球差为 $16F^2A_s$，F 是成像光锥的焦比（Mahajan，2001）。对于彗差 A_c，切向和弧矢彗差分别是彗差光斑图像的长度和半宽，等于 $6FA_c$ 和 $2FA_c$。对于像散 A_a，其弧矢和正切线图像长度为 $8FA_a$，间隔距离为 $8F^2A_a$。畸变使图像沿光轴移动 $2FA_t$。

场曲系数通常由如下两个项构成

$$A_d = \frac{1}{2}A_a + A_p \tag{13.10}$$

A_p 为匹兹瓦尔（Petzval）场曲系数。然而该像散的系数 A_a 取决于目标的位置，A_p 则与之无关。像散项和场曲项可以结合写成

$$\begin{aligned} W_{a+d}(\rho+\theta) &= A_a\rho^2\cos^2\theta + A_d\rho^2 \\ &= \frac{1}{2}A_a(3x_n^2 + y_n^2) + A_p(x_n^2 + y_n^2) \\ &= A_{ta}x_n^2 + A_{sa}y_n^2 \end{aligned} \tag{13.11}$$

其中 $(x_n, y_n) = (x, y)/a$ 是归一化笛卡儿坐标，且

$$A_{ta} = \left(\frac{3}{2}A_a + A_p\right) = A_a + A_d \tag{13.12a}$$

和

$$A_{sa} = \left(\frac{1}{2}A_a + A_p\right) = A_d \tag{13.12b}$$

A_{ta}和 A_{sa}分别称为正切和弧矢像散波像差。对应的光束像差等于 $4FA_{ta}$和 $4FA_{sa}$。弧矢、正切和匹兹瓦尔图像位置分别距离高斯图像点 $8F^2A_d$、$8F^2(A_d + A_a)$ 和 $8F^2A_p$。相应图像表面的曲率半径等于 $R_s = h'^2/16F^2A_d$、$R_t = h'^2/16F^2(A_d + A_d)$ 和 $R_p = h'^2/16F^2A_p$。它们之间的关系由式（13.13）给出（Malacara and Malacara，1994；Mahajan，2001）

$$\frac{3}{R_s} - \frac{1}{R_t} = \frac{2}{R_p} \tag{13.13}$$

结果可以得出匹兹瓦尔表面到弧矢表面的距离是其到正切表面距离的三倍。此外，弧矢表面永远位于正切表面与匹兹瓦尔表面之间。很明显，一个 A_p 的场曲暗示在一个高斯图像平面上有一个半径为 $4FA_p$ 的光斑或者在匹兹瓦尔表面上有一个光斑图像。

对于最大图像高度为 h'_{max}的点目标，可以根据参考文献（Welford，1974；Malacara and Malacara，1994；Mouroulis and Macdonald，1997；Mahajan，2001）将像差函数写成用赛德尔和表示的公式

$$\begin{aligned} W(\rho,\theta;h') = {} & \frac{1}{8}S_{\mathrm{I}}\rho^4 + \frac{1}{2}S_{\mathrm{II}}\frac{h'}{h'_{max}}\rho^3\cos\theta + \frac{1}{2}S_{\mathrm{III}}\left(\frac{h'}{h'_{max}}\right)^2\rho^2\cos^2\theta \\ & + \frac{1}{4}(S_{\mathrm{III}} + S_{\mathrm{IV}})\left(\frac{h'}{h'_{max}}\right)^2\rho^2 + \frac{1}{2}S_{\mathrm{V}}\left(\frac{h'}{h'_{max}}\right)^3\rho\cos\theta \end{aligned} \tag{13.14}$$

其中，S_{I}、S_{II}、S_{III}、S_{IV}和S_{V}分别称为球差、彗差、像散、匹兹瓦尔场曲（也叫简化匹兹瓦尔和）和畸变的赛德尔和。当$h'=h'_{max}$，根据不同的情况赛德尔和乘以F得到以下结果：S_{I}时为高斯图像平面上的光斑半径，S_{II}时为弧矢彗差，S_{III}时为最小混淆的圆半径（位于弧矢和正切线图像中间），$S_{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{IV}}$时为光斑半径，$S_{\mathrm{V}}$时为图像位移。

各种像差系数之间的关系如下

$$A_s\equiv a_{40}=a_s a^4=\frac{1}{8}S_{\mathrm{I}}, A_c\equiv a_{31}=a_c h' a^3=\frac{1}{2}\frac{h'}{h'_{max}}S_{\mathrm{II}}$$

$$A_a\equiv a_{22}\equiv a_a h' a^2=\frac{1}{2}\left(\frac{h'}{h'_{max}}\right)^2 S_{\mathrm{III}}$$

$$A_d\equiv a_{20}=a_d h'^2 a^2=\frac{1}{4}\left(\frac{h'}{h'_{max}}\right)^2(S_{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{IV}}), A_t\equiv a_{11}=a_t h'^3 a=\frac{1}{2}\left(\frac{h'}{h'_{max}}\right)^3 S_{\mathrm{V}} \quad (13.15)$$

当一个旋转对称系统的各元件相互间未对准时就会产生新的像差。一个元件未对准可能是由于它的顶点发生偏心和/或它的光轴发生偏离（Mahajan，2001）。未对准引入轴向彗差，就像初级彗差一样取决于光瞳坐标。然而与初级彗差不同的是，它不取决于成像高度h'，也就是说，在扩展目标的整个图像平面上它是一个常数。未对准也引入像散和场曲，它们与h'成线性关系，也引入随h'^2变化的畸变。因此，随h'变化的未对准所引入的每个像差项的等级或幂级数都比一个准直系统中相应项少1。因此，在图像（或目标）和光瞳坐标系内每个新引入的等级为3，比初级像差的级数4少1。当一个系统中一个或多个表面变形而导致其在平面中比在正交平面中弧度更大时，就像散光人眼中的复曲面一样，导致与h'无关的（轴向）像散，甚至对于一个轴向点目标也是如此。

13.2.3　二级像差函数或者施瓦兹希尔像差函数

当$i=6$时，二级或施瓦兹希尔像差函数包含9项，如式（13.16）所示

$$W_S(h';r,\theta)={}_0a_{60}r^6+{}_1a_{51}h'r^5\cos\theta+{}_2a_{42}h'^2r^4\cos^2\theta+{}_2a_{40}h'^2r^4+{}_3a_{33}h'^3r^3\cos^3\theta$$
$$+{}_3a_{31}h'^3r^3\cos\theta+{}_4a_{22}h'^4r^2\cos^2\theta+{}_4a_{20}h'^4r^2+{}_5a_{11}h'^5r\cos\theta \quad (13.16)$$

其中，前四个$l=0$的项称为二级像差（球差、彗差、像散箭状误差），后五项称为横向像差（球差、彗差、像散、场曲、畸变）。除了与图像高度h'的相关之外，横向像差与二级像差类似。横向球差${}_2a_{40}h'^2r^4$也叫做轴外球差。依据式（13.4），六级（$n+m\leqslant 6$）展开的像差函数由如式（13.17）中的九个项组成

$$W(\rho,\theta)=a_{11}\rho\cos\theta+a_{20}\rho^2+a_{22}\rho^2\cos^2\theta+a_{31}\rho^3\cos\theta+a_{33}\rho^3\cos^3\theta$$
$$+a_{40}\rho^4+a_{42}\rho^4\cos^2\theta+a_{51}\rho^5\cos\theta \quad (13.17)$$

由于与图像高度h'相关的项包含于系数a_{nm}，式（13.7）和式（13.17）中看起来一样的系数其实根本不同。比如，在式（13.7）中a_{11}等于${}_3a_{11}h'^3$，但在式（13.17）中等于${}_3a_{11}h'^3+{}_5a_{11}h'^5$。类似的，系数$a_{40}$包含赛德尔球差和横球差。

13.2.4　泽尼克圆多项式展开

具有圆形光瞳系统的像差函数可以展开为一个泽尼克圆多项式$R_n^m(\rho)\cos m\theta$的完整集，这些项在单位圆内是正交的，具有如下形式（Born and Wolf，1999；Mahajan，2004）

$$W(\rho,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} c_{nm} Z_n^m(\rho,\theta) \tag{13.18}$$

其中，c_{nm}为取决于点目标位置的展开项系数，n 和 m 为正整数（包括零），$n-m \geqslant 0$ 且为偶数，并且

$$Z_n^m(\rho,\theta) = [2(n+1)/(1+\delta_{m0})]^{1/2} R_n^m(\rho)\cos m\theta \tag{13.19a}$$

为正交泽尼克多项式，这里 δ_{ij}为克罗内克（Kronecker）δ，并且

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s!\left(\frac{n+m}{2}-s\right)!\left(\frac{n-m}{2}-s\right)!}\rho^{n-2s} \tag{13.19b}$$

为包含 ρ^n，ρ^{n-2}，…，和 ρ^m 的 ρ 的 n 次多项式。径向圆多项式 $R_n^m(\rho)$ 为 ρ 的奇数或偶数次多项式，取决于 n 或 m 是奇数或偶数。同样，$R_n^m(1)=1$，$R_n^m(\rho)=\rho^n$，$n/2$ 为偶数时 $R_n^m(0)=\delta_{m0}$，$n/2$ 为奇数时 $R_n^m(0)=-\delta_{m0}$。泽尼克多项式是正交的，如下所示

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} Z_n^m(\rho,\theta) Z_{n'}^{m'}(\rho,\theta)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = \delta_{mm'}\delta_{nn'} \tag{13.20a}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos m'\theta \mathrm{d}\theta = \pi(1+\delta_{m0})\delta_{mm'} \tag{13.20b}$$

$$\int_0^1 R_n^m(\rho) R_{n'}^m \rho \mathrm{d}\rho = \frac{1}{2(n+1)}\delta_{nn'} \tag{13.20c}$$

泽尼克展开系数由如式（13.21）给出

$$c_{nm} = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} W(\rho,\theta) Z_n^m(\rho,\theta)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \tag{13.21}$$

式（13.21）可以利用正交关系由式（13.18）代替。

泽尼克圆多项式是唯一的，因为只有它是含有 ρ 和 θ 两个变量的多项式，其特点包括：①在单位圆上正交；②当坐标轴绕圆心旋转时，其数学形式是不变的；③对于每对允许的 n 和 m 值均存在泽尼克多项式（Bhatia and Wolf，1954；Born and Wolf，1999）。

表 13.2 列出了 $n \leqslant 8$ 时的正交泽尼克多项式以及与之相关的被确认为是像差的相关名称。像差函数 n 级展开式中的泽尼克（或正交）像差项的数量如下

$$N_n = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 \qquad n\text{ 为偶数} \tag{13.22a}$$

$$N_n = (n+1)(n+3)/4 \qquad n\text{ 为奇数} \tag{13.22b}$$

由此得出式（13.18）中的经典泽尼克像差项为

$$W_n^m(\rho,\theta) = c_{nm} Z_n^m(\rho,\theta) \tag{13.23}$$

除非 $n=m=0$ 时，其值总为 0，

$$\langle W_n^m(\rho,\theta)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} W_n^m(\rho,\theta)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = 0 \, (n \neq 0, m \neq 0) \tag{13.24}$$

当 $m=0$ 的时候，式（13.24）看起来是得助于式（13.20b），事实上 $R_0^0(\rho)=1$ 是多项式集的一项。正交式（13.20c）产生一个结果是 $R_n^0(\rho)$ 的均值为零。$R_n^0(\rho)$ 中常数项的存在得到零均值。当 $m \neq 0$，$\cos m\theta$ 的均值为 0。类似的，像差的均方根值由以下公式得出

$$\langle [W_n^m(\rho,\theta)]^2\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} [W_n^m(\rho,\theta)]^2 \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = c_{nm}^2 \tag{13.25}$$

所以，其方差由以下得出

$$\sigma_{nm}^2 = \langle (W_n^m)^2 \rangle - \langle W_n^m \rangle^2 = c_{nm}^2, n \neq 0, m \neq 0 \quad (13.26)$$

所以，除c_{00}外的每个展开系数，都表示相应像差项的标准差。相应的，像差函数的方差由以下公式给出

$$\sigma_W^2 = \langle W^2(\rho,\theta) \rangle - \langle W(\rho,\theta) \rangle^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} c_{nm}^2 \quad (13.27)$$

除非像差的均值$\langle W \rangle = c_{00} = 0$，$\sigma_W \neq W_{RMS}$，则$W_{RMS} = \langle W^2 \rangle^{1/2}$为像差的均方根值（RMS）。

表 13.2 $n \leq 8$ 时的正交泽尼克多项式及其平衡像差

n	m	正交 Zernike① 多项式	
		$Z_n^m(\rho,\theta) = \left[\frac{2(n+1)}{1+\delta_{m0}}\right]^{1/2} R_n^m(\rho)\cos m\theta$	像差名称
0	0	1	平移
1	1	$2\rho\cos\theta$	畸变（倾斜）
2	0	$\sqrt{3}(2\rho^2-1)$	场曲
2	2	$\sqrt{6}\rho^2\cos 2\theta$	初级像散
3	1	$\sqrt{8}(3\rho^3-2\rho)\cos\theta$	初级彗差
3	3	$\sqrt{8}\rho^3\cos 3\theta$	
4	0	$\sqrt{5}(6\rho^4-6\rho^2+1)$	初级球差
4	2	$\sqrt{10}(4\rho^4-3\rho^2)\cos 2\theta$	二级像散
4	4	$\sqrt{10}\rho^4\cos 4\theta$	
5	1	$\sqrt{12}(10\rho^5-12\rho^3+3\rho)\cos\theta$	二级彗差
5	3	$\sqrt{12}(5\rho^5-4\rho^3)\cos 3\theta$	
5	5	$\sqrt{12}\rho^5\cos 5\theta$	
6	0	$\sqrt{7}(20\rho^6-30\rho^4+12\rho^2-1)$	二级球差
6	2	$\sqrt{14}(15\rho^6-20\rho^4+6\rho^2)\cos 2\theta$	三级像散
6	4	$\sqrt{14}(6\rho^6-5\rho^4)\cos 4\theta$	
6	6	$\sqrt{14}\rho^6\cos 6\theta$	
7	1	$4(35\rho^7-60\rho^5+30\rho^3-4\rho)\cos\theta$	三级彗差
7	3	$4(21\rho^7-30\rho^5+10\rho^3)\cos 3\theta$	
7	5	$4(7\rho^7-6\rho^5)\cos 5\theta$	
7	7	$4\rho^7\cos 7\theta$	
8	0	$3(70\rho^8-140\rho^6+90\rho^4-20\rho^2+1)$	三级球差

①“正交 Zernike” 与这样的名称相关，例如，正交 Zernike 初级像散。

泽尼克多项式的价值来自于它们是在圆形光瞳上正交并且体现出平衡像差从而得到最小的方差（Born and Wolf，1999；Mahajan，2004）。使用正交多项式的好处在于，一个像差项$c_{nm}Z_n^m(\rho,\theta)$的标准差简单地等于泽尼克系数c_{nm}。由于正交，由式（13.21）得出的系数c_{nm}的值与用于展开像差函数的项的数量无关。所以，无论像差函数中增加或减少一个或者多个正交项，该系数都不受影响。因此，就像经常在光学测试中发生的一样，在一个系统的像差函数中增加倾斜像差或离焦像差不会影响到其他的像差系数。

图 13.3 所示为径向圆多项式$R_n^m(\rho)$随ρ变化的曲线图。如前所述，在光瞳边缘$\rho = 1$

时其值等于1，即$R_n^m(1)=1$。对于离焦像差和球差，即$m=0$时，它在原点$\rho=0$时的值为1或-1，取决于$n/2$是奇数还是偶数。当存在倾斜像差、彗差、像散像差时，它在原点的值都为零。

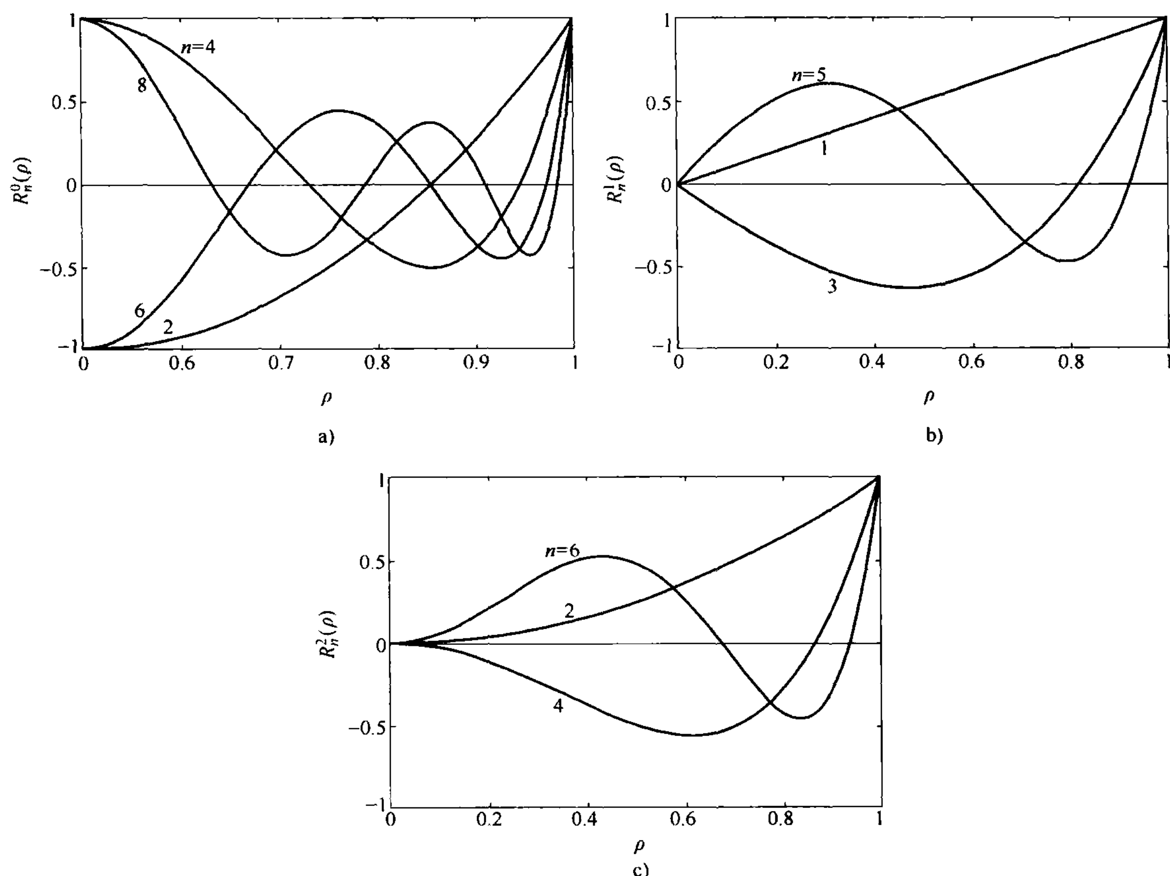


图 13.3 径向圆多项式$R_n^m(\rho)$随ρ变化的曲线图

a）离焦像差与球差 b）倾斜像差和彗差 c）像散

13.2.5 最小波像差方差时用泽尼克圆多项式表示平衡像差

用泽尼克多项式表示平衡像差，这样在光瞳坐标系中幂级数展开式中某级像差可以用低于或等于其级数的像差进行平衡以使其方差最小（Born and Wolf，1999；Mahajan，2001；Mahajan，2004）。例如，考虑球差$A_s\rho^4$与离焦像差$B_d\rho^2$相组合的情况

$$W(\rho)=A_s\rho^4+B_d\rho^2 \tag{13.28}$$

通过观察离焦像面中的图像来得到离焦像差。如果R是相对于确定像差的高斯参考球面的曲率半径，则在一个离焦像面上距离z处观察得到的一个离焦像差必然包含一个离焦波像差$B_d\rho^2$，其中离焦系数为$B_d=(z^{-1}-R^{-1})a^2/2$。组合像差的方差由式（13.29）得出

$$\sigma_W^2=\frac{4A_s^2}{45}+\frac{B_d^2}{12}+\frac{A_sB_d}{6} \tag{13.29}$$

令$\partial\sigma_W^2/\partial B_d=0$，可以发现$B_d=A_s$时像差方差最小，即等于离焦量或与之相反。标准偏差$\sigma_W$

减少了四倍，从 $2A_s/3\sqrt{5}$减少到 $A_s/6\sqrt{5}$。平衡像差 $A_s(\rho^4-\rho^2)$ 类似于泽尼克多项式 $Z_4^0(\rho)$。在 $Z_4^0(\rho)$ 表达式中用1（和乘以$\sqrt{5}$）表示的常数（与 ρ 和 θ 无关）或者平移项不会改变平衡像差的标准差。然而，它使得像差的均值为零。类似的，彗差与倾斜像差组合

$$W(\rho,\theta)=A_c\rho^3\cos\theta+B_t\rho\cos\theta \tag{13.30}$$

B_t 为斜波像差的系数。当 $B_t=-2A_c/3$ 时，方差最小，标准差由 $A_c/2\sqrt{2}$变为了 $A_c/6\sqrt{2}$，减小了三倍。这意味着测量相对于点（$4FA_c/3$，0）的像差时像差方差最小。平衡像差 $A_c[\rho^3-(2/3)\rho]\cos\theta$ 类似于泽尼克多项式 $Z_3^1(\rho,\theta)$。当通过离焦去平衡像散 $A_a\rho^2\cos^2\theta$ 时，发现当结合值为 $B_d=-A_a/2$ 的离焦像差其标准差由 $A_a/4$ 变为 $A_a/2\sqrt{6}$，减小了1.225倍。平衡像差 $(1/2)A_a/\rho^2\cos^2 2\theta$ 类似于泽尼克多项式 $Z_2^2(\rho,\theta)$。还有，场曲（或者离焦）像差和畸变（或者波前倾斜）像差可以认为分别等于 $Z_2^0(\rho)$ 和 $Z_1^1(\rho,\theta)$。同样，在 $Z_2^0(\rho)$ 中有平移项，它不影响方差。平移多项式 $Z_0^0(\rho,\theta)$ 简单地等于1。

高阶像差也可以通过类似方式平衡。比如，当随 ρ^6 变化的二阶球差与初阶球差和离焦组合使其方差最小时，得到的平衡像差与泽尼克多项式 $Z_6^0(\rho)$ 有同样的形式（除了常量项）。类似的，当随 ρ^5 变化的二阶彗差与初阶彗差和倾斜组合而使其方差最小时，得到的平衡像差与泽尼克多项式 $Z_5^1(\rho,\theta)$ 有同样的形式。对于二阶像散 $\rho^4\cos^2\theta$，平衡像差为初阶球差、初阶像散、离焦，这可以从下面的恒等式看出

$$\rho^4\cos^2\theta-\frac{1}{2}\rho^4-\frac{3}{4}\rho^2\cos^2\theta+\frac{3}{8}\rho^2=\frac{1}{2}\left(\rho^4-\frac{3}{4}\rho^2\right)\cos 2\theta \tag{13.31}$$

平衡像差具有泽尼克多项式 $Z_4^2(\rho,\theta)$ 的形式。所以，泽尼克多项式可以等同于平衡像差；事实上，它们优于其他完整集的地方就是在整个圆形光瞳上正交。还有，波前倾斜和离焦的基本像差是多项式组的成员；没有它们，展开项就不完整。

13.2.6 幂级数系数和泽尼克多项式展开项系数的关系

式（13.5a）的典型像差项具有 $\rho^n\cos^m\theta$ 的形式，式（13.18）的正交像差具有 $R_n^m(\rho)\cos m\theta$ 的形式，所以，径向变量 ρ^n 由 $R_n^m(\rho)$ 替代，角变量 $\cos^m\theta$ 由 $\cos m\theta$ 替代。为了公式（13.5a）的级数系数 a_{nm}与式（13.28）中的泽尼克系数 c_{nm}联系起来，首先将系数 a_{nm}中的指数 n 和 m 分别替换为 k 和 l（注意不要和前面的式（13.2）中的 l 混淆），并且将像差函数的幂级数展开项写成

$$W(\rho,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}a_{kl}\rho^k\cos^l\theta \tag{13.32}$$

其中，k，l 为含零正整数，$k-l\geq 0$，为偶数。比较式（13.18）和式（13.32）并利用下面的恒等式可得出系数 a_{kl}和 c_{nm}的关系

$$\cos m\theta=(1+d_{m0})2^{m-1}\cos^m\theta+m\sum_{q=1}^{m-1}\frac{(-1)^q(m-q-1)!2^{m-2q-1}}{q(q-1)!(m-2q)!}(\cos\theta)^{m-2q} \tag{13.33}$$

和

$$\cos^l\theta=\frac{1}{2l}\sum_{q=0}^{l}\frac{l!}{q!(l-q)!}\cos(l-2q)\theta \tag{13.34}$$

如果已知泽尼克系数 c_{nm}，则可通过下面的推导得到幂级数系数 a_{kl}（Tyson，1982；Mahajan，2001）。将式（13.19b）和式（13.33）代入式（13.18）并平衡方程中包含因子

$\rho^k\cos^l\theta$ 项的系数，这样就得到式（13，32）中的相应系数，可以发现

$$a_{00}=c_{00} \tag{13.35}$$

及

$$a_{kl} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} b_{klnm}c_{nm} \tag{13.36}$$

式中，

$$b_{klnm}=\begin{cases}[2(n+1)(1+\delta_{m0})]^{1/2}\dfrac{(-1)^{\frac{n-k}{2}}\left(\frac{n+k}{2}\right)!\ 2^{m-1}}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\ \left(\frac{k+m}{2}\right)!\ \left(\frac{k-m}{2}\right)!},m=l & (13.37a)\\ \left[\dfrac{2(n+1)}{1+\delta_{m0}}\right]^{1/2}\dfrac{(-1)^{\frac{n-k}{2}}\left(\frac{n+k}{2}\right)!\ m}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\ \left(\frac{k+m}{2}\right)!\ \left(\frac{k-m}{2}\right)!}\ \dfrac{2^l(-1)^{\frac{m-l}{2}}\left(\frac{m+l}{2}-1\right)!}{l!(m-l)\left(\frac{m-l}{2}-1\right)!},m\neq l & (13.37b)\end{cases}$$

表 13.3 所示为 $k\leqslant 8$、$n\leqslant 8$ 时 b_{klnm}的值。注意只有当 $k-l$、$n-m$、$n-k$、$k-m$ 和 $m-l$ 的值为含零正偶数的时候，这些系数才存在。

如果已知幂级数系数 a_{kl}，则泽尼克系数 c_{nm} 可通过式（13.38）得到（Conforti，1983；Mahajan，2001）。将式（13.34）代入式（13.32），然后将得到的公式和式（13.19b）代入式（13.21），得到

$$c_{nm} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} d_{nmkl}a_{kl} \tag{13.38}$$

式中，

$$d_{nmkl} = \left[\frac{2(n+1)}{1+\delta_{m0}}\right]^{1/2}\frac{l\,!}{2_l\left(\frac{l-m}{2}\right)!\left(\frac{l+m}{2}\right)!}\sum_{s=0}^{(n-m)/2}\frac{(-1)^s(n-s)\,!}{s\,!\left(\frac{n+m}{2}-s\right)!\left(\frac{n-m}{2}-s\right)!(n-2s+k+2)} \tag{13.39}$$

表 13.4 所示为 $n\leqslant 8$、$k\leqslant 8$ 时的 d_{nmkl}的值。注意，只有当 $n-m$、$k-l$ 和 $l-m$ 的值为含零正偶数的时候，这些系数才存在。

13.2.7 赛德尔像差到泽尼克像差的转换

观察表 13.4 可得，式（13.7）中的每个赛德尔像差项可以写成用正交泽尼克多项式 $Z_n^m(\rho,\theta)$ 表示的形式，如下所示

$$a_{11}\rho\cos\theta=\frac{a_{11}}{2}Z_1^1(\rho,\theta) \tag{13.40a}$$

$$a_{20}\rho^2=a_{20}\left(\frac{Z_2^0}{2\sqrt{3}}+\frac{Z_0^0}{2}\right) \tag{13.40b}$$

$$a_{22}\rho^2\cos^2\theta=a_{22}\left(\frac{Z_2^2}{2\sqrt{6}}+\frac{Z_2^0}{4\sqrt{3}}+\frac{Z_0^0}{4}\right) \tag{13.40c}$$

$$a_{31}\rho^3\cos\theta=a_{31}\left(\frac{Z_3^1}{6\sqrt{2}}+\frac{Z_1^1}{3}\right) \tag{13.40d}$$

表 13.3 $k \leqslant 8$、$n \leqslant 8$ 时 b_{klnm} 的值

n \ k	m \ l	0 0	1 1	2 0	2 2	3 1	3 3	4 0	4 2	4 4	5 1	5 3	5 5	6 0	6 2	6 4	6 6	7 1	7 3	7 5	7 7	8 0
0	0	1																				
1	1		2																			
2	0	$-\sqrt{3}$		$2\sqrt{3}$																		
2	2			$-\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$																	
3	1		$-4\sqrt{2}$				$6\sqrt{2}$															
3	3					$-6\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$															
4	0	$\sqrt{5}$		$-6\sqrt{5}$				$6\sqrt{5}$														
4	2			$3\sqrt{10}$	$-6\sqrt{10}$		$-4\sqrt{10}$	$8\sqrt{10}$														
4	4							$\sqrt{10}$	$-8\sqrt{10}$	$8\sqrt{10}$												
5	1		$6\sqrt{3}$			$-24\sqrt{3}$					$20\sqrt{3}$											
5	3					$24\sqrt{3}$	$-32\sqrt{3}$				$-30\sqrt{3}$	$40\sqrt{3}$										
5	5										$10\sqrt{3}$	$-40\sqrt{3}$	$32\sqrt{3}$									
6	0	$\sqrt{7}$		$6\sqrt{7}$				$-30\sqrt{7}$						$20\sqrt{7}$								
6	2			$6\sqrt{14}$	$12\sqrt{14}$			$20\sqrt{14}$	$-40\sqrt{14}$					$-15\sqrt{14}$	$30\sqrt{14}$							
6	4							$-5\sqrt{14}$	$40\sqrt{14}$	$-40\sqrt{14}$				$6\sqrt{14}$	$-48\sqrt{14}$	$48\sqrt{14}$						
6	6													$-\sqrt{14}$	$18\sqrt{14}$	$-48\sqrt{14}$	$32\sqrt{14}$					
7	1		16			120					−240							140				
7	3					−120	160				360	−480						−252	336			
7	5										−120	480	−384					140	−560	448		
7	7																	−28	224	−448	256	
8	0	3		−60				270						−420								210

表 13.4　$n\leqslant 8$、$k\leqslant 8$ 时的 d_{nmkl} 的值

k		0	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8
l		0	1	0	2	1	3	0	2	4	1	3	5	0	2	4	6	1	3	5	7	0
n	m																					
0	0	1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$				$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{64}$					$\frac{1}{5}$
1	1		$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$				$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{32}$					$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{64}$	
2	0			$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}$			$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$				$\frac{3\sqrt{3}}{20}$	$\frac{3\sqrt{3}}{40}$	$\frac{9\sqrt{3}}{160}$	$\frac{3\sqrt{3}}{64}$					$\frac{2}{5\sqrt{3}}$
2	2				$\frac{1}{2\sqrt{6}}$				$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$					$\frac{1}{10}\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{10}\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\frac{3}{32}\sqrt{\frac{3}{2}}$					
3	1					$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{8\sqrt{2}}$				$\frac{1}{5\sqrt{2}}$	$\frac{3}{20\sqrt{2}}$	$\frac{1}{8\sqrt{2}}$					$\frac{1}{5\sqrt{2}}$	$\frac{3}{20\sqrt{2}}$	$\frac{1}{8\sqrt{2}}$	$\frac{7}{64\sqrt{2}}$	
3	3						$\frac{1}{8\sqrt{2}}$					$\frac{1}{10\sqrt{2}}$	$\frac{1}{8\sqrt{2}}$						$\frac{1}{12\sqrt{2}}$	$\frac{5}{48\sqrt{2}}$	$\frac{7}{64\sqrt{2}}$	
4	0							$\frac{1}{6\sqrt{5}}$	$\frac{1}{12\sqrt{5}}$	$\frac{1}{16\sqrt{5}}$				$\frac{1}{4\sqrt{5}}$	$\frac{1}{8\sqrt{5}}$	$\frac{3}{32\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}}{64}$					$\frac{2}{7\sqrt{5}}$
4	2								$\frac{1}{8\sqrt{10}}$	$\frac{1}{8\sqrt{10}}$					$\frac{1}{6\sqrt{10}}$	$\frac{1}{6\sqrt{10}}$	$\frac{1}{32}\sqrt{\frac{5}{2}}$					
4	4									$\frac{1}{8\sqrt{5}}$					$\frac{\sqrt{5}}{48}$	$\frac{\sqrt{5}}{32}$						
5	1										$\frac{1}{20\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{80}$	$\frac{1}{32\sqrt{3}}$					$\frac{\sqrt{5}}{35}$	$\frac{3\sqrt{3}}{140}$	$\frac{\sqrt{3}}{56}$	$\frac{\sqrt{3}}{64}$	

（续）

n	m \ k	0	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8
	l	0	1	0	2	1	3	0	2	4	1	3	5	0	2	4	6	1	3	5	7	0
5	3											$\frac{1}{40\sqrt{3}}$	$\frac{1}{32\sqrt{3}}$						$\frac{5}{140\sqrt{3}}$	$\frac{5}{112\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{64}$	
5	5												$\frac{1}{32\sqrt{3}}$							$\frac{\sqrt{3}}{112}$	$\frac{\sqrt{3}}{64}$	
6	0													$\frac{1}{20\sqrt{7}}$	$\frac{1}{40\sqrt{7}}$	$\frac{1}{160\sqrt{7}}$	$\frac{1}{64\sqrt{7}}$					$\frac{1}{10\sqrt{7}}$
6	2														$\frac{1}{30\sqrt{14}}$	$\frac{1}{30\sqrt{14}}$	$\frac{1}{32\sqrt{14}}$					
6	4															$\frac{1}{40\sqrt{14}}$	$\frac{1}{32\sqrt{14}}$					
6	6																$\frac{1}{32\sqrt{14}}$					
7	1																	$\frac{1}{140}$	$\frac{3}{560}$	$\frac{1}{224}$	$\frac{1}{256}$	
7	3																		$\frac{1}{336}$	$\frac{5}{1344}$	$\frac{1}{256}$	
7	5																			$\frac{1}{448}$	$\frac{1}{256}$	
7	7																				$\frac{1}{256}$	
8	0																					$\frac{1}{210}$

$$a_{40}\rho^4 = a_{40}\left(\frac{Z_4^0}{6\sqrt{5}} + \frac{Z_2^0}{2\sqrt{3}} + \frac{Z_0^0}{3}\right) \tag{13.40e}$$

相应的，式（13.7）中的赛德尔像差函数可以写成如下用泽尼克多项式表示的形式

$$W_p(\rho,\theta) = c_{00}Z_0^0 + c_{11}Z_2^0 + c_{20}Z_2^2 + c_{31}Z_3^1 + c_{40}Z_4^0 \tag{13.41}$$

其中，

$$c_{00} = \frac{a_{20}}{2} + \frac{a_{22}}{4} + \frac{a_{40}}{3}, c_{11} = \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{31}}{3}, c_{20} = \frac{a_{20}}{2\sqrt{3}} + \frac{a_{22}}{4\sqrt{3}} + \frac{a_{40}}{2\sqrt{3}} \tag{13.42a}$$

$$c_{22} = \frac{a_{22}}{2\sqrt{6}}, c_{31} = \frac{a_{31}}{6\sqrt{2}}, c_{40} = 6\,\frac{a_{40}}{6\sqrt{5}} \tag{13.42b}$$

其均值和均方根值表示如下

$$\langle W_p \rangle = c_{00} = \frac{a_{20}}{2} + \frac{a_{22}}{4} + \frac{a_{40}}{3} \tag{13.43a}$$

和

$$\langle W_p^2 \rangle = \sum_{n=0}^{4}\sum_{m=0}^{2} c_{nm}^2 \tag{13.43b}$$

$$= \langle W_p \rangle^2 + \left(\frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{31}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a_{20}}{2\sqrt{3}} + \frac{a_{22}}{4\sqrt{3}} + \frac{a_{40}}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{a_{22}^2}{24} + \frac{a_{31}^2}{72} + \frac{a_{40}^2}{180} \tag{13.43c}$$

其方差为

$$\begin{aligned}\sigma_W^2 &= \langle W_p^2 \rangle - \langle W_p^2 \rangle = \sum_{n=1}^{4}\sum_{m=0}^{2} c_{nm}^2 \\ &= \frac{a_{11}^2}{4} + \frac{a_{20}^2}{12} + \frac{a_{22}^2}{16} + \frac{a_{31}^2}{8} + \frac{4a_{40}^2}{45} + \frac{a_{11}a_{31}}{3} + \frac{a_{20}a_{40}}{6} + \frac{a_{22}a_{40}}{12}\end{aligned} \tag{13.44}$$

13.2.8 泽尼克像差到赛德尔像差的转换

由式（13.40）可知，一个赛德尔像差由多个泽尼克像差构成，类似的，一个已知的泽尼克像差由多个赛德尔像差构成。例如，泽尼克像散 $c_{22}Z_2^2(\rho,\ \theta)$ 由赛德尔像散 $\rho^2\cos^2\theta$ 和离焦 ρ^2 构成。类似的，泽尼克彗差 $c_{31}Z_3^1(\rho,\ \theta)$ 由赛德尔彗差 $\rho^3\cos\theta$ 和斜差 $\rho\cos\theta$ 构成。泽尼克球差 $c_{40}Z_4^0(\rho,\ \theta)$ 由赛德尔像差 ρ^4、离焦和平移构成。当然，高阶泽尼克像差同样由赛德尔像差构成。例如，二阶泽尼克球差 $Z_6^0(\rho)$ 由二阶球差 ρ^6、赛德尔球差 ρ^4、离焦和平移构成。由于一个赛德尔项包含在若干个泽尼克项中，利用泽尼克系数计算赛德尔系数取决于表示像差函数的泽尼克项的数量。例如，随 ρ^4 变化的赛德尔球差，包含于 $Z_4^0(\rho,\ \theta)$、$Z_4^2(\rho,\ \theta)$、$Z_4^4(\rho,\ \theta)$、$Z_6^0(\rho)$ 等泽尼克多项式中。给定像差函数的一组泽尼克系数 c_{nm}，利用表 13.2 可以轻松将相应的赛德尔系数表示成

$$a_{00} = c_{00} - \sqrt{3}c_{20} + \sqrt{5}c_{40} - \sqrt{7}c_{60} + 3c_{80} + \cdots \tag{13.45a}$$

$$a_{11} = 2c_{11} - 4\sqrt{2}c_{31} + 6\sqrt{3}c_{51} - 16c_{71} + \cdots \tag{13.45b}$$

$$a_{20} = 2\sqrt{3}c_{20} - \sqrt{6}c_{22} - 6\sqrt{5}c_{40} + 3\sqrt{10}c_{42} + 6\sqrt{7}c_{60} - 6\sqrt{14}c_{62} - 60c_{80} + \cdots \tag{13.45c}$$

$$a_{22} = 2\sqrt{6}c_{22} - 6\sqrt{10}c_{42} + 12\sqrt{14}c_{62} + \cdots \tag{13.45d}$$

$$a_{31} = 6\sqrt{2}c_{31} - 6\sqrt{2}c_{33} - 24\sqrt{3}c_{51} + 24\sqrt{3}c_{53} + 120c_{71} - 120c_{73} + \cdots \tag{13.45e}$$

$$a_{40} = 6\sqrt{5}c_{40} - 4\sqrt{10}c_{42} + \sqrt{10}c_{44} - 30\sqrt{7}c_{60} + \cdots \tag{13.45f}$$

同样，不能区分系数 a_{11} 中的倾斜分量和畸变、系数 a_{20} 中的离焦分量和场曲及系数 a_{40} 中的球差分量和横向球差。

13.3 含圆形光瞳而不含旋转对称轴的像差函数

13.3.1 泽尼克圆多项式展开

一个没有旋转轴对称的系统的像差函数不仅含有 $\cos m\theta$ 项，同时也含有 $\sin m\theta$ 项。事实上，这些误差不仅来自于加工误差同时也包括大气扰动造成的误差（Noll，1976）。此时像差函数可以展开为正交泽尼克圆多项式 $Z_j(\rho,\ \theta)$ 的形式

$$W(\rho,\theta) = \sum_j a_j Z_j(\rho,\theta) \tag{13.46}$$

a_j 为展开系数，该多项式可以写成

$$Z_{\text{奇数}j}(\rho,\theta) = \sqrt{2(n+1)}R_n^m(\rho)\cos m\theta \quad m\neq 0 \tag{13.47a}$$

$$Z_{\text{偶数}j}(\rho,\theta) = \sqrt{2(n+1)}R_n^m(\rho)\sin m\theta \quad m\neq 0 \tag{13.47b}$$

$$Z_j(\rho,\theta) = \sqrt{n+1}R_n^0(\rho) \quad m=0 \tag{13.47c}$$

$R_n^m(\rho)$ 为式（13.19b）中给出的径向多项式。如前所述，n 和 m 是含零正整数，并且 $n-m\geqslant 0$ 且为偶数。由于参数 n 表示多项式的最高阶 ρ，它表示多项式的径向度数或者阶数，m 可以称作方位角频率。

参数 j 是多项式阶数并且是 n 和 m 的函数。正交多项式以及 j、n 和 m 的关系如表 13.5 所示。多项式经过排序处理，这样偶数 j 对应于随 $\cos m\theta$ 变化的对称多项式，而奇数 j 对应于随 $\sin m\theta$ 变化的非对称多项式。n 值小的多项式排在前面，在 n 值一定的情况下，m 值小的多项式排在前面。对于给定 n 值的项的数量为 $n+1$。n 阶及以下项的数目为

$$N_n = (n+1)(n+2)/2 \tag{13.48}$$

正交泽尼克多项式为

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} Z_j(\rho,\theta)Z_{j'}(\rho,\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \Big/ \int_0^1\int_0^{2\pi}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \delta_{jj'} \tag{13.49}$$

表 13.5 所示为正交泽尼克圆多项式 $Z_j(\rho,\ \theta)$。j、n 和 m 分别表示多项式的项数、径向多项式级数和方位角频率。多项式 $Z_j(\rho,\ \theta)$ 经过排序处理，这样偶数 j 对应于随 $\cos m\theta$ 变化的对称多项式，而奇数 j 对应于随 $\sin m\theta$ 变化的非对称多项式。n 值小的多项式排在前面，在 n 值一定的情况下，m 值小的多项式排在前面。

表 13.5 正交泽尼克圆多项式 $Z_j(\rho,\ \theta)$

j	n	m	$Z_j(\rho,\ \theta)$	像差名称
1	0	0	1	平移
2	1	1	$2\rho\cos\theta$	x 轴倾斜
3	1	1	$2\rho\sin\theta$	y 轴倾斜
4	2	0	$\sqrt{3}(2\rho^2-1)$	离焦
5	2	2	$\sqrt{6}\rho^2\sin2\theta$	45°初级像散
6	2	2	$\sqrt{6}\rho^2\cos2\theta$	0°初级像散
7	3	1	$\sqrt{8}(3\rho^3-2\rho)\sin\theta$	y 轴初级彗差

（续）

j	n	m	$Z_j(\rho,\ \theta)$	像差名称
8	3	1	$\sqrt{8}(3\rho^3-2\rho)\cos\theta$	x 轴初级彗差
9	3	3	$\sqrt{8}\rho^3\sin3\theta$	
10	3	3	$\sqrt{8}\rho^3\cos3\theta$	
11	4	0	$\sqrt{5}(6\rho^4-6\rho^2+1)$	初级球差
12	4	2	$\sqrt{10}(4\rho^4-3\rho^2)\cos2\theta$	0°二级像散
13	4	2	$\sqrt{10}(4\rho^4-3\rho^2)\sin2\theta$	45°二级像散
14	4	4	$\sqrt{10}\rho^4\cos4\theta$	
15	4	4	$\sqrt{10}\rho^4\sin4\theta$	
16	5	1	$\sqrt{12}(10\rho^5-12\rho^3+3\rho)\cos\theta$	x 轴二级彗差
17	5	1	$\sqrt{12}(10\rho^5-12\rho^3+3\rho)\sin\theta$	y 轴二级彗差
18	5	3	$\sqrt{12}(5\rho^5-4\rho^3)\cos3\theta$	
19	5	3	$\sqrt{12}(5\rho^5-4\rho^3)\sin3\theta$	
20	5	5	$\sqrt{12}\rho^5\cos5\theta$	
21	5	5	$\sqrt{12}\rho^5\sin5\theta$	
22	6	0	$\sqrt{7}(20\rho^6-30\rho^4+12\rho^2-1)$	二级球差
23	6	2	$\sqrt{14}(15\rho^6-20\rho^4+6\rho^2)\sin2\theta$	45°三级像散
24	6	2	$\sqrt{14}(15\rho^6-20\rho^4+6\rho^2)\cos2\theta$	0°三级像散
25	6	4	$\sqrt{14}(6\rho^6-5\rho^4)\sin4\theta$	
26	6	4	$\sqrt{14}(6\rho^6-5\rho^4)\cos4\theta$	
27	6	6	$\sqrt{14}\rho^6\sin6\theta$	
28	6	6	$\sqrt{14}\rho^6\cos6\theta$	
29	7	1	$4(35\rho^7-60\rho^5+30\rho^3-4\rho)\sin\theta$	y 轴三级彗差
30	7	1	$4(35\rho^7-60\rho^5+30\rho^3-4\rho)\cos\theta$	x 轴三级彗差
31	7	3	$4(21\rho^7-30\rho^5+10\rho^3)\sin3\theta$	
32	7	3	$4(21\rho^7-30\rho^5+10\rho^3)\cos3\theta$	
33	7	5	$4(7\rho^7-6\rho^5)\sin5\theta$	
34	7	5	$4(7\rho^7-6\rho^5)\cos5\theta$	
35	7	7	$4\rho^7\sin7\theta$	
36	7	7	$4\rho^7\cos7\theta$	
37	8	0	$3(70\rho^8-140\rho^6+90\rho^4-20\rho^2+1)$	三级球差

角函数的正交性描述为

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\begin{cases}\cos m\phi\cos m'\phi & j\text{ 和 }j'\text{ 均为偶数}\\ \cos m\phi\sin m'\phi & j\text{ 为偶数},j'\text{ 为奇数}\\ \sin m\phi\cos m'\phi & j\text{ 为奇数},j'\text{ 为偶数}\\ \sin m\phi\sin m'\phi & j\text{ 和 }j'\text{ 均为奇数}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\pi(1+\delta_{m0})\delta_{mm'} & j\text{ 和 }j'\text{ 均为偶数}\\ \pi\delta_{mm'} & j\text{ 和 }j'\text{ 均为奇数}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\tag{13.50}$$

展开系数为

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} W(\rho,\theta) Z_j(\rho,\theta)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \tag{13.51}$$

可以看做是代入式（13.46）并且利用正交关系式。

像差方差为

$$\sigma_W^2 = \langle W^2(\rho,\theta)\rangle - \langle W(\rho,\theta)\rangle^2 = \sum_{j=2} a_j^2 \tag{13.52}$$

由于泽尼克多项式具有正交性，像差项 $a_j Z_j(\rho,\ \theta)$ 的展开系数 a_j，a_1除外，可以表示为标准差。还有，它的值与其他系数或者表示像差函数的多项式的数量无关。由此，如果一个像差函数增加或减少一个或多个像差项，这些系数的值不变。

利用光瞳半径 a 进行归一化处理后，用笛卡儿坐标（x，y）表示的正交泽尼克圆多项式 $Z_j(x,\ y)$ 如表13.6所示。为了简化，下标 n 被省略。

表13.6　利用光瞳半径 a 进行归一化处理后，用笛卡儿坐标（x，y）表示的正交泽尼克圆多项式 $Z_j(x,y)(x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, 0\leqslant\rho=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1)$

多　项　式	$Z_j(x,\ y)$
Z_1	1
Z_2	$2x$
Z_3	$2y$
Z_4	$\sqrt{3}(2\rho^2-1)$
Z_6	$2\sqrt{6}xy$
Z_6	$\sqrt{6}(x^2-y^2)$
Z_7	$\sqrt{8}y(3\rho^2-2)$
Z_8	$\sqrt{8}x(3\rho^2-2)$
Z_9	$\sqrt{8}y(3x^2-y^2)$
Z_{10}	$\sqrt{8}x(x^2-3y^2)$
Z_{11}	$\sqrt{5}(6\rho^4-6\rho^2+1)$
Z_{12}	$\sqrt{10}(x^2-y^2)(4\rho^2-3)$
Z_{13}	$2\sqrt{10}xy(4\rho^2-3)$
Z_{14}	$\sqrt{10}(\rho^4-8x^2y^2)$
Z_{15}	$4\sqrt{10}xy(x^2-y^2)$
Z_{16}	$\sqrt{12}x(10\rho^4-12\rho^2+3)$
Z_{17}	$\sqrt{12}y(10\rho^4-12\rho^2+3)$
Z_{18}	$\sqrt{12}x(x^2-3y^2)(5\rho^2-4)$
Z_{19}	$\sqrt{12}y(3x^2-y^2)(5\rho^2-4)$
Z_{20}	$\sqrt{12}x(16x^4-20x^2\rho^2+5\rho^4)$
Z_{21}	$\sqrt{12}y(16y^4-20y^2\rho^2+5\rho^4)$
Z_{22}	$\sqrt{7}(20\rho^6-30\rho^4+12\rho^2-1)$
Z_{23}	$2\sqrt{14}xy(15\rho^4-20\rho^2+6)$
Z_{24}	$\sqrt{14}(x^2-y^2)(15\rho^4-20\rho^2+6)$

（续）

多 项 式	$Z_j(x, y)$
Z_{25}	$4\sqrt{14}xy(x^2-y^2)\ (6\rho^2-5)$
Z_{26}	$\sqrt{14}(8x^4-8x^2\rho^2+\rho^4)\ (6\rho^2-5)$
Z_{27}	$\sqrt{14}xy(32x^4-32x^2\rho^2+6\rho^4)$
Z_{28}	$\sqrt{14}(32x^6-48x^4\rho^2+18x^2\rho^4-\rho^6)$

13.3.2 指数 *n*、*m* 和 *j* 的关系

给定 n 值，多项式数量 N_n 表示 j 的最大值。有相同 n 值但 m 值不同的多项式的数量等于 $n+1$，给定 n 值的最小 j 值为 N_n-n。给定 n 和 m 值，有两个 j 值：$N_n-n+m-1$ 和 N_n-n+m。偶数 j 表示 $\cos m\theta$ 多项式，奇数 j 表示 $\sin m\theta$ 多项式。$m=0$ 时，j 值为 N_n-n。例如，$n=5$，$N_n=21$ 及 $j=21$ 表示 $\sin 5\theta$ 多项式。相应 $\cos 5\theta$ 多项式数量为 $j=20$。$m=3$ 的两个多项式，j 值为 18 和 19，分别表示 $\cos 3\theta$ 多项式和 $\sin 3\theta$ 多项式。

给定 j 值，则

$$n=[(2j-1)^{1/2}+0.5]_{\text{integer}}-1 \tag{13.53}$$

下标“integer”表示对括号里的数取整。n 的值知道后，就得出 m 的值

$$m=\begin{cases}2\{[2j+1-n(n+1)]/4\}_{\text{integer}} & n\text{ 为偶数} \quad (13.54\text{a})\\ 2\{[2j+1-n(n+1)]/4\}_{\text{integer}}-1 & n\text{ 为奇数} \quad (13.54\text{b})\end{cases}$$

例如，假设我们想知道 $j=10$ 时多项式的 n 和 m 值。由式（13.53）得 $n=3$，由式（13.54b）得 $m=3$。所以它是 $\cos 3\theta$ 多项式。类似的，$j=25$ 时，得到 $n=6$ 和 $m=3$，表示 $\sin 3\theta$ 多项式。

13.3.3 泽尼克圆多项式像差的波面高度图、干涉图和点扩展图

$n\leqslant 6$ 时的泽尼克圆多项式成金字塔状，如图 13.4 所示。如果给金字塔从顶到底的每一层编号，则层数表示在那一层的多项式的 n 值，多项式在那一层的项数等于 $n+1$，表示不同的 m 值，事实上，给定 m 值，则 j 为偶数对应于一个余弦多项式，j 为奇数对应于一个正弦多项式。每个多项式都以三种不同却等效的方式画出。对于每个多项式，位于顶部的波面高度图展现出来的形状如同由一个变形镜产生的。图 13.4 中每个多项式像差的标准差等于一个波长。干涉图就像光学检验中的一样，画在左边。当将一个波长从光瞳中心移动到光瞳边缘的时候，干涉条纹数等于像差变化的次数，不同的多项式干涉条纹数也不同。每条干涉条纹表示一个等相或像差的轮廓。当相位为 π 的奇数倍时或者像差等于 $\lambda/2$ 的奇数倍时，干涉条纹为暗色。以倾斜为例，像差变化 4 次，相当于 4 个波的峰-谷值。因此，得到四条关于中心对称的直线条纹。一个 x 轴倾斜多项式 Z_2 生成垂直条纹，y 轴倾斜多项式 Z_3 生成水平条纹。类似的，离焦像差 Z_4 生成大概 3.5 个条纹。以球差 Z_{11} 为例，像差值以$\sqrt{5}$开始，然后减少到 0，达到负值 $-\sqrt{5}/2$，然后又增加到$\sqrt{5}$。所以，归一化处理后像差变化的总次数等于 6.7，大致得到 t 条圆形干涉条纹。

每个多项式右边显示的是点扩展函数（PSF），表示存在多项式像差的点目标图像。例如，平移生成无像差点扩展函数（因为它不影响点扩展函数），而且 x 轴和 y 轴倾斜会使无

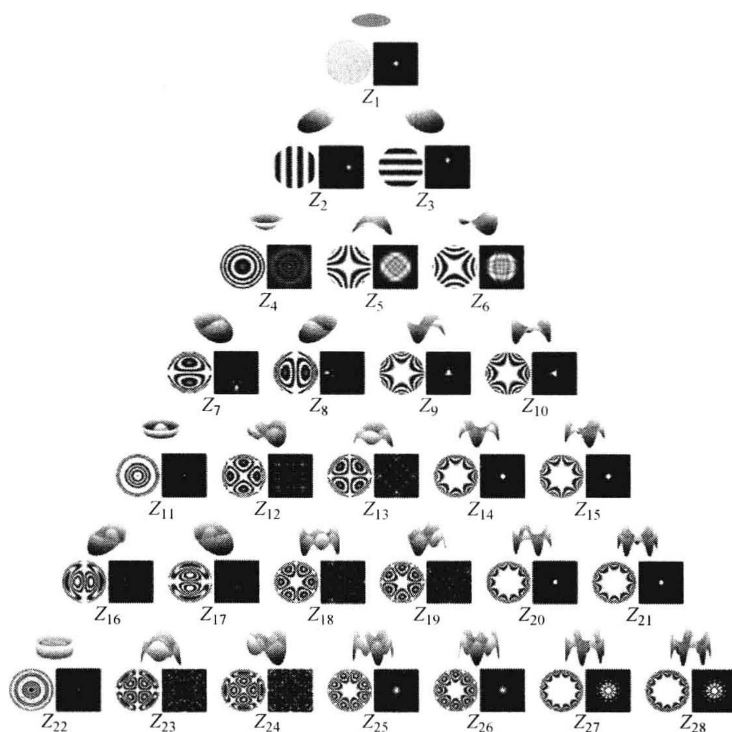


图 13.4　泽尼克圆多项式金字塔

（图中顶部为波面高度图，左边为干涉图，右边为点扩展函数图。每个多项式像差的标准差均为一个波。）

像差点扩展函数分别沿 x 轴和 y 轴发生位移。某些点扩展函数使用了更多光线以显示其细节。

13.3.4　初阶泽尼克像差及其与赛德尔像差的关系

表 13.5 中给出了一些泽尼克像差名称。泽尼克倾斜误差

$$a_2Z_2(\rho,\theta)=2a_2\rho\cos\theta \tag{13.55}$$

表示 x 轴倾斜和相应的沿 x 轴离基准球面中心的位移量 $4Fa_2$，或表示波前相对于 y 轴的倾斜角 $\beta=2a_2/a$。类似的，泽尼克倾斜误差

$$a_3Z_3(\rho,\theta)=2a_3\rho\sin\theta \tag{13.56}$$

表示 y 轴倾斜和相应地沿 y 轴离基准球面中心的位移量 $4Fa_3$，或表示波前相对于 x 轴的倾斜角 $\alpha=2a_3/a$。泽尼克初阶像散

$$a_6Z_6(\rho,\theta)=\sqrt{6}a_6\rho^2\cos2\theta \tag{13.57}$$

被看做是 x 轴或者 0°像散。它包含赛德尔像散 $\rho^2\cos^2\theta$，该像散由利用离焦像差 ρ^2 进行平衡以得到最小方差。它生成一个均匀圆光斑图，但是一个沿 x 轴的线状弧矢图（即在某个平面上图像不在离焦区域内）。泽尼克初阶像散

$$a_5Z_5(\rho,\theta)=\sqrt{6}a_5\rho^2\sin2\theta \tag{13.58}$$

可以写成

$$a_5Z_5(\rho,\theta)=\sqrt{6}a_5\rho^2\cos[2(\theta+\pi/4)] \tag{13.59}$$

与式（13.57）比较，它相当于把 θ 替换为 $\theta+\pi/4$。相应地，它称为 45°像散。二阶泽

尼克像散

$$a_{12}Z_{12}(\rho,\theta)=\sqrt{10}(4\rho^4-3\rho^2)\cos2\theta$$

则不在任何平面内生成线状图像。然而，为了与初阶 x 轴像散保持一致，它被称为 x 轴像散或0°像散，因为其随 θ 变化如同 $\cos2\theta$。同样，其他形式的像散的名称如表 13.2 所示。泽尼克彗差项 $a_8Z_8(\rho,\ \theta)$ 和 $a_7Z_7(\rho,\ \theta)$ 称为 x 轴和 y 轴泽尼克彗差。它们分别生成沿 x 轴和 y 轴对称的点扩展函数。类似地，二阶和三阶彗差的名称也可以如此阐述。

很明显，当某个像差同时出现正弦和余弦项时，如同在光学检验中一样，它们的结合可以表像差，该像差的方式取决于其组成项的值（Wyant and Creath，1992；Mahajan and Swantner，2006）。例如，如果 x 轴和 y 轴泽尼克倾斜同时出现

$$W(\rho,\theta)=a_2Z_2(\rho,\theta)+a_3Z_3(\rho,\theta) \tag{13.60a}$$

$$=2a_2\rho\cos\theta+2a_3\rho\sin\theta \tag{13.60b}$$

则该式可以写成

$$W(\rho,\theta)=2(a_2^2+a_3^2)^{1/2}\rho\cos[\theta-\arctan(a_3/a_2)] \tag{13.61}$$

所以，它表示一个相对于每个轴的波前倾斜 $2(a_2^2+a_3^2)^{1/2}$，该轴与一条与 x 轴成 $\tan^{-1}(a_3/a_2)$ 角的直线正交。

很容易看到，当 a_2 和 a_3 为负值时，式（13.61）中的 $2(a_2^2+a_3^2)^{1/2}$ 必须替换为 $-2(a_2^2+a_3^2)^{1/2}$。然而当它们一正一负时，负变元的 $\tan(a_3/a_2)$ 有两个解：一个负锐角或其补角。选哪一个解取决于 a_2 或者 a_3 是否为负，如式（13.62）所示

$$\arctan(a_3/a_2)=\begin{cases}-\arctan(|a_3/a_2|) & a_2>0,a_3<0\\ \pi-\arctan(|a_3/a_2|) & a_2<0,a_3>0\end{cases} \tag{13.62}$$

另一种选择方案是当 a_2 为负数时，令角为 $-\arctan|a_3/a_2|$，如同当 a_2 为正时，同样还需要将 $(a_2^2+a_3^2)^{1/2}$ 替换为 $-(a_2^2+a_3^2)^{1/2}$。

当 x 和 y 方向的泽尼克彗差同时存在时，像差可以写成

$$W(\rho,\theta)=a_8Z_8(\rho,\theta)+a_7Z_7(\rho,\theta) \tag{13.63a}$$

$$=\sqrt{8}a_8(3\rho^3-2\rho)\cos\theta+\sqrt{8}a_7(3\rho^3-2\rho)\sin\theta \tag{13.63b}$$

$$=(a_7^2+a_8^2)^{1/2}\sqrt{8}(3\rho^3-2\rho)\cos[\theta-\arctan(a_7/a_8)] \tag{13.63c}$$

其等同于变元 $(a_7^2+a_8^2)^{1/2}$ 的泽尼克彗差，该变元与 x 轴成 $\arctan(a_7/a_8)$ 角倾斜。类似的，如果 x 和 45°像散同时存在，则

$$W(\rho,\theta)=a_6Z_6(\rho,\theta)+a_5Z_5(\rho,\theta) \tag{13.64a}$$

$$=\sqrt{6}a_6\rho^2\cos2\theta+\sqrt{6}a_5\rho^2\sin2\theta \tag{13.64b}$$

也可以写成

$$W(\rho,\theta)=(a_5^2+a_6^2)^{1/2}\sqrt{6}\rho^2\cos\{2[\theta-\frac{1}{2}\arctan(a_5/a_6)]\} \tag{13.65}$$

式（13.65）表明它是一个角度为（1/2）$\arctan(a_5/a_6)$ 的变元 $(a_5^2+a_6^2)^{1/2}$ 的泽尼克像散。

需要注意的是式（13.61）给出的波前倾斜像差得自于泽尼克倾斜误差。然而，还有其他的泽尼克像差也包含倾斜，例如，泽尼克初阶、二阶、三阶彗差。类似地，式（13.63c）中的角度为 $\arctan(a_7/a_8)$ 的赛德尔彗差 $3\sqrt{8}(a_7^2+a_8^2)^{1/2}$ 仅来自于初阶泽尼克彗差。但是二

阶、三阶泽尼克彗差也包含赛德尔彗差。所以，如果高阶泽尼克彗差为零或者可忽略，由初阶泽尼克彗差引起像差的点扩展函数将相对于一条与 x 轴的夹角为 $\arctan(a_7/a_8)$ 的线对称。类似地，当二阶、三阶像散为零或者可忽略，赛德尔像散为 $2/\sqrt{6}\,(a_5^2+a_6^2)^{1/2}$，如式(13.65)。它生成一个有像差的点扩展函数，它相对于两个正交轴对称，其中一条轴与 x 轴的夹角为 $\frac{1}{2}\arctan(a_5/a_6)$。对于彗差和像散，就如同波前斜差的情况一样，可以利用同样的规则来确定夹角 arctan（.）。

很明显，定义像散有歧义，因为将离焦像差从它当中分离时，它可以写成等价型的不同式子。例如，一个零度像散可以写成

$$a_6 Z_6(\rho,\theta) = a_6(\sqrt{6}\rho^2\cos 2\theta) \tag{13.66a}$$

$$= a_6\sqrt{6}(2\rho^2\cos^2\theta-\rho^2) \tag{13.66b}$$

$$= a_6\sqrt{6}(-2\rho^2\sin^2\theta+\rho^2) \tag{13.66c}$$

显然，式（13.66a）给出的0°泽尼克像散可以写成0°正赛德尔像散和负离焦的组合，如式(13.66b）所示，也可以写成90°负赛德尔像散和正离焦的组合，如式（13.66c）所示。

为了证明如何推导出一个错误的赛德尔系数（除非利用全部有效泽尼克项进行推导)，我们考虑一个轴向图像，该图像像差为一个二阶球差 ρ^6 的波。用泽尼克多项式表示它可以写成

$$W(\rho) = a_{22}Z_{22}(\rho) + a_{11}Z_{11}(\rho) + a_4 Z_4(\rho) + a_1 Z_1(\rho) \tag{13.67a}$$

其中

$$a_{22} = 1/20\sqrt{7},\ a_{11} = 1/4\sqrt{5},\ a_4 = (9/20\sqrt{3}),\ a_1 = 1/4 \tag{13.67b}$$

如果只利用初阶泽尼克像差 $a_{11}Z_{11}(\rho)$ 推导赛德尔球差，它的值则为1.5个波长。这样的计算结果明显是错误的，因为赛德尔球差正确的值为零。无需多说，如果展开这个像差函数不超过21项，就会错误地计算出赛德尔球差的值为1.5个波。然而，当像差函数展开式至少包含前22项时，则赛德尔球差的值就会正确的减少到零。对于一个离轴图像，有与角度相关的像差，例如 Z_{14}，该像差也包含赛德尔像差。所以，展开到包含一定项数非常重要，这样再增加额外项不会显著改变函数与其估计值之间的均方差。否则，推导出的赛德尔像差是错误的。

如果只根据初阶泽尼克像差估算一个像差函数，可以写

$$W(\rho,\theta) = \sum_{j=1}^{j=8} a_j Z_j(\rho,\theta) + a_{11}Z_{11}(\rho,\theta) \tag{13.68a}$$

$$= A_p + A_t\rho\cos(\theta-\beta_t) + A_d\rho^2 + A_a\rho^2\cos^2(\theta-\beta_a) + A_{cp}\cos(\theta-\beta_c) + A_s\rho^4 \tag{13.68b}$$

A_p 为平移像差，其他系数 A_i 表示相应赛德尔像差项的峰值，β_i 则为赛德尔像差的方向角。

$$A_p = a_1 - \sqrt{3}a_4 + \sqrt{5}a_{11} \tag{13.69a}$$

$$A_t = 2[(a_2-\sqrt{8}a_8)^2 + (a_3-\sqrt{8}a_7)^2]^{1/2},\ \beta_t = \arctan\left(\frac{a_3-\sqrt{8}a_7}{a_2-\sqrt{8}a_8}\right) \tag{13.69b}$$

$$A_d = 2(\sqrt{3}a_4 - 3\sqrt{5}a_{11} - A_a) \tag{13.69c}$$

$$A_a = 2\sqrt{6}(a_5^2 + a_6^2)^{1/2}, \beta_a = \frac{1}{2}\arctan(a_5/a_6) \tag{13.69d}$$

$$A_c = 6\sqrt{2}(a_7^2 + a_8^2)^{1/2}, \beta_c = \arctan(a_7/a_8) \tag{13.69e}$$

$$A_s = 6\sqrt{5}a_{11} \tag{13.69f}$$

仅在高阶像差可忽略时这些近似值比较正确，因为它们也包含赛德尔像差项。

13.4 泽尼克环多项式作为环形光瞳系统的平衡像差

13.4.1 平衡像差

令一个环形光瞳的遮拦比为 ε，径向变量 $\varepsilon \leqslant \rho \leqslant 1$。相应的像差 $W(\rho,\theta,\varepsilon)$ 的均值和均方值由，式（13.70）式给出（Mahajan，1981a，b，1984，1994，2003，2004）

$$\langle W^k \rangle = \frac{1}{\pi(1-\varepsilon^2)}\int_\varepsilon^1 \int_0^{2\pi} W^k(\rho,\theta,\varepsilon)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \tag{13.70}$$

k 分别等于 1 和 2。表 13.7 所示为环形光瞳的系统初阶像差及其标准差。表 13.8 所示为相应的平衡像差、标准偏差和衍射焦点（针对小像差的最大中心辐照度的点）。我们注意存在球差时平衡离焦或存在彗差时平衡波前倾斜都取决于 ε 值。它们都随 ε 的增加而增加。与圆形光瞳相比，平衡离焦的值大 $1+\varepsilon^2$ 倍。存在像散时平衡离焦的值与 ε 无关。当 $\varepsilon \to 0$ 时这些值减小到圆形光瞳离焦平衡值。

表 13.7 环形光瞳的系统初阶像差及其标准差

像 差	$W(\rho,\theta)$	σ_W
球差	$A_s\rho^4$	$(4-\varepsilon^2-6\varepsilon^4-\varepsilon^6+4\varepsilon^8)^{1/2}A_s/3\sqrt{5}$
彗差	$A_c\rho^3\cos\theta$	$(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6)^{1/2}A_c/2\sqrt{2}$
像散	$A_a\rho^2\cos^2\theta$	$(1+\varepsilon^2)^{1/2}/A_a/4$
场曲	$A_d\rho^2$	$(1-\varepsilon^2)\ A_d/2\sqrt{3}$
畸变	$A_t\rho\cos\theta$	$(1+\varepsilon^2)^{1/2}A_t/2$

表 13.8 相应的平衡像差、标准偏差和衍射焦点

平衡像差	$W(\rho,\theta)$	σ_W	衍射焦点
球差	$A_s[\rho^2-(1+\varepsilon^2)\rho^2]$	$\frac{1}{6\sqrt{5}}(1-\varepsilon^2)^2A_s$	$[0,0,8(1+\varepsilon^2)F^2A_s]$
彗差	$A_c\left(\rho^3-\frac{2}{3}\frac{1+\varepsilon^2+\varepsilon^4}{1+\varepsilon^2}\rho\right)\cos\theta$	$\frac{(1-\varepsilon^2)(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)^{1/2}}{6\sqrt{2}(1+\varepsilon^2)^{1/2}}A_c$	$\left[\frac{4(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4)}{3(1+\varepsilon^2)}FA_c,0,0\right]$
像散	$A_a\rho^2(\cos^2\theta-1/2)$	$\frac{1}{2\sqrt{6}}(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4)^{1/2}A_a$	$(0,0,4F^2A_a)$

13.4.2 泽尼克环多项式

一个含有圆形光瞳的旋转对称系统的像差函数可以展开成一个泽尼克环多项式 $R_n^m(\rho;\varepsilon)$ 的完整集，该多项式在整个环面上是正交的，其形式如下（Mahajan，1981a，b，1984，1994，

2003，2004）

$$W(\rho,\theta;\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} Z_n^m(\rho,\theta,\varepsilon) \tag{13.71}$$

式中，c_{nm}为展开系数；n 和 m 为正整数，$n-m\geqslant 0$ 且为偶数，并且

$$Z_n^m(\rho,\theta,\varepsilon) = [2(n+1)/(1+\delta_{m0})]^{1/2} R_n^m(\rho;\varepsilon)\cos m\theta \tag{13.72}$$

为正交泽尼克环多项式并满足正交关系

$$\frac{1}{\pi(1-\varepsilon)^2}\int_\varepsilon^1\int_0^{2\pi} Z_n^m(\rho,\theta,\varepsilon) Z_{n'}^{m'}(\rho,\theta,\varepsilon)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = \delta_{mm'}\delta_{nn'} \tag{13.73}$$

所以，径向多项式满足正交关系

$$\int_\varepsilon^1 R_n^m(\rho;\varepsilon) R_{n'}^{m'}(\rho;\varepsilon)\rho \mathrm{d}\rho = \frac{1-\varepsilon^2}{2(n+1)}\delta_{nn'} \tag{13.74}$$

泽尼克环多项式可以从由如下的革兰-施密特（Gram-Schmidt）正交化过程中的相关圆多项式中得到（Korn and Korn，1968）

$$R_n^m(\rho;\varepsilon) = N_n^m\left[R_n^m(\rho) - \sum_{i\geqslant 1}^{(n-m)/2}(n-2i+1)\langle R_n^m(\rho)R_{n-2i}^m(\rho;\varepsilon)\rangle R_{n-2i}^m(\rho;\varepsilon)\right] \tag{13.75}$$

其中

$$\langle R_n^m(\rho)R_{n'}^{m'}(\rho;\varepsilon)\rangle = \frac{2}{1-\varepsilon^2}\int_\varepsilon^1 R_n^m(\rho)R_{n'}^{m'}(\rho;\varepsilon)\rho \mathrm{d}\rho \tag{13.76}$$

N_n^m 为归一化常数，所以径向多项式符合正交公式（13.74）。$m=0$ 时，根据式（13.77），径向多项式等效于勒让德（Legendre）多项式 $P_n(.)$

$$R_{2n}^0(\rho;\varepsilon) = P_n\left[\frac{2(\rho^2-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^2} - 1\right] \tag{13.77}$$

所以，这些可以利用径向圆多项式 $R_{2n}^0(\rho)$ 通过将 ρ 替换为$\left(\frac{\rho^2-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^{1/2}$得到，即

$$R_{2n}^0(\rho;\varepsilon) = R_{2n}^0\left[\left(\frac{\rho^2-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^{1/2}\right] \tag{13.78}$$

也可以从式（13.74）和式（13.75）中看出

$$R_n^n(\rho;\varepsilon) = \rho^n\Big/\left(\sum_{i-0}^{n}\varepsilon^{2i}\right)^{1/2} \tag{13.79a}$$

$$= \rho^n\{(1-\varepsilon^2)/[1-\varepsilon^{2(n-1)}]\}^{1/2} \tag{13.79b}$$

还有

$$R_n^{n-2}(\rho;\varepsilon) = \frac{n\rho^n - (n-1)[(1-\varepsilon^{2n})/(1-\varepsilon^{2(n-1)})]\rho^{n-2}}{\{(1-\varepsilon^2)^{-1}[n^2(1-\varepsilon^{2(n+1)}) - (n^2-1)(1-\varepsilon^{2n})^2/(1-\varepsilon^{2(n-1)})]\}^{1/2}} \tag{13.80}$$

很明显径向环多项式 $R_n^n(\rho;\varepsilon)$在归一化时有别于相应的径向圆多项式 $R_n^n(\rho)$，我们同样注意到

$$R_n^m(1;\varepsilon) = 1, m=0 \tag{13.81a}$$

$$\neq 1,\ m\neq 0 \tag{13.81b}$$

环多项式类似于圆多项式，不同之处在于在整个环形光瞳上它们是正交的。所以 $R_n^m(\rho;\varepsilon)$ 是度数为 n 的径向多项式，ρ 包含 ρ^n，$\rho^{n-2}\cdots\rho^m$ 并取决于 ε。环多项式与圆多项式具有同样

的独特性。$n \leqslant 6$ 的径向 Zernike 环多项式列于表 13.9 中。

表 13.9 径向 Zernike 环多项式 $R_n^m(\rho;\ \varepsilon)$，$\varepsilon \leqslant \rho \leqslant 1$

n	m	$R_n^m(\rho;\varepsilon)$
0	0	1
1	1	$\rho/(1+\varepsilon^2)^{1/2}$
2	0	$(2\rho^2-1-\varepsilon^2)/(1-\varepsilon^2)$
2	2	$\rho^2/(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4)^{1/2}$
3	1	$\dfrac{3(1+\varepsilon^2)\rho^3-2(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4)\rho}{(1-\varepsilon^2)[(1+\varepsilon^2)(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)]^{1/2}}$
3	3	$\rho^3/(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6)^{1/2}$
4	0	$[6\rho^4-6(1+\varepsilon^2)\rho^2+1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4]/(1-\varepsilon^2)^2$
4	2	$\dfrac{4\rho^4-3[(1-\varepsilon^8)/(1-\varepsilon^6)]\rho^2}{\{(1-\varepsilon^2)^{-1}[16(1-\varepsilon^{10})-15(1-\varepsilon^8)^2/(1-\varepsilon^6)]\}^{1/2}}$
4	4	$\rho^4/(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6+\varepsilon^8)^{1/2}$
5	1	$\dfrac{10(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)\rho^5-12(1+4\varepsilon^2+4\varepsilon^4+\varepsilon^6)\rho^3+3(1+4\varepsilon^2+10\varepsilon^4+4\varepsilon^6+\varepsilon^8)\rho}{(1-\varepsilon^2)^2[(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)(1+9\varepsilon^2+9\varepsilon^4+\varepsilon^6)]^{1/2}}$
5	3	$\dfrac{5\rho^5-4[(1-\varepsilon^{10})/(1-\varepsilon^8)]\rho^3}{\{(1-\varepsilon^2)^{-1}[25(1-\varepsilon^{1/2})-24(1-\varepsilon^{10})^2/(1-\varepsilon^8)]\}^{1/2}}$
5	5	$\rho^5/(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6+\varepsilon^8+\varepsilon^{10})^{1/2}$
6	0	$[20\rho^6-30(1+\varepsilon^2)\rho^4+12(1+3\varepsilon^2+\varepsilon^4)\rho^2-(1+9\varepsilon^2+9\varepsilon^4+\varepsilon^6)]/(1-\varepsilon^2)^3$ $15(1+40\varepsilon^2+10\varepsilon^4+4\varepsilon^6+\varepsilon^8)\rho^6-20(1+4\varepsilon^2+10\varepsilon^4+10\varepsilon^6+4\varepsilon^8+\varepsilon^{10})\rho^4$
6	2	$\dfrac{+6(1+4\varepsilon^2+10\varepsilon^4+20\varepsilon^6+10\varepsilon^8+4\varepsilon^{10}+\varepsilon^{12})\rho^2}{(1-\varepsilon^2)^2[(1+4\varepsilon^2+10\varepsilon^4+4\varepsilon^6+\varepsilon^8)(1+9\varepsilon^2+45\varepsilon^4+65\varepsilon^6+45\varepsilon^8+9\varepsilon^{10}+\varepsilon^{12})]^{1/2}}$
6	4	$\dfrac{6\rho^6-5[(1-\varepsilon^{12})/(1-\varepsilon^{10})]\rho^4}{\{(1-\varepsilon^2)^{-1}[36(1-\varepsilon^{14})-35(1-\varepsilon^{12})^2/(1-\varepsilon^{10})]\}^{1/2}}$
6	6	$\rho^6/(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6+\varepsilon^8+\varepsilon^{10}+\varepsilon^{12})^{1/2}$

代入式（13.71）并利用正交公式（13.73），展开系数由式（13.82）得出

$$c_{nm}=\frac{1}{\pi(1-\varepsilon^2)}\int_0^1\int_0^{2\pi}W(\rho,\theta,\varepsilon)Z_n^m(\rho,\theta,\varepsilon)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \tag{13.82}$$

像差方差由式（13.83）给出

$$\rho_W^2=\langle W^2(\rho,\theta,\varepsilon)\rangle-\langle W(\rho,\theta,\varepsilon)\rangle^2=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}c_{nm}^2 \tag{13.83}$$

再次，平衡初阶像差等同于相应的泽尼克环多项式。例如，平衡球差类似于泽尼克环多项式 $Z_4^0(\rho,\ \theta;\ \varepsilon)$。同样，平衡彗差和平衡像散分别类似于多项式 $Z_3^1(\rho,\ \theta;\ \varepsilon)$ 和 $Z_2^2(\rho,\ \theta;\ \varepsilon)$。还有，场曲（离焦）像差和畸变（波前倾斜）像差分别等同于 $Z_2^0(\rho,\ \theta;\ \varepsilon)$ 和 $Z_1^1(\rho,\ \theta;\ \varepsilon)$。平移多项式 $Z_0^0(\rho,\ \theta;\ \varepsilon)$ 简单地等于 1。

图13.5表示了一个径向环多项式 $R_n^m(\rho;\ \varepsilon)$ 随 ρ 变化的情况，$\varepsilon=0.5$，$0.5\leqslant\rho\leqslant1$。与一个圆多项式比较，如图13.3所示，光瞳 $\rho=1$ 的外边缘处多项式的值仅当 $m=0$ 的时候等于1。其值，在光瞳 $\rho=0.5$ 的内边缘处存在斜差、彗差和像散的情况下都不为零。

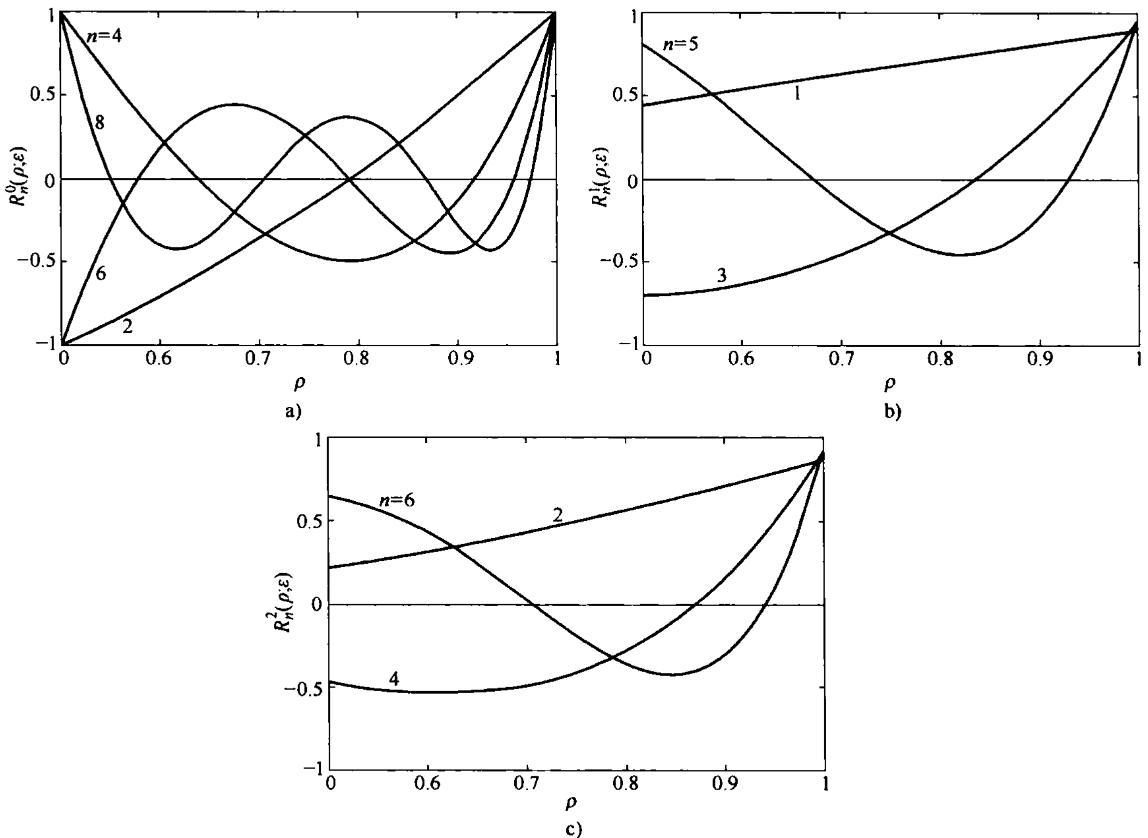


图13.5 径向环多项式 $R_n^m(\rho;\ \varepsilon)$ 随 ρ 的变化曲线图，$\varepsilon=0.5$

a）离焦和球差 b）倾斜和彗差 c）像散

如果一个系统有不含旋转对称轴的环形光瞳，例如，一个任意变形的环形镜子，则像差函数展开式中也包含带 $\sin m\theta$ 项的多项式。用极坐标表示的正交泽尼克环多项式 $Z_j(\rho,\ \theta;\ \varepsilon)$ 及其编号列于表13.10中。它们的编号或序号与表13.5中列出的泽尼克圆多项式一致。用笛卡儿坐标（x，y）表示的相应多项式 $Z_j(\rho,\ \theta;\ \varepsilon)$ 利用光瞳外半径 a 进行归一化，如表13.11所示。下标 n 因为简化而省略。

表13.10 正交泽尼克环多项式 $Z_j(\rho,\ \theta;\ \varepsilon)$（$j$、$n$ 和 m 分别表示多项式的项数、径向多项式级数和方位角频率。多项式 Z_j 经过排序处理，这样偶数 j 对应于随 $\cos m\theta$ 变化的对称多项式，而奇数 j 对应于随 $\sin m\theta$ 变化的非对称多项式。n 值小的多项式排在前面，在 n 值一定的情况下，m 值小的多项式排在前面。）

j	n	m	$Z_j(\rho,\theta;\varepsilon)$	Zernike 像差名称
1	0	0	$R_0^0(\rho;\varepsilon)$	平移
2	1	1	$2R_1^1(\rho;\varepsilon)\cos\theta$	x 轴倾斜
3	1	1	$2R_1^1(\rho;\varepsilon)\sin\theta$	y 轴倾斜

（续）

j	n	m	$Z_j(\rho,\theta;\varepsilon)$	Zernike 像差名称
4	2	0	$\sqrt{3}R_2^0(\rho;\varepsilon)$	离焦
5	2	2	$\sqrt{6}R_2^2(\rho;\varepsilon)\sin2\theta$	45°初级像散
6	2	2	$\sqrt{6}R_2^2(\rho;\varepsilon)\cos2\theta$	0°初级像散
7	3	1	$\sqrt{8}R_3^1(\rho;\varepsilon)\sin\theta$	y 轴初级彗差
8	3	1	$\sqrt{8}R_3^1(\rho;\varepsilon)\cos\theta$	x 轴初级彗差
9	3	3	$\sqrt{8}R_3^3(\rho;\varepsilon)\sin3\theta$	
10	3	3	$\sqrt{8}R_3^3(\rho;\varepsilon)\cos3\theta$	
11	4	0	$\sqrt{5}R_4^0(\rho;\varepsilon)$	初级球差
12	4	2	$\sqrt{10}R_4^2(\rho;\varepsilon)\cos2\theta$	0°二级像散
13	4	2	$\sqrt{10}R_4^2(\rho;\varepsilon)\sin2\theta$	45°二级像散
14	4	4	$\sqrt{10}R_4^4(\rho;\varepsilon)\cos4\theta$	
15	4	4	$\sqrt{10}R_4^4(\rho;\varepsilon)\sin4\theta$	
16	5	1	$\sqrt{12}R_5^1(\rho;\varepsilon)\cos\theta$	x 轴二级彗差
17	5	1	$\sqrt{12}R_5^1(\rho;\varepsilon)\sin\theta$	y 轴二级彗差
18	5	3	$\sqrt{12}R_5^3(\rho;\varepsilon)\cos3\theta$	
19	5	3	$\sqrt{12}R_5^3(\rho;\varepsilon)\sin3\theta$	
20	5	5	$\sqrt{12}R_5^5(\rho;\varepsilon)\cos5\theta$	
21	5	5	$\sqrt{12}R_5^5(\rho;\varepsilon)\sin5\theta$	
22	6	0	$\sqrt{7}R_6^0(\rho;\varepsilon)$	二级球差
23	6	2	$\sqrt{14}R_6^2(\rho;\varepsilon)\sin2\theta$	45°三级像散
24	6	2	$\sqrt{14}R_6^2(\rho;\varepsilon)\cos2\theta$	0°三级像散
25	6	4	$\sqrt{14}R_6^4(\rho;\varepsilon)\cos4\theta$	
26	6	4	$\sqrt{14}R_6^4(\rho;\varepsilon)\sin4\theta$	
27	6	6	$\sqrt{14}R_6^6(\rho;\varepsilon)\sin6\theta$	
28	6	6	$\sqrt{14}R_6^6(\rho;\varepsilon)\cos6\theta$	

表 13.11 利用光瞳半径 a 进行归一化处理后，用笛卡儿坐标（x, y）表示的正交泽尼克圆多项式 $Z_j(x, y; \varepsilon)$（$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $0\leqslant\rho=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant1$）

多 项 式	$Z_j(x,y;\varepsilon)$
Z_1	1
Z_2	$2x/(1+\varepsilon^2)^{1/2}$
Z_3	$2y/(1+\varepsilon^2)^{1/2}$
Z_4	$\sqrt{3}(2\rho^2-1-\varepsilon^2)/(1-\varepsilon^2)$

（续）

多　项　式	$Z_f(x,y;\varepsilon)$
Z_5	$2\sqrt{6}xy/(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4)^{1/2}$
Z_6	$\sqrt{6}(x^2-y^2)/(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4)^{1/2}$
Z_7	$\dfrac{\sqrt{8}y[3(1+\varepsilon^2)\rho^2-2(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4)]}{(1-\varepsilon^2)[1+\varepsilon^2)(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)]^{1/2}}$
Z_8	$\dfrac{\sqrt{8}x[3(1+\varepsilon^2)\rho^2-2(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4)]}{(1-\varepsilon^2)[1+\varepsilon^2)(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)]^{1/2}}$
Z_9	$\sqrt{8}y(3x^2-y^2)/(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6)^{1/2}$
Z_{10}	$\sqrt{8}x(x^2-3y^2)/(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6)^{1/2}$
Z_{11}	$\sqrt{5}[6\rho^4-6(1+\varepsilon^2)\rho^2+(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)]/(1-\varepsilon^2)^2$
Z_{12}	$\dfrac{\sqrt{10}(x^2-y^2)[4\rho^2-3(1-\varepsilon^8)/(1-\varepsilon^6)]}{\{(1-\varepsilon^2)^{-1}[16(1-\varepsilon^{10})-15(1-\varepsilon^8)^2/(1-\varepsilon^6)]\}^{1/2}}$
Z_{13}	$\dfrac{2\sqrt{10}xy[4\rho^2-3(1-\varepsilon^8)/(1-\varepsilon^6)]}{\{(1-\varepsilon^2)^{-1}[16(1-\varepsilon^{10})-15(1-\varepsilon^8)^2/(1-\varepsilon^6)]\}^{1/2}}$
Z_{14}	$\sqrt{10}(\rho^4-8x^2y^2)/(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6+\varepsilon^8)^{1/2}$
Z_{15}	$4\sqrt{10}xy(x^2-y^2)/(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6+\varepsilon^8)^{1/2}$
Z_{16}	$\dfrac{\sqrt{12}x[10(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)\rho^4-12(1+4\varepsilon^2+4\varepsilon^4+\varepsilon^6)\rho^2]+3(1+4\varepsilon^2+10\varepsilon^4+4\varepsilon^6+\varepsilon^8)]}{(1-\varepsilon^2)^2[(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)(1+9\varepsilon^2+9\varepsilon^4+\varepsilon^6)]^{1/2}}$
Z_{17}	$\dfrac{\sqrt{12}y[10(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)\rho^4-12(1+4\varepsilon^2+4\varepsilon^4+\varepsilon^6)\rho^2]+3(1+4\varepsilon^2+10\varepsilon^4+4\varepsilon^6+\varepsilon^8)]}{(1-\varepsilon^2)^2[(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)(1+9\varepsilon^2+9\varepsilon^4+\varepsilon^6)]^{1/2}}$
Z_{18}	$\dfrac{\sqrt{12}x(x^2-3y^2)[5\rho^2-4(1-\varepsilon^{10})/(1-\varepsilon^8)]}{\{(1-\varepsilon^2)^{-1}[25(1-\varepsilon^{12})-24(1-\varepsilon^{10})^2/(1-\varepsilon^8)]\}^{1/2}}$
Z_{19}	$\dfrac{\sqrt{12}y(3x^2-y^2)[5\rho^2-4(1-\varepsilon^{10})/(1-\varepsilon^8)]}{\{(1-\varepsilon^2)^{-1}[25(1-\varepsilon^{12})-24(1-\varepsilon^{10})^2/(1-\varepsilon^8)]\}^{1/2}}$
Z_{20}	$\sqrt{12}x(16x^4-20x^2\rho^2+5\rho^4)/[1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6+\varepsilon^8+\varepsilon^{10})^{1/2}$
Z_{21}	$\sqrt{12}y(16y^4-20y^2\rho^2+5\rho^4)/[1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6+\varepsilon^8+\varepsilon^{10})^{1/2}$
Z_{22}	$\sqrt{7}[20\rho^6-30(1+\varepsilon^2)\rho^4+12(1+3\varepsilon^2+\varepsilon^4)\rho^2-(1+9\varepsilon^2+9\varepsilon^4+\varepsilon^6)]/(1-\varepsilon^2)^3$
Z_{23}	$\dfrac{2\sqrt{14}xy[15(1+4\varepsilon^2+10\varepsilon^4+4\varepsilon^6+\varepsilon^8)\rho^4-20(1+4\varepsilon^2+10\varepsilon^4+10\varepsilon^6+4\varepsilon^8+\varepsilon^{10})\rho^2+6(1+4\varepsilon^2+10\varepsilon^4+20\varepsilon^6+10\varepsilon^8+4\varepsilon^{10}+\varepsilon^{12})]}{(1-\varepsilon^2)^2[1+4\varepsilon^2+10\varepsilon^4+4\varepsilon^6+\varepsilon^8)(1+9\varepsilon^2+45\varepsilon^4+65\varepsilon^6+45\varepsilon^8+9\varepsilon^{10}+\varepsilon^{12})]^{1/2}}$
Z_{24}	$\dfrac{\sqrt{14}(x^2-y^2)[15(1+4\varepsilon^2+10\varepsilon^4+4\varepsilon^6+\varepsilon^8)\rho^4-20(1+4\varepsilon^2+10\varepsilon^4+10\varepsilon^6+4\varepsilon^8+\varepsilon^{10})\rho^2+6(1+4\varepsilon^2+10\varepsilon^4+20\varepsilon^6+10\varepsilon^8+4\varepsilon^{10}+\varepsilon^{12})]}{(1-\varepsilon^2)^2[1+4\varepsilon^2+10\varepsilon^4+4\varepsilon^6+\varepsilon^8)(1+9\varepsilon^2+45\varepsilon^4+65\varepsilon^8+45\varepsilon^8+9\varepsilon^{10}+\varepsilon^{12})]^{1/2}}$

（续）

多　项　式	$Z_f(x,y;\varepsilon)$
Z_{25}	$\dfrac{4\sqrt{14}xy(x^2-y^2)[6\rho^2-5(1-\varepsilon^{12})/(1-\varepsilon^{10})]}{\{(1-\varepsilon^2)^{-1}[36(1-\varepsilon^{14})-35(1-\varepsilon^{12})^2/(1-\varepsilon^{10})]\}^{1/2}}$
Z_{26}	$\dfrac{\sqrt{14}(8x^4-8x^2\rho^2+\rho^4)[6\rho^2-5(1-\varepsilon^{12})/(1-\varepsilon^{10})]}{\{(1-\varepsilon^2)^{-1}[36(1-\varepsilon^{14})-35(1-\varepsilon^{12})^2/(1-\varepsilon^{10})]\}^{1/2}}$
Z_{27}	$\sqrt{14}xy(32x^4-32x^2\rho^2+6\rho^4)/(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6+\varepsilon^8+\varepsilon^{10}+\varepsilon^{12})/1/2$
Z_{28}	$\sqrt{14}(32x^6-48x^4\rho^2+18x^2\rho^4-\rho^6)/(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6+\varepsilon^8+\varepsilon^{10}+\varepsilon^{12})/1/2$

13.4.3 泽尼克环多项式像差的波面高度分布图、干涉图和点扩展函数图

$n\leqslant6$ 时的泽尼克环多项式成金字塔状，如图 13.6 所示。如同图 13.4 所示的泽尼克圆多项式一样，层数表示在那一层的多项式的 n 值，多项式在那一层的项数等于 $n+1$。每个多项式都以三种不同却等效的方式画出。图 13.6 中的 ε 值为 0.5。对于每个多项式，位于顶部的波面高度图展现出来的形状如同由一个变形镜产生的。图 13.6 中每个多项式像差的标准差等于一个波长。干涉图就像光学检验中的一样，画在左边。由于遮拦，干涉条纹数与相应的圆形光瞳干涉图的干涉条纹数不同。当将一个波长从光瞳中心移动到光瞳边缘的时候，干涉条纹数等于像差变化的次数，不同的多项式干涉条纹数也不同。每个多项式右边显示的是点扩展函数，表示存在多项式像差的点目标图像。相对于圆形光瞳的点扩展函数，某些环形光瞳点扩展函数使用了更多光线以显示其细节。

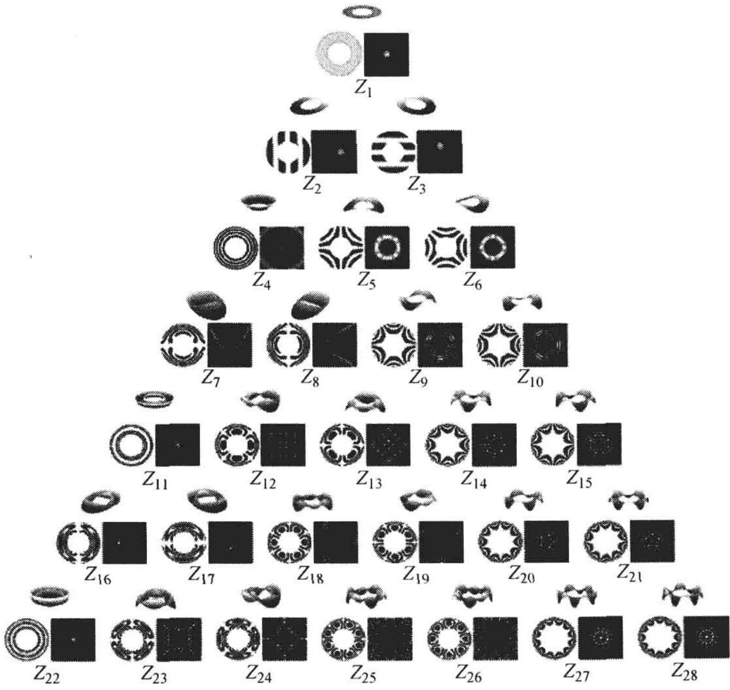


图 13.6　$n\leqslant6$ 时的泽尼克环多项式金字塔

（图中顶部为波面高度图，左边为干涉图，右边为点扩展函数图。$\varepsilon=0.5$，每个多项式像差的标准差均为一个波。）

13.5　利用离散波前误差数据计算泽尼克系数

13.5.1　简介

可以看到当像差函数通过分析得出后，像差系数就可以通过计算式（13.21）、式（13.51）或式（13.82）的积分结果得出，使用哪个公式取决于该系统是否旋转对称，或者光瞳是圆形或者环形的。可以设计出计算这些积分的数字化高效算法以解决与泽尼克多项式摆动性相关的计算问题（Wang and Silva，1980；Prata and Rusch，1989）。像差方差由像差系数的平方和给出，表示像差均值的 a_1 除外。然而，原则上，表示像差函数的多项式的数量是无限的，实践中，这个数量将会是有限的。这个数量通过比较求有限数量系数的平方和时得到的方差与实际方差而得到。增加多项式的数量直到当这两个方差的差值小于预设值，预设值取决于所计算像差的公差。

当只在一个离散点集上已知像差函数时，例如在一个数字化的干涉图中，计算像差系数的积分简化为求和，这样得到的系数可能是错误的，因为在整个圆形区域上正交的泽尼克多项式 $Z_j(x, y)$ 在像差数据集的离散点上不正交。误差的大小随采样点的数量增加而减少。这并不算很严重的问题，因为采用相移干涉测量法测量波前误差时，采样点的数量将非常巨大。然而，当光瞳既不是圆形也不是环形时，即使点的数量巨大，相应的泽尼克多项式在整个数据集上也不正交。这种情况是真实且常见的。例如，对于一个轴向点目标，圆形光瞳系统会针对离轴点目标产生一个近似椭圆形的光瞳。由于渐晕的作用，光瞳甚至会呈现出不规则形状。因此，对于圆形、环形或非圆形、环形区域中的点阵，系统光线追迹或测试时可能会产生一个波前误差数据。类似的，对于一个分块反射镜，被检分块可能为六边形，就像凯克（Keck）望远镜中的一样。当测量这类系统的时候，测量一个点阵的波前误差数据，假设点间隔实际上是均匀的或通过插值法使其均匀。对于插值法，可以参考文献（Korn and Korn，1968）。但我们总是想知道像差在多大程度上为离焦误差、球差或像散等。首先计算多项式展开项的系数，多项式在数据集上正交并通过革兰-施密特正交化处理得到，然后计算像差函数的泽尼克系数，而不考虑光瞳的形状如何（Wang and Silva，1980；Malacara et al.，1990；Swantner and Chow，1994；Upton and Ellerbroek，2004；Mahajan and Dai，2006）。通过一个考虑了六边形光瞳的数值例勾勒出了该处理过程的一个轮廓（Mahajan and Dai，2006；Dai and Mahajan，2007）。因为针对这类光瞳的正交多项式的分析结果已经存在，因此可以很容易将数值化结果与相应的分析结果进行比较，以判断一个软件程序的正确性。

应该注意的是，为了考虑波前的泽尼克像差系数，波前必须相对平滑。考虑光瞳局部区域的泽尼克系数是没有意义的，例如针对反射镜很小的一块凸起进行分析。原则上，在这类情况下也可以计算泽尼克系数，但需要使用大量的多项式来表示这样的波前。然而，这些系数没有太多的物理意义。针对这些情况建议用高斯函数（Montoya-Hernández et al.，1999）。很明显，对于分块反射镜，各分块必须定相（Chanan and Ohara，1998；Chanan and Troy，1998），将这些分块的子波前进行拼接以得到反射镜的总波前（Thunen and Kwon，1982；Jenson，Chow and Lawerence，1984；Fleig，Dumas，Murphy and Forbes，2003），然后就可以确定该反射镜的泽尼克系数。

13.5.2 正交系数和像差变量

令 N 为测量波前误差 $W_n = W(x_n, y_n)$ 所使用点的数量，$n=1$，2，3…N，通过干涉图可以获得。像差方差由式（13.84）给出

$$\rho_N^2 = \langle W^2 \rangle - \langle W \rangle^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} W_n^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} W_n\right)^2 \tag{13.84}$$

用 L 个多项式 $F_l(x_n, y_n)$ 表示的像差函数 $W(x_n, y_n)$，$l=1$，2，3…L 来近似表示像差数据，其形式为

$$\hat{W}(x_n, y_n) = \sum_{l=1}^{L} a_l F_l(x_n, y_n) \tag{13.85}$$

式中，a_l 为展开项或像差系数。

实际波前误差和估计的波前误差的均方差由式（13.86）给出

$$E = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(W_n - \hat{W}_n)^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(W_n - \sum_{l=1}^{L} a_l F_{\text{ln}}\right)^2 \tag{13.86}$$

如果系数 a_l 的值如下，则均方差距最小

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_i} = \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{L} a_k F_{kn} - W_n\right)F_{\text{ln}}$$

或者

$$\sum_{k=1}^{L} a_k \sum_{n=1}^{N} F_{kn} F_{\text{ln}} = \sum_{n=1}^{N} W_n F_{\text{ln}} \tag{13.87}$$

如果多项式 F_l 在整个数据集上正交，即如果

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F_{kn} F_{\text{ln}} = \delta_{kl} \tag{13.88}$$

则式（13.87）生成系数

$$a_l = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} W_n F_{\text{ln}} \tag{13.89}$$

注意正交系数 a_l 的值与估算像差数据时所采用的项数 L 无关。

用像差系数表示像差方差可以利用均值 $\langle \hat{W} \rangle$ 和均方值 $\langle \hat{W}^2 \rangle$ 得到

$$\begin{aligned}\langle \hat{W} \rangle &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{L} a_l F_{\text{ln}} \\ &= \sum_{l=1}^{L} a_l \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F_{\text{ln}} \\ &= a_l\end{aligned} \tag{13.90}$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{W}^2 \rangle &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{L} a_k F_{kn}\sum_{l=1}^{L} a_l F_{\text{ln}} \\ &= \sum_{k=1}^{L} a_k \sum_{l=1}^{L} a_l \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F_{kn} F_{\text{ln}} \\ &= \sum_{l=1}^{L} a_l^2\end{aligned} \tag{13.91}$$

和

$$\hat{\sigma}^2 = \langle \hat{W}^2 \rangle - \langle \hat{W} \rangle^2 = \sum_{l=2}^{L} a_l^2 \tag{13.92}$$

为了得到式（13.90），针对常见情况 $F_l = 1$，采用了正交公式（13.88）。所以，估计像差的方差简化为像差系数 a_l 的平方和，不含表示像差均值的 a_1。式（13.85）各个项的系数，除 $l = 1$ 外，都表示其标准差。增加或者减少一个或者多个正交项不影响系数 a_l。多项式项数 L 又取决于估计方差 $\hat{\sigma}^2$ 与真实方差 $\hat{\sigma}_N^2$ 之间差值的公差。例如，在 $\lambda/30$ 范围内，希望 $\hat{\sigma} = \sigma_N$。

13.5.3　正交多项式

正交多项式 $F_l(x_n, y_n)$ 可以利用泽尼克多项式 $Z_f(x_n, y_n)$ 通过革兰-施密特正交化处理得到（Korn and Korn，1968）

$$G_1 = Z_1 = 1 \tag{13.93a}$$

$$G_{l+1} = \sum_{k=1}^{l} c_{l+1,k} F_k + Z_{l+1}, l = 1, 2, \cdots L - 1 \tag{13.93b}$$

$$F_{l+1} = \frac{G_{l+1}}{\| G_{l+1} \|} = \frac{G_{l+1}}{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} G_{l+1,n}^2 \right)^{1/2}} \tag{13.93c}$$

其中

$$c_{l+1,k} = -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_{l+1,n} F_{kn} \tag{13.93d}$$

所以，F 多项式可以按如下方式递归得到

$$G_1 = Z_1 = 1 \tag{13.94a}$$

$$G_2 = c_{21} F_1 + Z_2 = c_{21} Z_1 + Z_2 \tag{13.94b}$$

$$G_3 = c_{31} F_1 + c_{32} F_2 + Z_3 = \left(c_{31} + \frac{c_{32} c_{21}}{\| G_2 \|} \right) Z_1 + \frac{c_{32}}{\| G_2 \|} Z_2 + Z_3 \tag{13.94c}$$

$$\begin{aligned} G_4 &= c_{41} F_1 + c_{42} F_2 + c_{43} F_3 + Z_4 \\ &= \left[c_{41} + \frac{c_{42} c_{21}}{\| G_2 \|} + \frac{c_{43}}{\| G_3 \|} \left(c_{31} + \frac{c_{32} c_{21}}{\| G_2 \|} \right) \right] Z_1 \\ &\quad + \frac{1}{\| G_2 \|} \left(c_{42} + \frac{c_{43} c_{32}}{\| G_3 \|} \right) Z_2 + \frac{c_{43}}{\| G_3 \|} Z_3 + Z_4 \end{aligned} \tag{13.94d}$$

G 多项式的通用表达式可以写成

$$G_l = \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=1}^{l-i} c_{l,l-j} M_{l-j,i} Z_i + Z_l \tag{13.95a}$$

其中，

$$M_{li} = \frac{1}{\| G_1 \|} \sum_{j=1}^{l-i} c_{l,l-j} M_{l-j,i} \tag{13.95b}$$

因此，每个 G 或 F 多项式都是泽尼克多项式的线性组合。正交 F 多项式表示 L 维空间的单位矢量，用于表达像差数据的。它们可以写成如下的矩阵式

$$F_l(x_n, y_n) = \sum_{i=1}^{l} M_{li} Z_i(x_n, y_n) M_{li} = \frac{1}{\| G_l \|} \tag{13.96}$$

M 矩阵的对角线元素简化等于 G 多项式的归一化常数时，矩阵对角线之上没有元素。矩阵为三角形并且缺失的元素值为零。正交多项式可以采用矩阵方法以非递归方式得到（Dai and Mahajan，2007）。

13.5.4 泽尼克系数

将式（13.96）代入式（13.85），得到

$$\begin{aligned}\hat{W}(x_n,y_n) &= \sum_{l=1}^{L} a_l \sum_{i=1}^{l} M_{li} Z_i(x_n,y_n) \\ &= \sum_{l=1}^{L} \sum_{i=1}^{l} a_i M_{li} Z_i(x_n,y_n)\end{aligned} \tag{13.97}$$

将像差函数用泽尼克多项式表示，写成

$$\hat{W}(x_n,y_n) = \sum_{i=1}^{l} b_i Z_i(x_n,y_n) \tag{13.98}$$

与式（13.97）比较得到泽尼克系数

$$b_i = \sum_{i=l}^{L} a_i M_{il} \tag{13.99}$$

由于泽尼克多项式在数据组上不正交，所以像差系数 b_l 彼此相关，多项式的均值不为零，b_l 不等于 $W(x_n, y_n)$ 的均值 a_1，像差方差不能通过求像差系数 $b_l(l=1, 2, \cdots L)$ 的平方和得到，系数值随像差项数 L 的变化而变化。所以，当像差函数增加或者减少一个或多个像差项时，系数 b_l 就改变了。

在实际中，F 多项式是未知的。在光学设计中，通过光线追迹或在光学检验中进行测量可以得到在任意形状的光瞳内一个点阵的波前误差，而且可以通过最小二乘法确定与这些误差相匹配的泽尼克系数。确定这些系数的过程如下。

1）根据实际光瞳的形状接近于圆形或环形而分别采用泽尼克圆多项式或环多项式并反复地利用式（13.93）~式（13.95）得到 F 多项式和 M 矩阵。这一步仅需要数据点的位置。F 多项式在该数据集上正交并随这些数据集的变化而变化。

2）将 F 多项式和波前误差数据代入式（13.89）得到像差系数 a_l。

3）最后，泽尼克系数 b_l 由式（13.99）得到。

F(或 G) 多项式和泽尼克多项的项数 L 一直增加直到最小二乘误差低于一个预定值。很明显当光瞳接近为一个圆形（或者环形）时，误差点的数量将十分巨大，F 多项式近似于正交泽尼克圆（或环）多项式，矩阵 M 近似一个单位矩阵（即矩阵对角线上的元素为 1，其余元素为 0），并且展开系数 $a_l \longrightarrow b_l$。

13.5.5 数字化举例

针对一个数字化例子，考虑一个六边形光瞳，这是因为正交多项式和 M 矩阵的解析表达式是有用的（Mahajan and Dai，2006；Dai and Mahajan，2007）。所以，数字结果可以与相应的分析结果相比较。首先考虑分析结果。前 11 个在整个六边形光瞳上是正交的，如表 13.12 所示。根据式（13.96），将泽尼克圆多项式与表 13.13 中所列的 M 矩阵相乘就可以得到这些多项式。

表13.12　笛卡儿坐标系和极坐标系下的正交六边形多项式

($(x, y)=\rho(\cos\theta, \sin\theta)$，$(x, y)$ 和 ρ 均在六边形内)

j	$H_j(\rho,\theta)=H_j(x,y)$
1	1
2	$2\sqrt{6/5}\rho\cos\theta=2\sqrt{6/5}x$
3	$2\sqrt{6/5}\rho\sin\theta=2\sqrt{6/5}y$
4	$\sqrt{5/43}(12\rho^2-5)$
5	$2\sqrt{15/7}\rho^2\sin2\theta=4\sqrt{15/7}xy$
6	$2\sqrt{15/7}\rho^2\cos2\theta=2\sqrt{15/7}(x^2-y^2)$
7	$24\sqrt{42/3685}(25\rho^3-14\rho)\sin\theta=24\sqrt{42/3685}y(25\rho^2-14)$
8	$24\sqrt{42/3685}(25\rho^3-14\rho)\cos\theta=24\sqrt{42/3685}x(25\rho^2-14)$
9	$(4/3)\sqrt{10}\rho^3\sin3\theta=(4/3)\sqrt{10}y(3x^2-y^2)$
10	$4\sqrt{70/103}\rho^3\cos3\theta=4\sqrt{70/103}x(x^2-3y^2)$
11	$(3/\sqrt{1072205})(6020\rho^4-5140\rho^2+737)$

表13.13　由正交的六边形系数 a_l 计算泽尼克系数 b_l 的分析矩阵 M

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$\sqrt{6/5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$\sqrt{6/5}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sqrt{5/43}$	0	0	$2\sqrt{15/43}$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	$\sqrt{10/7}$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$\sqrt{10/7}$	0	0	0	0	0
0	0	$16\sqrt{\frac{14}{11055}}$	0	0	0	$10\sqrt{\frac{35}{2211}}$	0	0	0	0
0	$16\sqrt{\frac{14}{11055}}$	0	0	0	0	0	$10\sqrt{\frac{35}{2211}}$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{2}{3}\sqrt{5}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$2\sqrt{\frac{35}{103}}$	0
$\frac{521}{\sqrt{1072205}}$	0	0	$88\sqrt{\frac{15}{214441}}$	0	0	0	0	0	0	$14\sqrt{\frac{43}{4987}}$

由于121项矩阵元素中只有16项为0，得到用正交系数 a_l 表示的泽尼克系数 b_l 简化表达式

$$b_1=a_1M_{11}+a_4M_{41}+a_{11}M_{11,1} \tag{13.100a}$$
$$=a_1+\sqrt{5/43}a_4+(521/\sqrt{1072205})a_{11}$$

$$b_2=a_2M_{22}+a_8M_{82} \tag{13.100b}$$
$$=\sqrt{6/5}a_2+(16/\sqrt{14/11055})a_8$$

$$b_3 = a_3M_{33} + a_7M_{73} = \sqrt{6/5}a_3 + (16/\sqrt{14/11055})a_7 \tag{13.100c}$$

$$b_4 = a_4M_{44} + a_{11}M_{11,4} = 2\sqrt{15/43}a_4 + (88/\sqrt{15/214441})a_{11} \tag{13.100d}$$

$$b_l = a_lM_{ll}, l = 5,6,\cdots 11 \tag{13.100e}$$

所以，例如，$b_{11} = a_{11}M_{11,11} = 14\sqrt{43/4987}a_{11} = 1.3a_{11}$。

正交系数 a_l 可由式（13.99）反向推得

$$a_l = \sum_{l=i}^{L} b_lM_{il}^{-1} \tag{13.101}$$

式中，M_{il}^{-1}为表 13.14 给出的逆矩阵。所以，正交系数为

$$a_1 = b_1M_{11} + b_4M_{41}^{-1} + b_{11}M_{11,1}^{-1} = b_1 - (1/2\sqrt{3})b_4 - (1/2\sqrt{5})b_{11} \tag{13.102a}$$

$$a_2 = b_2M_{22}^{-1} + b_8M_{82}^{-1} = \sqrt{5/6}b_2 - (8/5\sqrt{15})b_8 \tag{13.102b}$$

$$a_3 = b_3M_{33}^{-1} + b_7M_{73}^{-1} = \sqrt{5/6}b_3 - (8/5\sqrt{15})b_7 \tag{13.102c}$$

$$a_4 = b_4M_{44}^{-1} + b_{11}M_{11,4}^{-1} = (1/2)\sqrt{43/15}b_4 - (22/7\sqrt{43})b_{11} \tag{13.102d}$$

$$a_l = b_lM_{11}^{-1}, l = 5,6,\cdots 11 \tag{13.102e}$$

表 13.14 由泽尼克系数 b_l 计算正交的六边形系数 a_l 的分析矩阵 M_{il}^{-1}

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$\sqrt{5/6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$\sqrt{5/6}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$-1/2\sqrt{3}$	0	0	$\sqrt{43/15/2}$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	$\sqrt{7/10}$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$\sqrt{7/10}$	0	0	0	0	0
0	0	$-8/5\sqrt{15}$	0	0	0	$\sqrt{\frac{2211}{35}}/10$	0	0	0	0
0	$-8/5\sqrt{15}$	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{2211}{35}}/10$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$3/2\sqrt{5}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{103}{35}}/2$	0
$-1/2\sqrt{5}$	0	0	$-22/7\sqrt{43}$	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{4987}{43}}/14$

当像差函数展开到前 11 项时，式（13.100e）和式（13.102e）保持不变。然而，如果多项式展开到前 15 项，则 b_5 取决于 a_{13}和 a_{15}（Dai and Mahajan，2007）。

从式（13.51）可以明显地看出，正交六边形系数 a_l 与像差函数展开项的数量 L 无关。a_1表示均值，系数 $a_l(l>1)$ 的平方和表示像差方差。对于泽尼克系数 b_l 就无效了，因为泽尼克圆多项式在整个六边形光瞳上并不正交。所以，系数的值随多项式数量变化而变化，泽尼克多项式的均值不为零，b_l不表示像差的均值，像差方差也不等于系数 $b_l(l>1)$ 的平方和。所以，这些系数并不像正交系数 a_l 一样有用。

现在概述一下模拟一个数例的过程。令一个像差函数表示干涉图，该函数包含一些系数为 b_l 的像差项。通过式（13.102）计算出相应的正交系数 a_l。像差的均值由 a_1给出，方差等于

$$\sigma_{\infty}^2 = \sum_{l=2} a_l^2 \tag{13.103}$$

下标∞表示有无穷多个点，方差通过分析得出。实际上，计算过程显然与上述相反。给定 N 个点的像差数据时，就可以计算出在这些数据上正交的多项式 F_l、估计的矩阵 $\hat{M}$ 和正交系数 $\hat{a}_l$以及泽尼克系数 b_l。

给定模拟像差函数后，可以计算出在一个单位六边形内分布均匀的 N 个点阵列上的像差值 W_n。像差的标准差 σ_N 由式（13.84）计算得到。这些值随 N 的增加而趋近于 σ_{∞}。正交于所选点阵的多项式 F_l 由式（13.93）和式（13.94）确定。假设利用 11 个 F 多项式近似表示像差数据，则 $L=11$，我们就能计算出点阵上每个多项式的值，并且可以与表 13.12 给出的 F 多项式解析式进行比较。

计算正交 F 多项式过程中的计算数据也能产生 M 矩阵的元素。例如，由于 $F_l = G_l/\|G_l\|$，利用式（13.94c）有

$$M_{31} = \frac{1}{\|G_3\|}\left(c_{31} + \frac{c_{32}c_{21}}{\|G_2\|}\right) \quad M_{32} = \frac{c_{32}}{\|G_3\|\,\|G_2\|} \quad M_{33} = \frac{1}{\|G_3\|} \tag{13.104}$$

当然，当 $l=4, 5, \cdots 11$ 时 $M_{3l}=0$。因为光瞳是六边形对称的，c_{21}和 c_{31}同样等于 0（Mahajan and Dai，2006）。所以，甚至 M_{31}和 M_{32}也为 0。这样就得到整个 $\hat{M}$ 矩阵，然后可以与表 13.13 中给出的相应解析矩阵进行对比。

将矩阵元素和正交系数代入式（13.99），可以得到 11 个估计的泽尼克系数 b_l 并且可以与模拟干涉图时所采用的系数 b_l 进行比较。将像差值 W_n 和多项式 F_l 代入式（13.89），可以计算出估计的正交系数 $\hat{a}_l$。将得到的 11 个系数代入式（13.92）中就可以得到估计的标准差 $\hat{\sigma}_N$，并将之与真实值 σ_N进行比较。

如果为了更准确的估算，数据点的数量增加而不改变多项式的数量 L，则矩阵元素的值仅改变一点点。它们就更为接近解析值。相应的，计算出的正交多项式就更匹配相应的解析结果，同时正交系数和泽尼克系数的精确性也大大增加了。如果增大多项式项数以便实现更好的数据拟合，即项数从 L_1 增大到 L_2，则 L_1 的矩阵元素为 L_2 的矩阵元素的子集，也就是说，对于给定点阵的矩阵元素不会随着 L 增大时添加新元素而发生变化。

13.6　总结

本章以讨论幂级数展开作为开始，然后介绍了初阶或赛德差、二阶或施瓦兹希尔德像差。分别讨论了在整个圆形或者环形光瞳上正交的表示具有最小方差的平衡像差的泽尼克圆多项式和环多项式。这些多项式用极坐标和笛卡儿坐标表，具有正交形式，所以当一个像差

函数展开成这些多项式表示的形式时，每个展开项系数表示在整个光瞳上估计出的相应像差项的标准差。相应的，像差函数的方差等于像差系数的平方和，但不包含平移系数。足以表达像差函数所需的项数一直增加直到得到的方差等于预选公差范围内的实际方差。利用式(13.21)、式（13.51）和式（13.82）积分确定的像差系数值与项数无关。类似地，像差系数彼此间也没有关系。赛德尔像差与泽尼克像差彼此间的转换关系公式也在此给出。需要强调的是，只有忽略了高阶泽尼克项时，赛德尔系数才能从初阶泽尼克像差中得到。

当只在一些离散点阵处已知像差函数，实际中经常出现这种情况，例如光学设计中的光线追迹或者在光学检验中进行测量会遇到这种情况，积分计算简化为求和。这个和值随点数量的增加而接近积分结果。然而，泽尼克多项式在这样的数据集上并不正交，所以，这些系数彼此相关或者与展开式的项数有关。类似的，不管点数量如何，当光瞳既不是圆形也不是环形时，泽尼克多项式就不正交。针对这个情况，我们给出了一个程序通过最小二乘法来计算匹配这些数据值的泽尼克系数。在该程序中，首先通过革兰 - 施密特正交化处理计算出在该数据集上正交的多项式，然后根据这些正交多项式的系数确定展开式的泽尼克系数。这些系数彼此相关，其值随像差项数量的变化而变化。还有，像差方差并不等于像差系数的平方和。用一个六边形光瞳的数例来证明了这个概念。由于对于这样的光瞳，其分析结果是可以得到的，所以它也可以用来验证使用者编写的软件。

参考文献

Bhatia A. B. and E. Wolf, "On the Circle Polynomials of Zernike and Related Orthogonal Sets," *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **50**, 40–48 (1954).

Born M. and E. Wolf, *Principles of Optics*, 7th ed., Oxford, New York, 1999.

Braat, J."Polynomial Expansion of Severely Aberrated Wave Fronts," *J. Opt. Soc. Am.* **A4**, 643–650 (1987).

Chanan, G. M. Troy, F. Dekenes, S. Michaels, J. Nelson, T. Mast, and D. Kirkman, "Phasing the Mirror Segments of the Keck Telescopes: the Broadband Phasing Algorithm," *Appl. Opt.* **37**, 140–155 (1998).

Chanan, G. C. Ohara, M. Troy, F. Dekenes, S. Michaels, J. Nelson, T. Mast, and D. Kirkman, "Phasing the Mirror Segments of the Keck Telescopes II: the Narrow-band Phasing Algorithm," *Appl. Opt.*, **39**, 4706–4714 (1998).

Conforti, G. "Zernike Aberration Coefficients From Seidel and Higher-order Power-series Coefficients," *Opt. Lett.*, **8**, 407–408 (1983).

Dai G. -m. and V. N. Mahajan, "Nonrecursive Determination of Orthonormal Polynomials with Matrix Formulation," *Opt. Lett.* **32**, 74–76 (2007).

Fleig, J. P. Dumas, P. Murphy, and G. W. Forbes, "An Automated Subaperture Stitching Interferometer Workstation for Spherical and Aspherical Surfaces," *SPIE Proc.*, **5188**, 296–307 (2003).

Jenson, S. C. W. W. Chow, and G. N. Lawrence, "Subaperture Testing Approaches: a Comparison," *Appl. Opt.*, **23**, 740–745 (1984).

Korn G. A. and T. M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York, 1968.

Mahajan, V. N. "Strehl Ratio for Primary Aberrations: Some Analytical Results for Circular and Annular Pupils," *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 1258–1266 (1982), Errata, **10**, 2092 (1993); "Strehl Ratio for Primary Aberrations in Terms of Their Aberration Variance," *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 860–861 (1983).

Mahajan, V. N."Zernike Annular Polynomials for Imaging Systems with Annular Pupils," *J. Opt. Soc. Am.* **71**, 75–85 (1981a); **71**, 1408 (1981b); **1**, 685 (1984); "Zernike Annular

Polynomials and Optical Aberrations of Systems With Annular Pupils," *Appl. Opt.* **33**, 8125–8127 (1994).

Mahajan, V. N. *Optical Imaging and Aberrations*, Part I: *Ray Geometrical Optics*, SPIE Press, Bellingham, Washington, second printing 2001.

Mahajan, V. N. "Zernike Polynomials and Aberration Balancing," *SPIE Proc.* **5173**, 1–17 (2003).

Mahajan, V. N. *Optical Imaging and Aberrations*, Part II: *Wave Diffraction Optics*, SPIE Press, Bellingham, Washington, Second Printing 2004.

Mahajan V. N. and Dai, G.-m. "Orthonormal Polynomials for Hexagonal Pupils," *Opt. Lett.* **31**, 2462–2464 (2006).

Mahajan V. N. and Swantner W. H., "Seidel Coefficients in Optical Testing," *Asian J. Phys.* **15**, 203–209 (2006).

Malacara, D. J. M. Carpio-Valdéz, and J. Javier Sánchez-Mondragón, "Wavefront Fitting With Discrete Orthogonal Polynomials in a Unit Radius Circle," *Opt. Eng.*, **29**, 672–675 (1990).

Malacara D. and Z. Malacara, *Handbook of Lens Design*, Dekkar, New York, 1994.

Montoya-Hernández, M. M. Servín, D. Malacara-Hernández, and G. Paez, "Wavefront Fitting Using Gaussian Functions," *Opt. Comm.* **163**, 259–269 (1999).

Mouroulis P. and J. Macdonald, *Geometrical Optics and Optical Design*, Oxford, New York, 1997.

Nijboer, B. R. A. "The Diffraction Theory of Optical Aberrations. Part I: General Discussion of the Geometrical Aberrations," *Physica*, **10**, 679–692 (1943); "The Diffraction Theory of Optical Aberrations. Part II: Diffraction Pattern in the Presence of Small Aberrations," *Physica*, **13**, 605–620 (1947); and Nienhuis K. and B. R. A. Nijboer, "The Diffraction Theory of Optical Aberrations. Part III: General Formulae for Small Aberrations: Experimental Verification of the Theoretical Results," *Physica*, **14**, 590–608 (1949).

Noll, R. J. "Zernike Polynomials and Atmospheric Turbulence," *J. Opt. Soc. Am.* **66**, 207–211 (1976).

Prata A. and W. V. T. Rusch, "Algorithm for Computation of Zernike Polynomials Expansion Coefficients," *Appl. Opt.* **28**, 749–753 (1989).

Swantner W. and W. W. Chow, "Gram-Schmidt orthonormalization of Zernike polynomials for general aperture shape," *Appl. Opt.* **33**, 1832–1837 (1994).

Tyson, R. K. "Conversion of Zernike aberration coefficients to Seidel and Higher-order Powerseries Aberration Coefficients," *Opt. Lett.*, **7**, 262–264 (1982).

Thunen J. and Kwon O., "Full Aperture Testing With Subaperture Test Optics," *Proc. SPIE*, **351**, 19–27 (1982).

Upton R. and B. Ellerbroek "Gram-Schmidt orthogonalization of the Zernike polynomials on apertures of arbitrary shape," *Opt. Lett.* **29**, 2840–2842 (2004). As pointed out by Mahajan and Dai (2006), the matrix for obtaining the orthonormal hexagonal polynomials from the Zernike circle polynomials has numerical errors.

Wang J. Y. and D. E. Silva, "Wave-front Interpretation With Zernike Polynomials," *Appl. Opt.*, **19**, 1510–1518 (1980).

Welford, W. T. *Aberrations of the Symmetrical Optical System*, Academic Press, New York, 1974.

Wyant J. C. and K. Creath, "Basic Wavefront Aberration Theory for Optical Metrology," *Appl. Opt. Optical Eng.* **XI**, 1–53 (1992).

Zernike, F. "Diffraction Theory of Knife-edge Test and its Improved Form, the Phase Contrast Method," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **94**, 377–384 (1934a); "Beugungstheorie Des Schneidenverfahrens und Seiner Verbesserten Form, der Phasenkontrastmethode," *Physica* **1**, 689–794 (1934b).

第14章　相移干涉测量

霍斯特·斯莱贝尔（Horst Schreihber）和约翰 H. 布朗林（John H. Bruning）

14.1　导言

最近30年来，各类仪器设备的最显著变化就是设备中测量系统的计算机集成。干涉度量学也不例外，其主要表现为相移干涉技术（PSI）的发展。与本书其他章节所探讨的众多技术不同，PSI不是一种具体的光学硬件结构，而是一种可以用在各种测量条件下的数据获取和数据分析的方法。

虽然计算机的使用方便了静态干涉图的分析，但还存在确定条纹中心的困难、数据采样点数和精度之间取舍的问题。由于数据的采样只沿着条纹中心方向，而且大多数分析方法需要规则网格位置上的数值，因此需要用插值算法。这种沿着条纹中心的低频率空间采样方法，同时限制了此方法的横向分辨率。除了一幅静态干涉图，还需要另外一个的信息来确定波前的偏振方向。

当干涉仪的参考相位变化时，PSI自动记录一系列干涉图。波前相位就以光强变化的形式记录在了保存的系列干涉图中。然后可以通过干涉图间简单的点对点计算来复原相位。这样，就不再需要定位条纹的中心，也不会出现与之相关的问题。最早提及PSI技术的文献要追溯到1966年（Carré，1966），此项技术真正的发展是在20世纪70年代初期（Crane，1969；Bruning et al. 1974；Wyant，1975；Johnson and Moore，1977；Hardy et al. 1977；Stump，1979；Bruning，1978；Moore，1973；Massie，et al. 1979）。最早的应用领域有光学检测、自适应光学的实时波前探测及显微镜的检测。随着20世纪80年代光刻技术的出现，PSI在提高精度方面获得了长足发展，并因此出现了对误差源敏感度较低的相关算法理论（Schwider et al.，1983；Creath，1988；Malacara，1990；Larkin and Oreb，1992；Schwider et al.，1993）。20世纪90年代，对PSI方法的更精密的要求产生了多种理论，这些理论针对如何给出特定PSI的算法，以适合不同的应用需求（Surrel 1993，1996，1997，1998；Phillon 1997；Hibino et al.，1995，1997，1998，2004；Malacara-Doblado et al. 2000，2001；Zhu and Gemma，2001；）。

数年以来，这种综合技术被冠以多个名称，包括相位测量干涉技术、条纹扫描干涉技术、实时干涉测量技术、AC干涉技术及外差干涉技术。以上所有都以同样的基本技术为基础。在本章，我们将回顾PSI的基本原理，介绍几种曾经用过的算法，探讨重复性问题及误差来源，考察交互使用情况，并展望这项技术的未来发展趋势。

14.2　基本原理

回顾一下，隐含在相移干涉测量技术中的原理是相对简单的，那就是将随时间改变

的相位变化引入干涉仪的参考波前和采样波前（或者被测波前）之间。于是在干涉图的每个测量点上，都会产生一个时变信号，该信号相当于是对测量点位置两种波前相位差进行编码。

为了简单起见，在我们的探讨中，将直接使用波前相位进行分析。这种方法的好处是使分析与特定的硬件条件无关，以便从相位到表面误差或光程差（*OPD*）的转换直观明了。例如，检测一块表面高度误差为 $h(x, y)$ 的反射面将产生一个波前误差 $\phi(x, y)$

$$\phi(x,y) = 4\pi h(x,y)/\lambda \tag{14.1}$$

式中，x 和 y 是空间坐标；λ 为波长。

式（14.1）用于光束正入射，其他情况下还要加入倾斜因子。

通常，干涉仪中参考波前和被测波前的关系式为

$$W_r(x,y,t) = a_r(x,y)e^{i[\phi_r(x,y-\delta(t))]} \tag{14.2}$$

以及

$$W_t(x,y) = a_t(x,y)e_t^{i\phi(x,y)} \tag{14.3}$$

式中，$a_r(x, y)$ 和 $a_t(x, y)$ 是波前振幅，$\phi_r(x, y)$ 和 $\phi_t(x, y)$ 是波前相位，$\delta(t)$ 是加入到参考光束中的一个随时间变化的相移量。更准确地说，$\delta(t)$ 是两束光之间的相对相移；它能够通过参考光或者被测光物理状态的变化而改变。改变后的光强分布为

$$I(x,y,t) = |w_r(x,y,t) + w_r(x,y)^2| \tag{14.4}$$

或者

$$I(x,y,t) = I'(x,y) + I''(x,y)\cos[\phi_t(x,y) - \phi_r(x,y) + \delta(t)] \tag{14.5}$$

式中，$I'(x,y) = a_r^2(x,y) + a_t^2(x,y)$，为平均光强；$I''(x,y) = 2a_r(x,y), a_r(x,y)$，为条纹或光强的调制。如果把 $\phi(x, y)$ 定义为波前相位差，即 $\phi(x,y) = \phi_t(x,y) - \phi_r(x,y)$，可以得到

$$I(x,y,t) = I'(x,y) + I''(x,y)\cos[\phi(x,y) + \delta(t)] \tag{14.6}$$

这就是 PSI 的基本公式。每个测量点的光强变化随着相移量 $\delta(t)$ 作正弦变化，而该相移量是一个具有由未知波前相位带来的时间偏移量。

这个推导结果可以通过将该光强视为 $\delta(t)$ 的函数而观察到；对线性相移而言，相当于光强随时间变化。任一单独测量点干涉图的光强都随相位（或时间）发生正弦变化，如图14.1所示；而更重要的是，式（14.6）中的三个未知量可以很容易地利用这个信号识别出来。常数项 $I'(x, y)$ 是光强的偏移量，$I''(x, y)$ 是调制光强峰谷值的一半，未知相位 $\phi(x, y)$ 与该正弦变化的时间相移相关。此处的波前相位可以轻易地根据这个时间延迟计算出来。未知波前相位 $\phi(x, y)$ 的整个分布图可通过监测和比较干涉图中，所有需要检测的点的时间延迟来测出。在这种方式中，光强调制和偏移项这两部分就可以与这个延迟分离开来，并且被测波前相位也从这些项中分解出来。

如果在相位移动变化中观察干涉图，可以看到条纹将穿越整个视场。这个现象完全类似于观察牛顿环时通过推动测试板来确定高点或低点时的条纹移动现象。重要的是要注意到：该条纹移动是干涉图中相同时间频率、不同相位的每一测量点处出现的正弦光强变化的反映。PSI 不用这种条纹的移动来计算波前，不寻找和跟踪条纹中心，而是根据每个测量点的光强变化来进行计算。

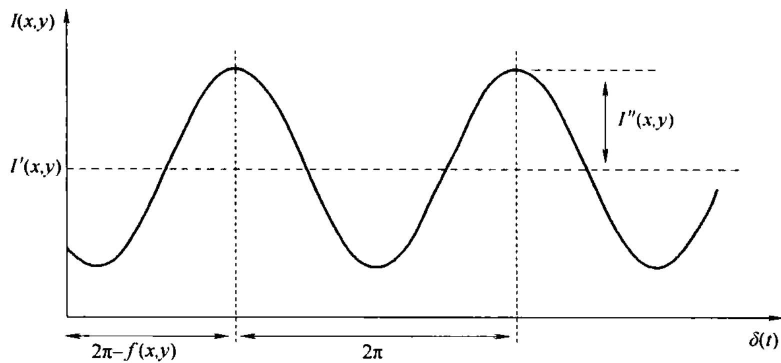


图 14.1 任一单独测量点干涉图光强随相位的变化

14.3 PSI 的优势

通常，干涉图的分析都是通过计算条纹的竖直程度或判断条纹的中心，并沿着每条条纹方向赋值一个固定的面形高度。相邻的条纹代表半个波长的高度变化。找出条纹上所有的中心点是该项技术的固有局限，并且限制了与结果相关的数据处理量。通过眼睛观察，条纹中心的定位精度在条纹间隙的 1/10 或 1/20 之间。要精确定位条纹光强图形的最大、最小值很困难。如果采用电子照相机或扫描仪生成数字干涉图，理想情况下定位精度可以提高到大约 1/50 波长。在常规干涉仪中，观测到的条纹信息包含了以下几部分误差：被检测件、参考表面及干涉仪的光学误差。其中的任何一种误差都可能小于干涉仪系统的固有分辨率。除此之外，条纹中心的确切定位会受到整个干涉图上光强变化、探测器空间灵敏度变化及其固有图形噪声的影响。最佳测量精度只能在有几条宽间隔条纹的干涉图上获得。但是由于数据的采集仅仅沿着条纹中心，大间隔的数据采样点只能在非常有限的信息内得到。采样点数量可以通过给干涉图形加入更多倾斜条纹，但这样会降低条纹中心的重复性精度。测量精度和采样点数量之间的取舍是非常复杂的，因为数据分析程序需要输入数据在规则网格点上被采样，而不是沿着跨过被测件的几条曲线来采样。于是需要一个插值程序将条纹中心数据转换为常用网格上的波前图形。

分析静态干涉图时需要进一步了解的细节是：判断被测件的局部凹凸特性。它是凹的还是凸的？这个判断需要另外一些信息：例如，推动参考面时条纹的移动是什么方向。采用 PSI，参考波前和测试波前之间的相位在数据采集时，是以已知的方式和方向进行变化的，而且局部凹凸特性能被自动而清楚地确定。一种考虑的方法是，数据采集时 PSI 需要有人来“推动”参考镜。使用自动定位条纹中心的程序有时要求干涉图上含有非闭合的条纹。这一点通常是通过在测试系统中加入倾斜量来完成的，而且这也是不可或缺的，因此该程序才能在被测表面上由高点到低点的顺序对条纹定级。

由于针对 PSI 需要做的分析不再依赖寻找条纹的中心或边界，任何更符合实际情况的条纹图形都能使用，甚至无条纹的图形（整个视场被一条很宽的条纹覆盖）或者含有一系列完全连续的闭合条纹的干涉图形也能被正确分析。就像后面将要看到的，视场中的条纹数量减得越少，可获得的测量精度就越高。同样的原因，希望采样和分析的数据点尽量在网格点上。最普通的网格点就是固体传感器靶面上的规则像素阵列，它们同大多数数据处理程序包

兼容。如果实际需要，也可以采样不规则的网格点。

PSI 的另一个优点是它对光强的空间变化、探测器灵敏度及固有图形噪声都不敏感。这可以通过修改等式（14.6）从而包含这些影响来见证。固定图形噪声是包含在与入射光强无关的偏置信号中的一种空间变化。探测器灵敏度和固定图形噪声分别用 $s(x, y)$ 和 $n(x, y)$ 来表示。空间光强的变化已经包含在随（x, y）变化的项 $I'(x, y)$ 和 $I''(x, y)$ 中。探测器 $v(x, y)$ 最终输出结果如下

$$v(x,y,t)=s(x,y)\{I'(x,y)+I''(x,y)\cos[\phi(x,y)+\delta(t)]\}+n(x,y) \tag{14.7}$$

也可以很容易地写为

$$v(x,y,t)=[s(x,y)I'(x,y)+n(x,y)]+[s(x,y)I''(x,y)]\cos[\phi(x,y)+\delta(t)] \tag{14.8}$$

这些附加项已经改变了每个测量点上记录的光强偏置量和光强调制量，但是对测量的时间延迟几乎没有影响。由于这个未知波前相位在这个延迟中被完全编码，即使有这些空间变化项的影响，干涉仪的测量精度也不会降低。

上面两句表述没有说成是“无影响”的唯一原因是信号－噪声的关系可能改变测量的重复性。假如空间变化很大或输出的信号调制相对小于偏置量，这些影响就特别重要。由于这些探测器的空间变化相对于式（14.6）中表现为光强偏置和调制的项是不确定项，所以在后面章节中讨论算法和考虑噪声的过程中将包括这些隐含在 $I'(x, y)$ 和 $I''(x, y)$ 的项。时变噪声源，例如探测器暗电流和光子噪声，也必须包括在内。关于信号－噪声的内容将在 14.9 节中大篇幅讨论。

不要惊讶于发现 PSI 的重复性和精度要远远优于静态干涉图分析的结果，这是因为可以长时间地采集大量的数据，通过平均持续记录的干涉图也可获得一些优势，但这个简单的解释未能给出所有理由。PSI 的数据采集和分析程序根本上不同于分析静态干涉图时使用的程序，并且使 PSI 的重复性得到极大改善。PSI 方法非常类似于使用锁相放大器或者用于电子信号的某些局部振动器外差法探测方案。PSI 的常规重复性是百分之一波长，现千分之一波长值已有报道并且采样，现有的商业设备实现这一点也相当容易。更详细的内容参见 14.9 节。

在式（14.6）和式（14.8）中，我们已经假设与时间相关的唯一项为 $\delta(t)$，相对这个假设的任何偏差都将在对 PSI 的分析中引入误差。未知波前相位 $\phi(x, y)$ 在每个点的测量时间延迟范围内都被编码，而发生在测量时间段内的时间变化将降低 PSI 系统的性能。除了随机噪声之外，一个常见的误差源还有振动和空气湍流。这是与静态干涉仪的重要差别，静态干涉仪可以得到干涉图的快照。另一个可能的误差源是激光光强在时间上的变化，但是因为经过预热的激光在惯常的测量时间内相当稳定，所以这通常不是一个大问题，而且稳定的激光可以用在苛刻的环境中。对于 PSI 独有的第三个误差源是相移 $\delta(t)$ 的误差或变化。函数形态必须是正确的，并且在整个干涉图中该相移应该保持一致。

14.4 相移的方法

目前为止，大多数在 PSI 系统中加入时变相移的普遍方法是，使用压电陶瓷平移干涉仪中的一块反射镜或一个光学表面（Soobitsky，1986；Hayes，1989）。这些器件由铅－锌－钛（PZT）化合物或其他陶瓷材料制成，在外加电压作用下膨胀或收缩。对某些材料结构而言，可能需要高达几百伏特的电压来获得需要的一个波长或更短的移动量。通过离散地改变外加电

压，引入的相移将以步进的形式发生变化。假如电压被设定为连续变化，就可得到理想函数形态的相移。干涉检测得到的结果可以用来标定 PZT 的位移量，这将在 14.9 节中详细介绍。

用于三种常用干涉仪泰曼 - 格林干涉仪（Twyman-Green）、马赫 - 泽德干涉仪（Mach-Zehnder）和菲佐激光干涉仪的相移结构如图 14.2 所示。前两种通过平移干涉仪参考臂中的一块反射镜来获得相移。对于泰曼 - 格林干涉仪的正入射情况，每平移半个波长就产生一个全波长的相移。由于在马赫 - 泽德干涉仪中是非正入射，形成的相移减少是由正入射夹角的余弦因子决定，如图 14.3 所示。因为参考波前是平面波，所以小横向位移被忽略掉。在非佐激光干涉仪中，平移透射参考物镜或被测件来获得相移。参考面为排在最后的未镀膜的物镜表面，并且此面与焦点共中心。对于大 F 数，因为光瞳边缘的光线方向不平行于平移方向，从而导致相移误差或相移的不均匀（Moore and Slaymaker，1980）。

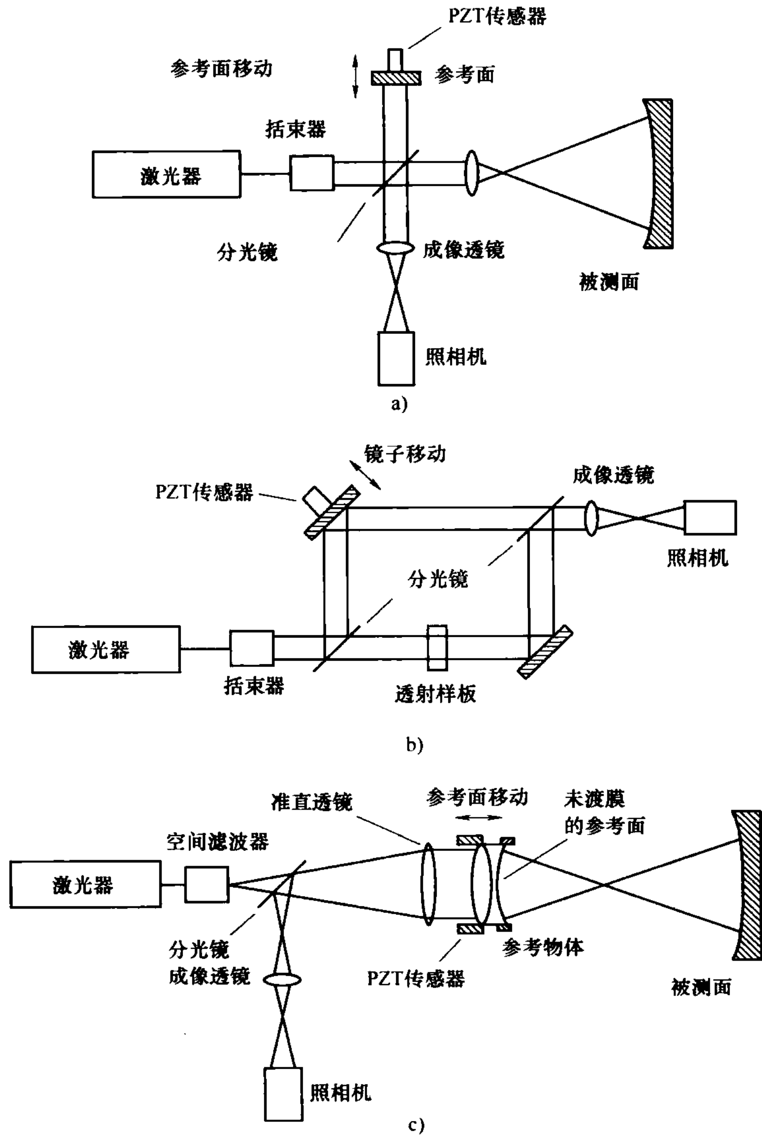


图 14.2 三种常用干涉仪的相移结构

a）泰曼 - 格林干涉仪 b）马赫 - 泽德干涉仪 c）菲佐激光干涉仪

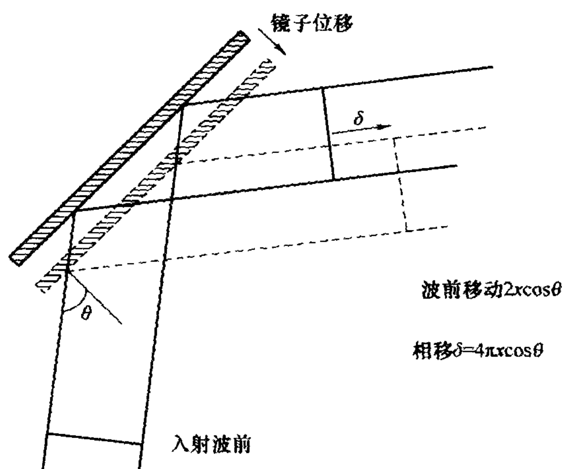


图 14.3　非正入射时由反射镜平移导致的相位

产生阶梯状或连续相移的一种可替代方法是，在干涉仪的参考光中采用一块倾斜的与平面平行的板（Wyant and Shagam，1978）。平板内的光程随着倾斜角的增加而增大。为了避免在参考光中引入像差，这种方法仅仅适用于准直的参考光。

可以通过在参考光和测试光之间引入生成一个光学频率差来形成不同类型的相移。如果这两束光的频率分别是 v 和 $v+\Delta v$，式（14.2）和式（14.3）可以重新写成如下形式，从而表达出对时间的依赖关系

$$w_r(x,y,t)=a_r(x,y)\mathrm{e}^{i[\phi_r(x,y)-2\pi(v+\Delta v)t]} \tag{14.9}$$

$$w_t(x,y,t)=a_t(x,y)\mathrm{e}^{i[\phi_t(x,y)-2\pi vt]} \tag{14.10}$$

没有包含其他的时间相移。类似于式（14.6），形成的干涉图光强图形为

$$I(x,y,t)=I'(x,y)+I''(x,y)\cos[\phi(x,y)+2\pi\Delta vt] \tag{14.11}$$

频率差在测试光和参考光之间产生一个线性相移

$$\delta(t)=2\pi\Delta vt \tag{14.12}$$

而且在给定点上光强随频率差 Δv 以正弦形式变化。和前面一样，波前相位 $\phi(x,\ y)$ 在不同的测量点上是一个信号间的空间变化的延迟。

因为即使一个小的光学频移（作为光学频率的一小部分）都可能导致一个很大差异的频率，这种相移的方法非常适用于需要动态测量的情形。在这种情况下，相移的出现必须快于正在被监测的变化。有两个重要应用是湍流测量和距离的干涉测量。产生频移的两个主要方法是塞曼分光和光栅移动产生的多普勒频移。这类型相移的应用在 14.14.3 和 14.16.1 小节中讨论。

激光的输出频率可通过应用直流磁场，被分为两个正交偏振输出频率（Burgwald and Kruger，1970）。塞曼分光双频激光的频率分离受磁场控制。这个效应在氦氖激光器中发现的数值大约为 1.8～5MHz。

当一个衍射光栅平移过一束光线时，就在众多的衍射光束中引入了一个多普勒频移（Suzuki and Hioki，1967；Stevenson，1970；Bryngdahl，1976）。平移方向垂直于传播方向（参见图 14.4a）。频移量与衍射级次 m 和速度 v 成正比，并且和光栅周期 d 成反比

$$\Delta v=mv/d \tag{14.13}$$

非衍射光束没有频移，衍射方向与平移方向相同的光束看到一个正频移，而在反方向衍

射的光束，其频率就减小。衍射级次之一被选定并且与原来的频率形成干涉就会产生相移干涉仪。

可以使用机械式平移，包括绕其中心旋转幅向光栅，但是仅能获得相对较低的频移。同样的，通过移动反射镜反射光可以产生等于 $2v/\lambda$ 的小频移。采用布拉格声光（AO）单元（Massie and Nelson，1978；Wyant and Shagam，1978；Shagam，1983）能够产生频移量，这个量甚至大于由塞曼分光产生的频移量。由于声音的压迫，穿过该单元的声波将引起折射率产生周期性的变化。单元中还放置了一个可移动的衍射光栅。因为速度除以光波周期等于声音的频率 f，这个声光调制器件的频移为

$$\Delta v = mf \tag{14.14}$$

应用此类器件可以得到极高的相移频率；一些商用仪器具有 20～30MHz 的工作频率。

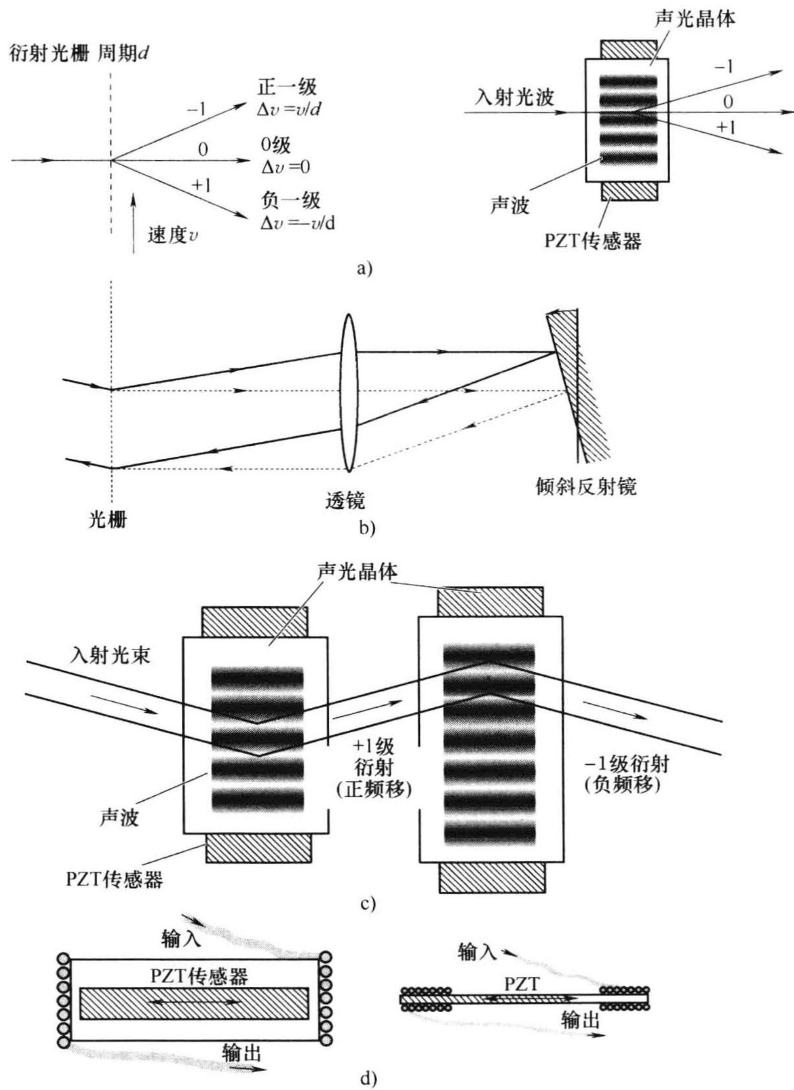


图 14.4 四种不同的现代相移实现方法

a）移动光栅或声光调制器引起的多普勒频移 b）频域光学延迟线

c）基于两个声光调制器的相移发生器 d）用光纤伸张器的光学延迟

相移也可以通过采用旋转的偏光器或者相位减速器获得，但机械的局限性通常将工作频率限制在几千赫兹，而且此方法未被广泛应用（Crane，1969；Okoomian，1969；Bryngdahl，1972a；Sommargren，1975；Shagam and Wyant，1978；Hu，1983，Kothiyal and Delisle，1984，1985a）。偏振相移器的排列如图14.5所示。

兹维亚金（Zvyagin，2001）论证了一种基于频域光延迟的消色差光学移相-调制器。由光栅、透镜和反射镜组成的该设备能保持零群时延。将反射镜倾斜就可以调整相位延迟，而不需要改变光束的群速度，如图14.4b所示。这尤其是后面将要介绍的多波长PSI的优势。

世纪之交，光纤光学的发展带来了另一种相移方法。改进的声光调制器可用于紧凑的同轴装置上，这类装置可以完全控制准直光束的相位。声光调制器由晶体组成，使用压电转换器件通过施加不同频率电压以实现沿光波传播方向上晶体密度的调制。垂直于光波传播方向的入射光将在这些密度调制上产生衍射。单个声光调制器可以如前所述像一个光栅一样使用，但是光栅的频率可以改变，例如，打开、关闭或者允许修改其他静态光栅。通过串联结合两个声光调制器，在轴向又增加了一个正第一级衍射级和一个负第一级衍射级，并且可以实现消色差的紧凑型移相器的设计，如图14.4c所示（Li，2005）。

光纤的应用还有一种方法，即利用光纤本身小量的伸展特性调整光纤内的光程长度。通常光纤线圈是利用压电变换器实现扩展的，或者将光纤线圈固定在压电盘上来实现扩展或压缩，如图14.4d所示。这些方法可以达到4kHz的快速扫描速度和在20m的光纤线圈中实现高达4.5mm长的光纤扩展（Henderson et al.，2004）。图14.5所示为偏振移相器的排列，排列中使用偏振光学元件，如1/4波带片或1/2波带片及偏振片，通过改变偏振方向可获得可变相移。

近期的另一项进展是使用温度或电流直接调制激光二极管输出波长来得到相移（Ishii et al.，1987；Suzuki et al.，2001；Onodera and Ishii，2003）。该方法的实施情况和结论在14.6.1.3小节中讨论。

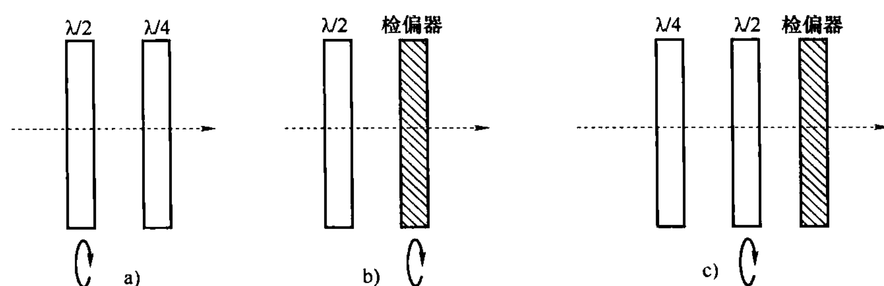


图14.5　偏振相移器的排列

a）干涉仪输入　b）干涉仪输出　c）干涉仪输出（Kothiyal，1985）

14.5　探测波前相位

多种PSI检测方案之间的主要区别是参考相位变化的方式、测量干涉图形的次数和频率。讨论所有方案，目的是找到“最佳”方法来采集和分析干涉测量的数据，以便可能解出方程（14.6）来获得未知的波前相位。当然，特殊应用场合的最佳解决方案取决于多种因素，包括计算的复杂度和速度、对相移误差和噪声的灵敏度、数据速率和检测方案的兼容

性。为了从根本上理解该分析过程，我们将从一个概念上和理论上简单的算法开始。

“四步算法”要求记录和数字化有关检测件的四幅不同的干涉图。顺序记录的每个干涉图之间的参考光中都要加入一个90°的光学相移。由于是离散测量，对时间的依赖性被改成相位的步长序号 i。现在函数 $\delta(t)$ 要取四个离散值

$$\delta_i = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2; \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{14.15}$$

将这四个值分别代入方程（14.6），得到四个方程式，描述了四个干涉图的光强图形

$$I_1(x,y) = I'(x,y) + I''(x,y)\cos[\phi(x,y)] \tag{14.16}$$

$$I_2(x,y) = I'(x,y) + I''(x,y)\cos[\phi(x,y) + \pi/2] \tag{14.17}$$

$$I_3(x,y) = I'(x,y) + I''(x,y)\cos[\phi(x,y) + \pi] \tag{14.18}$$

和

$$I_4(x,y) = I'(x,y) + I''(x,y)\cos[\phi(x,y) + 3\pi/2] \tag{14.19}$$

根据简单的三角函数恒等式，有

$$I_1(x,y) = I'(x,y) + I''(x,y)\cos[\phi(x,y)] \tag{14.20}$$

$$I_2(x,y) = I'(x,y) - I''(x,y)\sin[\phi(x,y)] \tag{14.21}$$

$$I_3(x,y) = I'(x,y) - I''(x,y)\cos[\phi(x,y)] \tag{14.22}$$

和

$$I_4(x,y) = I'(x,y) + I''(x,y)\cos[\phi(x,y) + 3\pi/2] \tag{14.23}$$

为了得出干涉图上每一点的 $\phi(x,\ y)$ 值，现在可以解这四个含有三个未知量 $I'(x,\ y)$、$I''(x,\ y)$ 和 $\phi(x,\ y)$ 的方程。正如后文所述，前三幅干涉图都要求用来求解波前相位，但第四幅是为了计算方便而考虑的。光强偏差项 $I'(x,\ y)$ 可以通过成对等式相减而消掉。

$$I_4 - I_2 = 2I''(x,y)\sin[\phi(x,y)] \tag{14.24}$$

和

$$I_1 - I_3 = 2I''(x,y)\cos[\phi(x,y)] \tag{14.25}$$

以上两等式相除消去光强调制项 $I''(x,\ y)$ 就得到仅仅包含未知相位 $\phi(x,\ y)$ 和四个测量的光强的结果

$$\frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3} = \frac{\sin[\phi(x,y)]}{\cos[\phi(x,y)]} = \tan[\phi(x,y)] \tag{14.26}$$

现在可以重新整理该方程，得到四步 PSI 算法

$$\phi(x,y) = \arctan\left[\frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3}\right] \tag{14.27}$$

这个简单的公式计算每个测量点，以获取被测波前的面形分布。为了简洁地展示该算法并能简单地与其他算法对比，表达式中隐含了四个光强测量结果对（x，y）坐标的依赖。很容易得知，该波前与工件的表面高度（式（14.1））或者光程差（OPD）相关

$$OPD(x,y) = \lambda\phi(x,y)/2\pi \tag{14.28}$$

PSI 经常使用的测量阵列是固体成像探测器上的矩形像素阵列。

图 14.6 所示为记录的相移为 90°的四帧干涉图照片。可以看出条纹跨越了整个视场，但更重要的是，任何点上的光强都随相位变化。由于第一帧和第五帧之间相移是 360°，因而它们看上去是相同的。

在这一点上，PSI 同传统干涉测量分析技术之间的差异应该非常明显。PSI 根据在每一点测量的时变光强来计算每一处测量位置的波前相位。一点的计算结果就是在该点测得的几

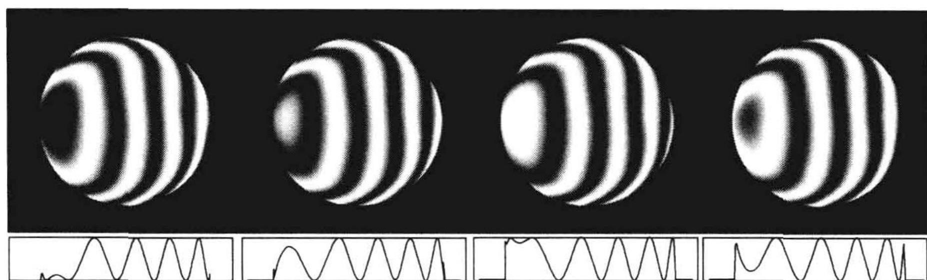


图 14.6　记录的相移为 90°的四帧干涉图照片

个光强值之比的反正切值，并且不需要寻找条纹的中心或确定条纹的级数。事实上，条纹图形与 PSI 基本无关；对条纹最小数量或者它们的形状没有要求，而且系统精度相对独立于干涉图的条纹频率。由于数据能够在规则网格点上采集，所以 PSI 特别适合用于进一步的分析和处理。

如果需要，可以根据光强数确定整个干涉图的数据调制系数 $\gamma(x, y)$

$$\gamma(x,y)=\frac{I''(x,y)}{I'(x,y)} \tag{14.29}$$

从式（14.24）和式（14.25）开始并使式（14.20）减去式（14.23），得到

$$\gamma(x,y)=\frac{2[(I_4-I_2)^2+(I_1-I_3)^2]^{1/2}}{I_1+I_2+I_3+I_4} \tag{14.30}$$

此处隐含了被测点的坐标（x，y）。其中分子是光强调制，而分母是平均光强或光强偏差。再重申一次，探测器的所有特性，如灵敏度和偏置量，都作为 $I'(x, y)$ 和 $I''(x, y)$ 的一部分隐含在这项分析中。此信息在评估所采集数据的质量方面很有用。接近 1 的数据调制是好的，而较低的调制是不可靠的。调制低于某阈值的数据点不会有足够的信噪比，故在该点计算波前相位是不可靠的。分析时这些点会被排除在外，典型的数据调制阈值范围在 5% ~10% 之间。当然，此数据取决于应用场合。

14.6　数据采集

如上所述，其实获取光强信号的方式有很多。这一节总结了几种常用方法。相移技术的基本思想是，至少要求三种不同的光强图形来估算被测相位。在时域，可以通过改变干涉仪两臂之间的路径差或者改变光源波长产生一个相移。相移也可以由空间位移瞬间形成，或者在空间上通过改变干涉仪整个口径的光程来引起。

14.6.1　时域方法

有几种方法可以在时域改变参考相位。它们分为相移器引入的离散步进式或连续扫描式相移和波前步进或扫描式相移。

（1）分步相位　为了说明相位的分步过程，在 14.5 节中使用了四步算法。参考相位由一系列的离散值分开并在每一分步记录一帧干涉图，如图 14.7 所示。为了更清晰，图 14.7 把一个周期细分为八份。图 14.7a 左边是相移器的分步，右边给出由探测器像素记录的随参考相位变化的光强。

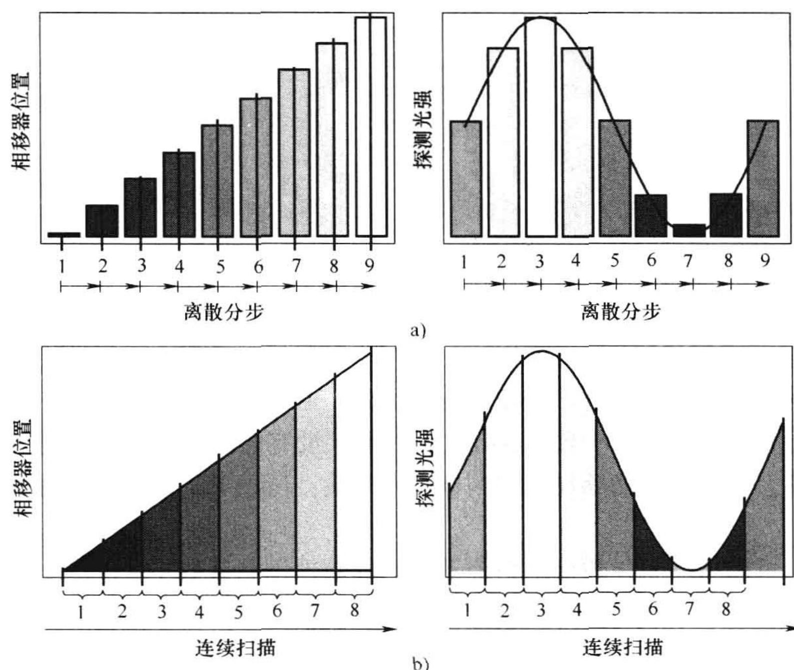


图 14.7 分步相位（图 a）和全相移的整合（图 b）是产生时域相移的可替代方法
a）分步相位 b）全相移的整合

（2）相位扫描 由于实际原因，通常希望记录干涉图时，分步之间的相位变化是平滑的。这样做的原因之一是在一个相位细分的指令之后，压电传感器可能发生“鸣响”，此处参考镜的位置可能发生振荡，直至瞬间后消失（Seligson et al.，1984）。在参考表面的质量很大或电路控制系统阻尼不好时，可能出现这种情况。因此，有必要等到完成每一个相位分步之后再记录数据，这可能大大增加采集时间。

（3）局部积分的数据采集方案 首次由怀特（Wyant，1975）提出，当采集一系列干涉图时，可以使参考相位随时间线性变化。在一次测量的积分时间内，参考相位会变化。可以选择使这段积分时间等于传感器的帧频，或者，它也可能是采集足够信号所需的时间。为了便于分析，首先改写干涉图的一般表达式（14.6），该干涉图的光强是参考相位 δ 而不是时间的函数

$$I(x,y,\delta)=I'(x,y)+I''(x,y)\cos[\phi(x,y)+\delta] \tag{14.31}$$

如果在积分时间或曝光时间内参考相位的变化量为 Δ，那么可以根据这段积分时间内的光强确定所记录的干涉图（Greivenkamp，1984）

$$I_i(x,y)=\frac{1}{\Delta}\int_{\delta_i-\Delta/2}^{\delta_i+\Delta/2}\{I'(x,y)+I''(x,y)\cos[\phi(x,y)+\delta]\}\mathrm{d}\delta \tag{14.32}$$

此处 δ_i 为积分区域中间的相移，$I_i(x,y)$ 为相应记录的干涉图。等式中的项 $1/\Delta$ 将该结果归一化，使得记录信号的平均不依赖于 Δ。积分式变为

$$I_i(x,y)=I'(x,y)+\left(\frac{1}{\Delta}\right)I''(x,y)\left\{\sin\left[\phi(x,y)+\delta_i+\frac{\Delta}{2}\right]-\sin\left[\phi(x,y)+\delta_i-\frac{\Delta}{2}\right]\right\} \tag{14.33}$$

运用三角函数恒等式，式（14.33）可写成

$$I_i(x,y) = I'(x,y) + I''(x,y)\mathrm{sinc}[\phi(x,y) + \delta_i] \tag{14.34}$$

此处

$$\mathrm{sinc}(\beta) = \frac{\sin\pi\beta}{\pi\beta} \tag{14.35}$$

根据这一定义，sinc 函数在零处的值为一并且当自变量为整数时其值趋于零。将这一结果与原始表达式（14.31）或式（14.6）比较后表明，相位变化期间由积分光强引起的唯一改变是：将干涉图中每一点的所记录光强用 sinc 函数进行了调制。这是我们曾经讨论过的最常见表达式。注意，对记录的每一帧，Δ 的值必须是相同的。图 14.7b 两图分别给出了相位的连续变化和探测器每个像素记录的光强。

同样的算法可以用于采用分步相位法或 bucket 积分法采集的数据。实际上，我们可以把分步相位视为 bucket 积分中宽度为零（$\Delta=0$）的情况。在这种情况下，bucket 积分的结果就简化到分步相位的结果。

由于 PSI 分析取决于具有良好调制的数据，采用 bucket 积分方法时就要考虑信噪问题。由于调制度减弱，有些数据点信号可能小于正确分析需要的阈值。sinc 函数可以在测量中用作调制传递函数（MTF）。随着 Δ 的增大，MTF 减少。

对于分步相位（$\Delta=0$），调制等于 1。如果积分区间小，影响也最小；例如，$\Delta=\pi/4$（45°）和 $\Delta=\pi/2$(90°）时，调制等于 97% 和 90%。$\Delta=\pi/2$ 时，相当于连续采集四帧相邻数据，而在此期间参考相位变化了一个光波周期，这一点与使用许多其他干涉仪时发现的条件很接近。在参考相移的一个完整周期（$\Delta=2\pi$）内，对光强积分可将信号调制减小到零，而且在获得的结果数据中没有关于波前相位的有用信息。为了获得良好的数据调制，我们通常把每帧的积分区间限制在 $0\sim\pi$ 之间。如果不存在与数据采集有关的动态或者控制问题，bucket 积分法就没有多少优势。在有效调制中 10% 的减小是相对于其他不良影响因素的必要权衡。

（4）分步或扫描波长　对于非等光程激光干涉仪，如菲佐或非等光程的泰曼－格林系统，改变波长就可以使干涉图形的相位发生变化（de Groot，2000；Dunn，2005）。就如狄瑞克（Deck，2001）所述，给定干涉仪的被测臂和参考臂之差 L，产生的相位变化是激光频率变化的线性函数

$$\Delta\phi = \phi_{\text{test}} - \phi_{\text{reference}} = 2\,\frac{2\pi}{\lambda}nL = \frac{4\pi n}{c}Lv \Rightarrow \frac{\partial\Delta\phi}{\partial t} = \frac{4\pi n}{c}L\,\frac{\partial v}{\partial t} \tag{14.36}$$

因此，波长变化必须足够大才可以在给定干涉仪腔长时，有足够的相位变化。

图 14.8 所示为两种最常见的用激光二极管调节波长的外反馈结构（Duarte，2003 年）。这两种情况下，从激光二极管中发射出来的激光束，准直后到达光栅。在 Littrow 结构中，零阶光束离开激光腔，第一阶光束被反射回激光器。只有色散角刚好被反射回激光腔时，这种外反馈才会导致二极管激光器产生谐振。通过使用压电变换器转动光栅，反射回激光器的波长可能发生改变，并因此实现对发射波长的调节。

在里特曼/梅特卡夫（Littman/Metcalf）结构中，当零阶光束被耦合到一块，会将该光束反射回光栅的可旋转反射镜上时，一阶光束的耦合在激光器外进行。在那里，一阶的反射光被反射回到激光腔。使用压电陶瓷（PZT）改变该反射镜的角度可以将激光器的谐振波长调节在增益曲线范围之内。

两种结构都有优缺点。在里特曼结构中，可提供更高的输出功率，当旋转光栅时，透过

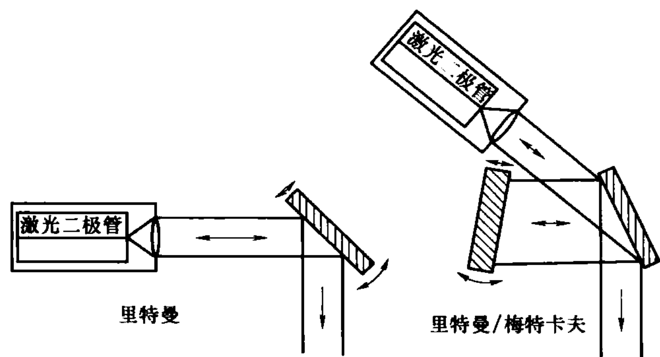


图 14.8 两种最常见的用激光二极管调节波长的外反馈结构

光栅的出射激光束会改变自身的角度。在里特曼/梅特卡夫结构中，出射角度保持不变；但是，从第二个光栅反射回的零级光束丢失并因此限制了系统的总输出功率。

在菲佐结构中，由于除了光源以外系统没有移动部件，因此波长调谐方法有着显著的优势。特别是可以避免通常采用的方法——移动干涉仪的准直光学元件之一，而导致非准直情况。

波长调谐方法可以使从被测光学元件的不同表面（前后表面）反射的光彼此分开，如奥卡达等（Okada et al.，1990）和格瑞特（Groot，1994）所论述。原则上，因为波长的变化引起相对于腔长的相位变化，故不同表面的反射光将有不相同的相位变化。并且，针对不同的表面反射光，腔长是不同的。

14.6.2 空域方法

除了前面描述的在时域引入相位变化的方法，还有几种采用空域方法产生所需相位差的方法。当可以使用更高分辨率的探测器时，空域方法的使用就会变得越来越普遍。空域方法的优势在于它们在一定的时间内不需要保持信号的稳定，因为通常它们是瞬间的方案，其实际数据采集占用的时间仅仅取决于探测器的积分时间。

1. 空间密度探测

一个具有足够分辨率的探测器可以在测得的光强信号中加入一个空间载波频率。在测试臂和参考臂之间使用大倾斜量是完全不可行的，因为光束由观察系统中的不同元件进行传播，这一行为会给探测到的干涉图引入额外的像差。取而代之，空间密度探测能够通过以下方法直接在探测器之前进行：在测试臂和参考臂中使用左旋或右旋的圆偏振光；或者放置一块光学元件以在正交方向之间产生倾斜，就像在探测器前面的分析仪之后放置的一块瓦氏棱镜。

如果与引入的倾斜条纹相比较，波前斜率较小，那么可以认为局部波前是平的，这会直接造成线性相位变化及相邻像素间的相位差是常量，就如史若夫（Shough，1990）所述。这时可以使用相移算法。为了减少较大波前斜率带来的误差，这个误差导致相邻像素间的相位差不等于史若夫所述算法的补偿偏差，因此应该考虑这一相位偏差的修正。在库切尔的文章（Kuechel，1990，1992a，1992b），以及 D. 马拉卡拉和库切尔（Malacara-Doblado，Kuechel，2001）文章中都有全面的讨论。

图 14.9 所示为载波频率允许使用空间相移算法。与图 14.6 所示相同的波前现在被记录

下来，其中包含大量附加倾斜量。如果从局部看，辅助像素之间的相位差几乎不变。这样就可以估算这些像素的相位。通常，因为要使用误差补偿算法，此方法仅采用了四组相位数据，并允许采用大范围确定性不敏感算法。正如库切尔的文章描述（1990，1992a，1992b），这种方法可以实现自动快速评估，从而实现相位计算值的实时视频显示、快速平均并对振动不敏感。因为该方法计算几个相邻像素数点中的一个相位点，所以载波频率轴向的空间分辨率降低。

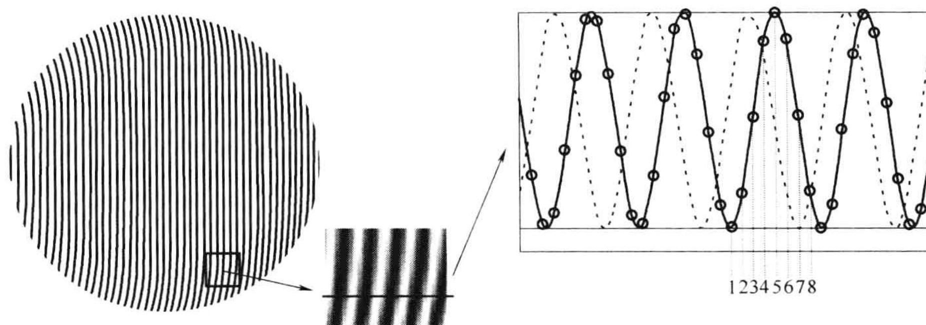


图 14.9 载波频率允许使用空间相移算法

2. 横向移位成像

这些瞬时系统首次采用偏振元件来产生期望的 PSI 信号（Smythe and Moore，1984）。

当两束偏振光中的每一束被发送到干涉仪的一臂时，使用偏振干涉仪。返回的光束进入检码模块，应用于瞬时 PSI 测量偏振编码方案如图 14.10 所示。半波片将两束偏振光旋转 45°，这样这两束光就与偏振元件的光轴成 45°。一块分光镜（BS）产生两束光，其中那束反射光束进一步被偏振分光镜（PBS）分成两束。由于能量守恒，相移 180°就形成两组干涉条纹。由分光镜形成的另一束光穿过 $\lambda/2$ 波片，其快轴方向正好与正交偏振方向之一相同；这会在两个偏振方向之间产生一个 90°相移。这束光与第二块偏振分光镜相遇时，这两个干涉图将有 180°异相并且从第一组条纹图形移动了 90°。这四帧具有 90°相移的干涉图可以被记录下来，并可以采用四步算法（式 14.27）来计算波前。类似的偏振编码方案已应用于距离测量干涉仪（Dorsey et al.，1983；Crosdale and Palum，1990）。

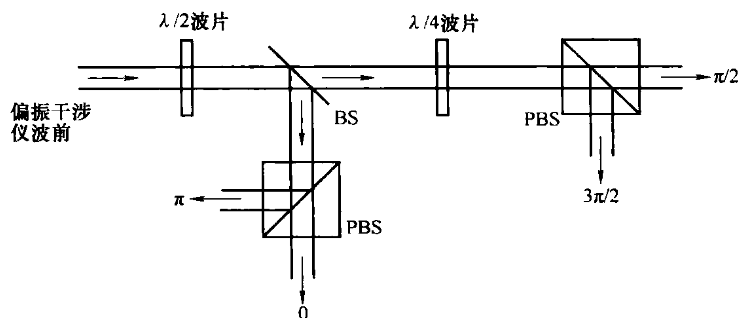


图 14.10 应用于瞬时 PSI 测量偏振编码方案

黑特尔等人（Hettwer et al.，2000）在 2000 年发表的研究结果显示，$\lambda/4$ 波片和检偏器之后放置一块光栅形成的组合可以用来在一个探测器中形成瞬时相移（参见 2.8 节）。此装

置中光栅的作用是分光。一块放置在右边和焦距上的透镜将 0 阶和 +/-1 阶衍射光指向探测器。为了选出单一偏振干涉光，在探测器前面使用了一台偏振器。+/-1 阶衍射光都透过了 λ/4 波片，该波片将 +/-1 阶光在反方向旋转 90°。这样做将在探测器上形成三束空间上相隔离的光束，它们之间分别有 -90°、0°和 90°的相移。如果在这种排列中使用相位光栅，那么衍射光强能够以如下这样的方式在工程上实现，即在适当位置带有偏振片的一阶光束与没有偏振片的零级光束具有相同的光强。图 14.11 所示为使用一个探测器的横向错位相移成像装置示意图。

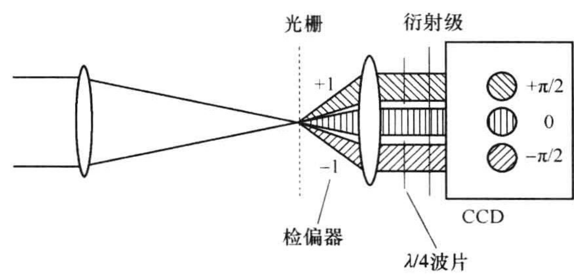


图 14.11 使用一个探测器的横向错位相移成像装置示意图（Hettwer et al.，2000）

这种三帧图像方法不能使用误差补偿算法，也不能有效使用通常的四象限探测器。

米尔瑞德等人（Millerd et al.，2004、2005）发表了一种可以采用四帧相移干涉图的非常紧凑的方法，它能够使用误差补偿算法，并同时能更有效地利用探测器的几何空间。他们使用了一种专门设计的全息元件，将光束分为分别在 x 和 y 方向位置不同的四束独立光束。在探测器前面放置另一块相位偏移和偏振片掩模，就可以如图 14.12 所示那样在干涉图中产生相移。

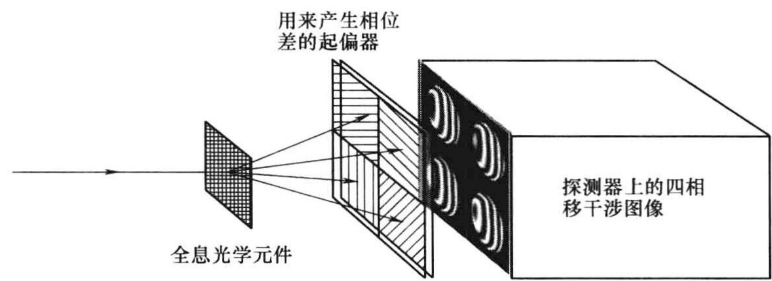


图 14.12 在探测器前使用一组全息光学元件（HOE）和四个空间分隔偏振片同时产生的相移

3. 像素移位

米尔瑞德等（Millerd et al.，2005）也证明能够使用线栅偏振片针对每个像素进行旋转以得到不同的相移。对于相位四步法，就会有四个不同的检偏器旋转。通过这种方式，使用一个高分辨率探测器就能获得四帧瞬间干涉图，而不需要另加一块全息光学元件来分光。图 14.13 所示为这个装置的基本原理。偏振干涉仪有分别来自检测臂或参考臂的左旋或右旋偏振光。这两束光然后通过一个探测器阵列，该阵列的二维点阵孔对应探测器像素点位。每一个检偏器可以有不同单位像素的旋转量，在干涉仪两臂之间选择不同的相位差，也可以形成单位像素的不同相移。通过这种方式，四帧高分辨率瞬态干涉图可以通过沿着 0°、45°、90°和 135°的检偏器旋转方向分类像素而记录下来。

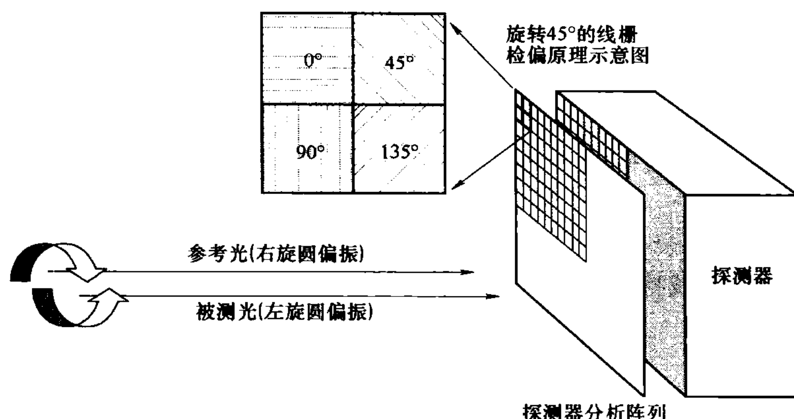


图 14.13　装置的基本原理

14.7 PSI 算法

在 14.6 节中，介绍了几种相移光强分布图形的采集方法。许多不同的数据处理策略或算法都在发展，其中四步算法式（14.27）仅仅是个例。所有这些算法有着共同的特点：它们需要在参考相位变化时记录一系列干涉图。以 2π 为模，每个测量点波前相位就是在同一测量点测得的干涉图光强函数的反正切。于是最后的波前分布图就可以通过“展开”这些相位来获得，以消除 2π 的不连续性。虽然计算相位的方法有很多，但是不同算法之间的差异与以下几方面密切相关：记录的干涉图数量、这些干涉图之间的相移、针对相移误差算法的稳定性、环境噪声（如振动和湍流），以及在记录光强时探测器的非线性等。

由于我们论述了分步相位法与 bucket 积分法的差异，以及与所记录光强的有效调制之间的关系，因而我们将要讨论的所有算法对这两种方法同样有效。为了简化符号，我们将方程的一般表达式（14.34）重新写成

$$I_i(x,y) = I'(x,y) + I''(x,y,\Delta)\cos[\phi(x,y) + \delta_i] \tag{14.37}$$

此处

$$I''(x,y,\Delta) = I''(x,y)\,\mathrm{sinc}(\Delta/2\pi) \tag{14.38}$$

现在调制信息对积分区域的依赖关系都隐含在 $I''(x, y, \Delta)$ 中。这一节，我们主要关注算法的开发并且将高度重视每一个算法对最常见的误差源的敏感性。误差源本身将在 14.10 节中仔细研究。

有了这些 PSI 算法，对于参考相位的初始值，往往任意选取，目的是要获得一个相对测量波前相位更加简单的数学表达式。在实践中，我们不知道（或不需要知道）绝对的参考相位；而更重要的是几个测量值之间的相移。我们只是将参考反射镜的起始位置定义在第一个需要的相位值上，并从这儿开始处理。

14.7.1 三步算法

由于方程（14.39）中有三个未知数（即 δ_1、δ_2、δ_3），所以重构未知波前相位需要至少三个干涉图光强的测量结果。一般情况下可以用等相位步长 α 来求解（Creath，1988）。在这种情况下

$$\delta_i = -\alpha, 0, \alpha \qquad i = 1, 2, 3 \tag{14.39}$$

和

$$I_1 = I'(x,y) + I''(x,y,\Delta)\cos[\phi(x,y) - \alpha] \tag{14.40}$$

$$I_2(x,y) = I'(x,y) + I''(x,y,\Delta)\cos[\phi(x,y)] \tag{14.41}$$

以及

$$I_3(x,y) = I'(x,y) + I''(x,y,\Delta)\cos[\phi(x,y) + \alpha] \tag{14.42}$$

使用三角恒等式加减特性

$$I_1 = I'(x,y) + I''(x,y,\Delta)\{\cos[\phi(x,y)]\cos(\alpha) + \sin[\phi(x,y)]\sin\alpha\} \tag{14.43}$$

$$I_2 = I'(x,y) + I''(x,y,\Delta)\cos[\phi(x,y)] \tag{14.44}$$

以及

$$I_3 = I'(x,y) + I''(x,y,\Delta)\{\cos[\phi(x,y)]\cos\alpha - \sin[\phi(x,y)]\sin\alpha\} \tag{14.45}$$

这三个方程很容易解，可得出每个坐标点的未知波前相位

$$\phi(x,y) = \arctan\left[\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{I_1 - I_3}{2I_2 - I_1 - I_3}\right] \tag{14.46}$$

对于未知的信号调制 $I'(x, y)$ 和 $I''(x, y, \Delta)$，也可以由式（14.42）~式(14.47）推导出

$$I'(x,y) = \frac{I_1 + I_3 - 2I_2\cos\alpha}{2[1-\cos\alpha]} \tag{14.47}$$

和

$$I''(x,y,\Delta) = \frac{\{[(1-\cos\alpha)(I_1 - I_3)]^2 + [\sin\alpha(2I_2 - I_1 - I_3)]^2\}^{1/2}}{2\sin\alpha[1-\cos(\alpha)]} \tag{14.48}$$

这两个光强之比就是记录下的数据集合中的每个点上的信号调制度

$$\gamma(x,y) = \frac{I''(x,y,\Delta)}{I'(x,y)} = \frac{\{[(1-\cos\alpha)(I_1 - I_3)]^2 + [\sin\alpha(2I_2 - I_1 - I_3)]^2\}^{1/2}}{[I_1 + I_3 - 2I_2\cos\alpha]\sin\alpha} \tag{14.49}$$

重要的是要记住，此处测量出的调制实际上是所记录信号的调制度，而不是探测器的入射光强，并且它包含了由于使用 bucket 积分法，及如探测器固有图像噪声等其他项，导致的 MTF 衰减。这个表述也适用于以前的四步算法计算出的调制度。计算每个点的调制度时，可以识别出调制度不足的数据点并在分析中加以剔除。

在三步算法中最常用的相位步长为 90°和 120°。考虑 α 的这些取值，当 $\alpha = \pi/2$ 时，波前相位的解为

$$\phi(x,y) = \arctan\left(\frac{I_1 - I_3}{2I_2 - I_1 - I_3}\right) \tag{14.50}$$

此时的信号调制度为

$$\gamma(x,y) = \frac{[(I_1 - I_3)^2 + (2I_2 - I_1 - I_3)]^{1/2}}{I_1 + I_3} \tag{14.51}$$

当 $\alpha = 2\pi/3$ 时

$$\phi(x,y) = \arctan\sqrt{3\,\frac{I_1 - I_3}{2I_2 - I_1 - I_3}} \tag{14.52}$$

并且与此值相对应的信号调制度很容易由式（14.49）来确定。

在三步算法中，由于采用了 90°的相位步长及 45°相位偏移（Wyant et al.，1984；Bhus-

han et al. , 1985)，出现了一个有趣的变化。相位偏移综合考虑了使用三角法特性和计算方便的优点。因为我们仅仅对所有分步之间的相对相位感兴趣，所以与干涉仪的运算结果无关。对于以上条件，相位的分步点为

$$\delta_i = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{14.53}$$

以及求解出的波前相位是

$$\phi(x,y) = \arctan\left(\frac{I_3 - I_2}{I_1 - I_2}\right) \tag{14.54}$$

信号调制的结果与由方程（14.51）的计算结果相同。不必惊奇，因为信号的调制与参考相位（$-\pi/2$ 和 $\pi/4$）的初始值无关。同样，用方程式（14.50）而不是式（14.54）来分析三帧光强的差别就是一个波前相位偏移常数，$3\pi/4$。这些靠后的方程主要用于不太复杂的分析情况，而且能够用在具有 $\pi/2$ 相移的三个测量中值组成的任何一组数据中，不需考虑起始相位。计算结果中将出现一个不重要的相位偏置或平移项。

三步算法需要最小的数据量，也是最简单易用的算法。然而，正如以后将要看到的，这也是对每帧之间相移误差最敏感的算法。

14.7.2　最小二乘算法

正如我们多次指出的，干涉图给定坐标上的测量光强的变化是参考相位的正弦函数，该相位有一个已知区间和三个未知量：平均信号、数据调制及不确定的参考相位。并不奇怪的是波前相位可以通过对测量光强作一个正弦函数的最小二乘拟合来确定。

对于在相移 δ_i 处记录的一系列 N 幅干涉图的一般的最小二乘解是由布朗林、赫里欧、格勒格特、罗森费尔德、怀特、布瑞格克（Bruning、Herriott、Gallagher、Rosenfeld、White and Brangaccio，1974）首次讨论，格林文克安（Greivenkamp，1984）进行了更严密的论述。方程（14.37）首次改写为

$$\begin{aligned} I_i(x,y) = {} & I'(x,y) + I''(x,y,\Delta)\cos[\phi(x,y)]\cos(\delta_i) \\ & - I''(x,y,\Delta)\sin[\phi(x,y)]\sin(\delta_i) \end{aligned} \tag{14.55}$$

或者

$$I_i(x,y) = \alpha_0(x,y) + \alpha_1(x,y)\cos(\delta_i) + \alpha_2(x,y)\sin(\delta_i) \tag{14.56}$$

此处

$$\alpha_0 = I'(x,y) \tag{14.57}$$

$$\alpha_1(x,y) = I''(x,y,\Delta)\cos[\phi(x,y)] \tag{14.58}$$

和

$$\alpha_2(x,y) = -I''(x,y,\Delta)\sin[\phi(x,y)] \tag{14.59}$$

式（14.56）是每个坐标点上测量光强 $I'(x, y)$ 的广义最小二乘拟合的适当形式。测量的光强和由式（14.56）预测的光强之间的方差同三个未知量或变量 $\alpha_0(x, y)$、$\alpha_1(x, y)$ 和 $\alpha_2(x, y)$ 的关系为

$$E^2 = \sum_{i=1}^{N} [I_i(x,y) - \alpha_0(x,y) - \alpha_1(x,y)\cos(\delta_i) - \alpha_2(x,y)\sin(\delta_i)] \tag{14.60}$$

这个误差可以通过微分三个未知量中的每一个并令这三个结果等于零而被减到最小。这三个方程联立求解就得到最小二乘的结果，并以下面的矩阵等式给出

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(x,y) \\ \alpha_1(x,y) \\ \alpha_2(x,y) \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}(\delta_i)\boldsymbol{B}(x,y,\delta_i) \tag{14.61}$$

此处的子矩阵为

$$\boldsymbol{A}(\delta_i) = \begin{bmatrix} N & \sum\cos(\delta_i) & \sum\sin(\delta_i) \\ \sum\cos(\delta_i) & \sum\cos^2(\delta_i) & \sum\cos(\delta_i)\sum\sin(\delta_i) \\ \sum\sin(\delta_i) & \sum\cos(\delta_i)\sum\sin(\delta_i) & \sum\sin^2(\delta_i) \end{bmatrix} \tag{14.62}$$

和

$$\boldsymbol{B}(x,y,\delta_i) = \begin{bmatrix} \sum I_i \\ \sum I_i\cos(\delta_i) \\ \sum I_i\sin(\delta_i) \end{bmatrix} \tag{14.63}$$

总数量为从 1 到 N。矩阵 $\boldsymbol{A}(\delta_i)$ 只是参考相移的函数，另外包含关于数据采集方案的信息；因此，只需要进行一次计算并求逆矩阵就可以。矩阵 $\boldsymbol{B}(x, y, \delta_i)$ 由测得的干涉图光强加权和组成。

一旦这三个未知量 $\alpha_0(x, y)$、$\alpha_1(x, y)$ 和 $\alpha_2(x, y)$ 的值在每个测量坐标上被确定后，波前相位和信号或数据调制就可以轻易根据式（14.61）~式（14.63）推出

$$\phi(x,y) = \arctan\left(\frac{-\alpha_2(x,y)}{\alpha_1(x,y)}\right) \tag{14.64}$$

以及

$$\gamma(x,y) = \frac{I''(x,y,\Delta)}{I'(x,y)} = \frac{[\alpha_1(x,y)^2 + \alpha_2(x,y)^2]^{1/2}}{\alpha_0(x,y)} \tag{14.65}$$

这个算法说明了 PSI 的一个特点，即三个或更多的参考相位值可以任意联合用于测量波前。这些值无须间隔均匀，并且可以扩展到比 2π 更大的范围。然而，相移位置的选择会影响系统的信噪性能，并针对矩阵 $\boldsymbol{A}(\delta_i)$ 尤其明显。

一个从最小二乘法分析得出的专用算法是，在一个相移周期内 N 等分相位（Bruning et al.，1974；Morgan，1982；Greivenkamp，1984），或者

$$\delta_i = i2\pi/N \qquad i = 1,\cdots,N \tag{14.66}$$

在这种特殊情况，矩阵 $\boldsymbol{A}(\delta_i)$ 中所有非对角线项均为零，并且波前相位的简单解和记录的数据调制度为

$$\phi(x,y) = \arctan\left(\frac{-\sum I_i\sin(\delta_i)}{\sum I_i\cos(\delta_i)}\right) \tag{14.67}$$

和

$$\gamma(x,y) = \frac{2\{[\sum I_i\cos(\delta_i)]^2 + [\sum I_i\sin(\delta_i)]^2\}^{1/2}}{\sum I_i} \tag{14.68}$$

这些结果与四步算法之间的相似性在式（14.27）和式（14.30）中是很明显的。

以上章节讲述的所有三步和四步算法，不需要使用最小二乘拟合就可以推导出来，它们均是解析解。但是，这些算法的精度仅相当于最小二乘解，并可以由方程（14.61）~方程(14.66）导出。

后面章节中我们将介绍另一组 PSI 算法，但想在这里提到的是，方程（14.68）已经成为一系列 PSI 算法的基础，例如 N 帧（N-frame）或 N 阶（N-bucket）算法，其中 4-bucket

算法是最常用的一种。表14.1所示为由方程（14.61）得出算法的N阶bucket表达式。

表14.1 由方程（14.61）得出算法的N阶bucket表达式

帧数	算法	相移
3	$\tan\phi=\frac{\sqrt{3}(I_2-I_3)}{-2I_1+I_2+I_3}$	$\delta_i=(i-1)\frac{2\pi}{3}$
4	$\tan\phi=\frac{I_2-I_4}{I_3-I_1}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$
6	$\tan\phi=\frac{-\sqrt{3}(I_2+I_3-I_5-I_6)}{2I_1+I_2-I_3-2I_4-I_5+I_6}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{3}$

14.7.3 卡雷算法

讨论到目前为止，在所有的PSI算法中，都是假设测量值之间的相移是已知的。正如后面将看到的，如果实际相移不同于假设值，会给重构量引入误差。这类误差可能由压电陶瓷位移的斜率变化-电压曲线造成，此时希望相位的分步是均匀的，但可能是不正确的步长（例如88°而不是90°）。整个光瞳上相移的不均匀性，会使会聚光束或发散光束中的线性相移（如14.4节中讨论的）成为此类误差的另一个来源。几种PSI算法已经得到发展，以尽量减少这些相移变化的影响。

其中第一个算法是卡雷算法（Carré，1966）。此算法由四步算法演化而来，而不要求数据采集时以90°的增量进行，测量值之间的参考相移按未知量处理并在分析中求解。假设在每分步之间有一个2α的线性相移，于是参考相位为

$$\delta_i=-3\alpha,\ -\alpha,\alpha,3\alpha \qquad i=1,2,3,4 \tag{14.69}$$

如前所述，选择这四个值来形成较简单的求解表达式。此时，四帧测量光强的表达式为

$$I_1(x,y)=I'(x,y)+I''(x,y,\Delta)\cos[\phi(x,y)-3\alpha] \tag{14.70}$$

$$I_2(x,y)=I'(x,y)+I''(x,y,\Delta)\cos[\phi(x,y)-\alpha] \tag{14.71}$$

$$I_3(x,y)=I'(x,y)+I''(x,y,\Delta)\cos[\phi(x,y)+\alpha] \tag{14.72}$$

和

$$I_4(x,y)=I'(x,y)+I''(x,y,\Delta)\cos[\phi(x,y)+3\alpha] \tag{14.73}$$

这组四个等式包括四个未知量，前三个和第四个一起来考虑求解未知的参考相位。

参考相移的求解可以通过这样的方式来找到，即展开这四个方程并将三角函数恒等式特性应用到3α的正弦或余弦上

$$\alpha(x,y)=\arctan\left[\frac{3(I_2-I_3)-(I_1-I_4)}{(I_1-I_4)+(I_2-I_3)}\right]^{1/2} \tag{14.74}$$

注意，由于这个方程可以在每一个测量点进行求解，参考相移$2\alpha(x,\ y)$也就可以在每一点处确定。这可以使相移的空间变化被识别出来。波前相位在每个坐标点上的解为

$$\phi(x,y)=\arctan\left\{\tan[\alpha(x,y)]\left[\frac{(I_1-I_4)+(I_2-I_3)}{(I_2+I_3)-(I_1+I_4)}\right]^{1/2}\right\} \tag{14.75}$$

或者结合这两个结果，可得出

$$\phi(x,y)=\arctan\frac{\{[3(I_2-I_3)-(I_1-I_4)][(I_1-I_4)+(I_2-I_3)]\}^{1/2}}{(I_2+I_3)-(I_1+I_4)} \tag{14.76}$$

此处光强测量值依赖的（x，y）坐标没有标示出来。该算法的价值在于它补偿了相移

的大量误差及相移的空间变化。但是，这种算法要求在给定坐标系上的相移递增量相等。在卡雷算法中，针对 2π 波前相位模（见14.5小节）的反正切计算结果进行的转换，没有像本章讨论的其他算法那样直接。在其他这些算法中，与波前相位 $\phi(x, y)$ 的正弦和余弦值成正比的项，都被包含在反正切的分子和分母中，而且使用这些计算值（表14.11）是为了校正相位计算值。在卡雷算法（式（14.76））中，分子的平方根产生的是 $\sin[\phi(x, y)]$ 的绝对值，而不是正弦值。实际上，因为分母可为正也可为负，该方程产生的相位的符号可能相反。就卡雷算法而言，向 2π 相位模转换，应该基于这一计算结果的绝对值，和表14.11所表述的“校正后的相位”栏中合适的项目：0，$|\phi(x, y)|$，$\pi/2$，$\pi-|\phi(x, y)|$，π，$\pi+|\phi(x, y)|$，$3\pi/2$，以及 $2\pi-|\phi(x, y)|$。改变了结构的内容是那些正弦和余弦值为负的分解项。此外，使用这一修正表，与波前相位成正比的正弦和余弦分解项还必须经过重构以确定符号并选择适当的表格内容（Creath，1985）。其中的一个为

$$\sin[\phi(x,y)] \propto (I_2 - I_3) = 2I''(x,y,\Delta)\sin[\alpha(x,y)]\sin[\phi(x,y)] \tag{14.77}$$

和

$$\cos[\phi(x,y)] \propto (I_2 + I_3) - (I_1 - I_4) = 8I''(x,y,\Delta)\sin^2[\alpha(x,y)]\cos[\alpha(x,y)]\cos[\phi(x,y)] \tag{14.78}$$

有了这些数值，针对卡雷算法，修订后的表14.11可以用来计算波前相位模 2π，还应当指出的是这个修订更正表可以适用任何其他算法。

相移干涉测量（$\alpha=45°$）最常用的参考相移是90°，而且记录的数据调制可以用方程（14.30）来计算，为四步算法的结果（再次强调，该调制必须独立于相移的初始值）。这个表达式甚至可以用于相位步长的尺度有相当大变化的情况下，如同计算调制时只产生小的误差。对于相移±10%的变化，调制中最大的误差大约为±5%。当该调制仅仅用于分析出的调制不足的数据点时，这样的误差是能够容忍的。

14.7.4 平均算法

在14.10节中可以看到，一个线性相移误差会在重构具有两倍干涉图条纹频率的波前相位时引起一个正弦误差。平均两次有90°参考相位差的波前相位结果，可以减小这一误差（Schwider et al.，1983；Wyant and Prettyjohns，1987）。这个90°相移将把干涉条纹移动1/4周期，并且重构误差也将在两次计算之间移动相同的物理量（式（14.79））。由于这个误差在条纹频率两倍时发生，所以两次测量值之间的周期误差将抵消一半的周期。当这两个计算值的误差一起平均时，该误差将有可能被消除。

$$\tan\phi = \frac{N}{D} = \frac{N_0 + N_{\pi/2}}{D_0 + D_{\pi/2}} \tag{14.79}$$

一种实现这个技术的方法就是，另外记录一组包含三帧或者四帧具有 $\pi/2$ 相移的光强测量值。第一组这些三帧或者四帧采用三步算法（式（14.44））或四帧算法（式（14.27））分析来实现波前相位的首次测量。现在第二批测量值用同样的等式进行分析，用 I_2 替代 I_1，用 I_3 替代 I_2 等，实现波前相位的第二次计算。然后在每个测量坐标处平均两个结果，从而得到一个影响不太大的相移误差结果，该误差可能存在于两个计算值中的任一个。

例如，式（14.79）也可用来根据三帧或四帧基本算法推导新的本质相关的误差补偿算法（Schwider et al.，1993）。如果使用三帧基本算法，第一个推导出的算法如下

$$\tan\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2(I_3-I_2)}{I_1-I_2-I_3+I_4} \tag{14.80}$$

而如果使用四帧基本算法，第一个推导出的算法（Schwider et al.，1983）为

$$\tan\phi=\frac{2(I_4-I_2)}{I_1-2I_3+I_5} \tag{14.81}$$

施密特和克里思（Schmit and Creath）1995年证明，该平均技术可以扩展以获得进一步的补偿。使用这个“扩展平均”技术，可以得到一个 $N+2$ 阶处理方法，意思是相对于所述基本算法需要另加两阶

$$\tan\phi=\frac{N}{D}=\frac{(N_0+N_{\pi/2})+(N_0+N_{\pi/2})_{\pi/2}}{(D_0+D_{\pi/2})+(D_0+D_{\pi/2})_{\pi/2}}=\frac{N_0+2N_{\pi/2}+N_\pi}{D_0+2D_{\pi/2}+D_\pi} \tag{14.82}$$

在1996年，施密特和克里思发表了还有一个混合并匹配不同算法再平均的可能性。这种多次平均技术可以用来推导带有优化光强采样窗口函数的几种算法

$$\tan\phi=\frac{N}{D}=\frac{\sum_i N_i}{\sum_i D_i} \tag{14.83}$$

总结以上讨论的各种算法和在表14.2中分成两类的其余算法。A类是从四帧算法采用90°相位步距演化而来（式（14.27））。B类基于三步基本算法。

表14.2 使用一个基本算法和平均技术衍生的算法

帧	A类：$\tan\phi=$	B类：$\tan\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right)=$	相 移
基数	$\frac{I_2-I_4}{I_3-I_1}$	$\frac{I_3-I_2}{I_1-I_2}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$
4		$\frac{2(I_3-I_2)}{I_1-I_2-I_3+I_4}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$
5	$\frac{2(I_4-I_2)}{I_1-2I_3+I_5}$	$\frac{3(I_3-I_2)+I_4-I_5}{I_1-I_2-3I_3+3I_4}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$
6	$\frac{4I_4-3I_2-I_6}{I_1-4I_3+3I_5}$	$\frac{4(I_3-I_2+I_4-I_5)}{I_1-I_2-6I_3+6I_4+I_5-I_6}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$
7	$\frac{4(2I_4-I_2-I_6)}{I_1-7I_3+7I_5-I_7}$	$\frac{5I_3-5I_2+10I_4-10I_5-I_6+I_7}{I_1-I_2-10I_3+10I_4+5I_5-5I_6}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$
8	$\frac{15I_4-5I_2-11I_6-I_8}{I_1-11I_3+15I_5-5I_7}$	$\frac{-2(3I_2-3I_3-10I_4+10I_5+3I_6-3I_7)}{I_1-I_2-15(I_3-15I_4-15I_5+15I_6)-I_7+I_8}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$

14.7.5 哈里哈伦算法

对参考相移标定误差不敏感的、获得与式（14.81）相同的PSI算法的另一种方法由哈里哈伦等（1987）提出。他们使用五个干涉光强测量值，初始假设每帧之间有一个线性相移 α

$$\delta_i=-2\alpha,-\alpha,0,\alpha,2\alpha \qquad i=1,2,3,4,5 \tag{14.84}$$

那么

$$I_1(x,y)=I'(x,y)+I''(x,y,\Delta)\cos[\phi(x,y)-2\alpha] \tag{14.85}$$

$$I_2(x,y)=I'(x,y)+I''(x,y,\Delta)\cos[\phi(x,y)-\alpha] \tag{14.86}$$

$$I_3(x,y)=I'(x,y)+I''(x,y,\Delta)\cos[\phi(x,y)] \tag{14.87}$$

$$I_4(x,y)=I'(x,y)+I''(x,y,\Delta)\cos[\phi(x,y)+\alpha] \tag{14.88}$$

以及

$$I_5(x,y)=I'(x,y)+I''(x,y,\Delta)\cos[\phi(x,y)+2\alpha] \tag{14.89}$$

这五个方程，经扩展和合并后形成中间结果

$$\frac{\tan[\phi(x,y)]}{2\sin\alpha}=\frac{I_2-I_4}{2I_3-I_5-I_1} \tag{14.90}$$

由于相移 α 的选择是开放的，可以通过选择它来尽量减少该表达式中相移误差的变化。当 $\phi(x,y)=\pi/4$ 时，该函数的图形如图 14.14 所示。该方程对 α 求微分，发现

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left\{\frac{\tan[\phi(x,y)]}{2\sin\alpha}\right\}=\frac{-\cos\alpha\tan[\phi(x,y)]}{2\sin^2\alpha} \tag{14.91}$$

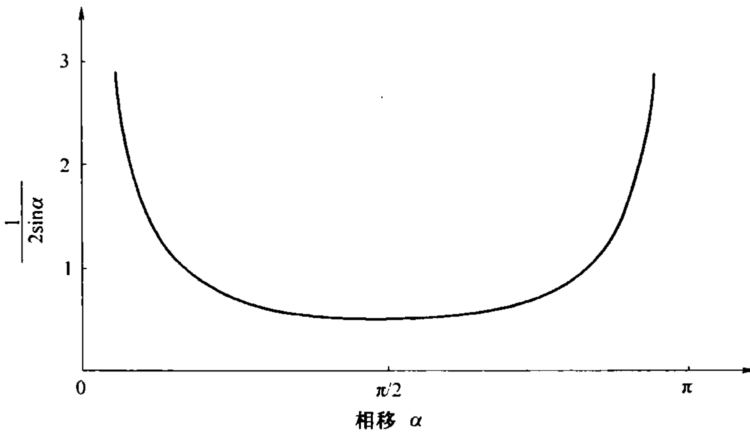


图 14.14 当 $\phi(x,y)=\pi/4$ 时式（14.90）的图形

当 $\alpha=\pi/2$ 时，式（14.91）趋于零。当使用此值作为相移值时，式（14.90）对相移校正错误变得不敏感，且式（14.90）就简化成最终的算法

$$\phi(x,y)=\arctan\left[\frac{2(I_2-I_4)}{2I_3-I_5-I_1}\right] \tag{14.92}$$

每个测量点的数据调制也能够确定

$$\gamma(x,y)=\frac{3[4(I_4-I_2)^2+(I_1+I_5-2I_3)^2]^{1/2}}{2(I_1+I_2+2I_3+I_4+I_5)} \tag{14.93}$$

应该注意，这两个结果的和四步算法（式（14.27）和式（14.30））结果的形式之间的某种相似性，后者也使用90°的相移。因为 I_1 和 I_5 名义上是相同的，这两个多项式表面上有一个额外的偏置量 I_3，它是 180°的异相项。

在式（14.90）的曲线图中（见图 14.14），其最小值在 90°中心点并且取值范围很宽。因此，哈里哈伦算法可以在所计算的波前相位中包容较大的相移误差（Hariharan et al.，1987）。如果每次测量之间的相移为 $\pi/2+\varepsilon$，那么存在一个相应的相位测量值 $\phi'(x,y)=\phi(x,y)+\Delta\phi(x,y)$，它可以使用式（14.90）近似并假设 ε 较小

$$\tan[\phi'(x,y)]\approx[1+(\mathrm{e}^2/2)]\tan[\phi(x,y)] \tag{14.94}$$

相位测量中的误差现在也容易确定

$$\Delta\phi(x,y)=\phi'(x,y)-\phi(x,y)\approx(e^2/4)\sin[2\phi(x,y)] \tag{14.95}$$

该误差是波前相位的函数，如果测量之间（88°而不是90°）线性相移中有2°的变化，那么最大误差大约为0.02°。针对标准算法，如三步算法，同样的相移误差会导致1°量级的测量误差。

14.7.6 2+1算法

PSI算法都需要用一系列光强测量值来计算波前相位。由于通常用视频相机来记录光强图形，光学系统必须保持稳定，而且在图像采集时间之内气流要减到最小。不满足这些条件，可能导致测量误差或者得到的数据不能用于分析。在许多情况下，例如大口径光学元件测试，这项要求可能很难做到或不切实际。

2+1算法（Angel and Wizinowich，1988；Wizinowich，1989、1990）要处理的问题是存在振动的PSI检测，即通过第一次快速采集两帧带有90°相移的关键时间干涉图进行，以监测光强调制；随后记录第三幅干涉图，该图给出整个视场的平均光强。第三帧干涉图是带有180°相移的两帧干涉图的平均；一组条纹的的顶峰落在另一组的低谷，抵消了条纹图形。有了这个系统，相移就为

$$\delta_i=0,-\pi/2,0,\pi;\qquad i=1,2,3 \tag{14.96}$$

而且记录下的三帧干涉图为

$$I_1(x,y)=I'(x,y)+I''(x,y)\cos[\phi(x,y)] \tag{14.97}$$

$$\begin{aligned}I_2(x,y)&=I'(x,y)+I''(x,y)\cos[\phi(x,y)-\pi/2]\\&=I'(x,y)+I''(x,y)\sin[\phi(x,y)]\end{aligned} \tag{14.98}$$

和

$$I_3(x,y)=\frac{1}{2}\{I'(x,y)+I''(x,y)\cos[\phi(x,y)]\}+\frac{1}{2}\{I'(x,y)+I''(x,y)\cos[\phi(x,y+\pi)]\} \tag{14.99}$$

这三个方程式可以轻易地求解出波前相位和在每个测量点记录的数据调制

$$\phi(x,y)=\arctan\left(\frac{I_2-I_3}{I_1-I_3}\right) \tag{14.100}$$

以及

$$\gamma(x,y)=\frac{[(I_2-I_3)^2+(I_1-I_3)^2]^{1/2}}{I_3} \tag{14.101}$$

或许，比算法本身更有趣的是执行2+1算法需要的硬件。该系统曾经由维兹罗维奇（Wizinowich，1990）详细描述，在此回顾其中两个主要设计特点。首先要求记录的两次关键时间干涉图（I_1 和 I_2）之间有尽量小的时间滞后。常见的固态传感器结构是隔行转移电荷耦合器件。传感器上每个成像像素位置附近都会伴随着一个相邻的存储像素。在激活的成像像素正在为下一帧视频扫描区域收集光子期间，那些储存像素被读出并产生视频信号。在该收集周期结束时，在活跃像素收集到的电荷被迅速转移到现在的空储存点，并进行下一帧视频区域的采集。这次转移发生在大约1μs的时间内。这种传感器可能带有一个同步快门，在大约为1ms的时间内记录两次曝光并且间隔为1μs；在电荷转移之前记录第一幅，第二幅的记录在转移之后。这两幅记录的干涉图以标准的视频速度读出，并可以被数字化。

第二个系统要求是适当的相移应用于这两次曝光。已经得到应用的系统如图14.15所

示。带有两块直角棱镜的旋转转盘在上下光束中分别引入了大小相等、方向相反的多普勒频移 $\pm\Delta v$。由于1/4波片的存在，重新合成的光束同样是正交偏振的。普克尔盒选择任一束或两束偏振光进入干涉仪，并且快门控制适当的曝光时间。所有这些器件必须与探测器阵列同步。该干涉仪系统使用的是非偏振光，那么任何入射偏振光可以同时进入干涉仪的参考臂和检测臂（这不是在14.4节的式（14.12）所叙述的情况）。因此，个别的干涉图是由两束不同的光学波长或频率之一形成，而且记录的两个频率干涉图之间的相对相移 α 与干涉仪两个光路之间的光程差 OPD 有关系

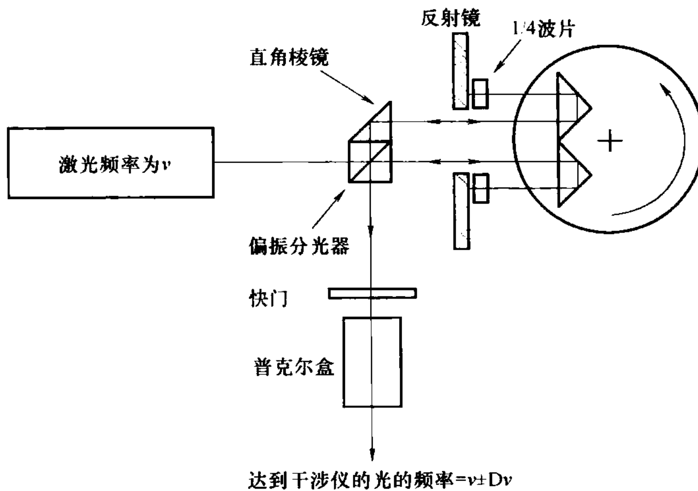


图14.15 生成2+1算法的相移的系统（Wizinowich，1990）

$$\alpha = 2\pi OPD\Delta v / c \tag{14.102}$$

其中，c 是光速。这个相移量等于两种光波周期数之差，即两种光波频率表示的光程差 OPD。两束光的频移 Δv 是转台的转速和尺寸的函数。如果有10m的光程差，就需要一个小的频移，大约 $1/10^8$。为了得到期望的相移，要选择转台的转速。

该系统的操作如下：相移设置为90°，两帧与时间相关的干涉图记录在CCD的两个隔行转移面上。普克尔盒在曝光之间进行切换，于是每一帧只使用唯一的光学频率。这两帧干涉图经数字化并存储之后，转盘速度随180°的相移而改变。在这一点上，普克尔盒设置为允许两个频率都进入干涉仪的状态，并记录第三帧或平均的干涉图（两帧干涉图成像在探测器上）。这个系统已经显示出对振动的消除效应并可以用于PSI分析。

有振动的情况下，另一种用于PSI检测的方法是，通过采用高速视频相机来加快标准算法的计算速度（Greivenkamp，1987a）。相移的速度也必须加快；但是当采用不需要起—停动作的bucket积分方法时，这尤其不成问题。然而，应当指出的是，加快帧频并不能保证免于误差的影响。

14.7.7 生成算法的方法

改善PSI算法的两种遗传方法已经在本章前面的内容中介绍过了，分别有：布朗林等（Bruning et al.，1974）论述的原始N阶bucket技术和施温德等（Schwider et al.，1983）发表的平均技术，还有施密特和克里思（Schmit and Creath，1995、1996）的扩展平均技术。

拉金（Larkin）和欧比（Oreb，1992），以及稍后的塞瑞尔（Surrel，1993、1996、

1998）和哈宾（Hibino et al.，1995、1997、1998），建立了一套先进的理论和用于算法设计的通用方法。虽然颇为类似，但也有不同之处，在于采用的算法推导方式不同、需要的采样点数量不同，以及相对各种误差源的算法敏感性不同。在此分出的第一类算法是所谓的 $N+1$ 阶 bucket 对称相移算法，有两种类型，A 型和 B 型。A 型（式（14.103））和 B 型（式（14.104））最早由拉金与欧比（1992）推出，稍后由塞瑞尔（1993）重新定义。

$$\tan\phi = \frac{\sum_{i=2}^{N} I_i \sin\left(i\frac{2\pi}{N}\right)}{\frac{I_1 + I_{N+1}}{2} + \sum_{i=2}^{N} I_i \cos\left(i\frac{2\pi}{N}\right)} \tag{14.103}$$

$$\tan\phi = \frac{\frac{I_{N+1} - I_1}{2}\cot\left(\frac{2\pi}{N}\right) - \sum_{i=2}^{N} I_i \sin\left(i\frac{2\pi}{N}\right)}{\frac{I_1 + I_{N+1}}{2} + \sum_{i=2}^{N} I_i \cos\left(i\frac{2\pi}{N}\right)} \tag{14.104}$$

这两种算法的不同之处在于第一帧和最后一帧的权重不一样。B 型用于对相移误差的普通校正。

表 14.3 列出 $N+1$ 阶 bucket 算法使用四帧、五帧和七帧的方案。注意五帧的方案对于类型 A 和 B 是相同的，并且基于这样的情况：即当 $N=4$ 时，方程（14.98）中的余切函数为零，就得到了 $N+1=5$ 帧算法。该算法也与施温德（Schwider et al.，1983）（式（14.81））以及哈里哈伦等（Hariharan et al.，1987b）（式（14.92））提出的五阶 bucket 算法是相同的，减小了由相移引入的误差。

一种更完善的方法叫做窗口 DFT 算法（WDFT），由塞瑞尔（Surrel，1996）提出。由式（14.105）衍生而来的算法，对阶数达 $j=N-2$ 的谐波，甚至在没有校正相移的情况时都不敏感。

$$\tan\phi = \frac{-\sum_{i=1}^{N-1} i(I_i - I_{2N-i})\sin\left(i\frac{2\pi}{N}\right)}{NI_N - \sum_{i=1}^{N-1} i(I_i + I_{2N-i})\cos\left(i\frac{2\pi}{N}\right)} \tag{14.105}$$

表 14.3　$N+1$ 阶 bucket 算法

帧	A 型算法（$\tan\phi=$）	B 型算法（$\tan\phi=$）	相　移
四	$\frac{\sqrt{3}(I_2-I_3)}{-I_1+I_2+I_3-I_4}$	$\frac{I_1-3I_2+3I_3-I_4}{\sqrt{3}(I_1-I_2-I_3+I_4)}$	$\delta_i=(i-1)\frac{2\pi}{3}$
五	$\frac{2(I_4-I_2)}{I_1-2I_3+I_5}$		$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$
七	$\frac{-\sqrt{3}(I_2+I_3-I_5-I_6)}{I_1+I_2-I_3-2I_4-I_5+I_6+I_7}$	$\frac{-(I_1+3I_2+3I_3-3I_5-3I_6-I_7)}{\sqrt{3}(I_1+I_2-I_3-2I_4-I_5+I_6+I_7)}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{3}$

表 14.4 所示为 WDFT 算法组的前三阶算法。请注意 $\pi/2$ 的步长现在是用在七帧的情况，说明如果要用更先进的算法就需要更多 2π 以外的帧数。

表 14.4 WDFT 算法组的前三阶算法

帧	算法	相移
四	$\tan\phi=\dfrac{\sqrt{3}(I_1-2I_2+2I_4-I_5)}{I_1+2I_2-6I_3+2I_4+I_5}$	$\delta_i=i\dfrac{2\pi}{3}$
七	$\tan\phi=\dfrac{I_1-3I_3+3I_5-I_7}{2(I_2-2I_4+I_6)}$	$\delta_i=i\dfrac{\pi}{2}$
十一	$\tan\phi=\dfrac{-\sqrt{3}(I_1+2I_2-4I_4-5I_5+5I_7+4I_8-2I_{10}-I_{11})}{I_1-2I_2-6I_3-4I_4+5I_5+12I_6+5I_7-4I_8-6I_9-2I_{10}+I_{11}}$	$\delta_i=i\dfrac{\pi}{3}$

1997 年，针对非线性和空间非均匀的相移，哈宾等发表了一个更完善的算法，称为 $N+3$算法（式 14.106）。

$$\tan\phi=\frac{\dfrac{1}{4}(I_0+I_1-I_{N+2}-I_{N+3})\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{N+2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{N+2}\right)}+\sum_{i=1}^{N+2}I_i\sin\left(\dfrac{2\pi}{N+2}\right)\left(i-\dfrac{N+5}{2}\right)}{\dfrac{1}{4}(I_0-I_1-I_{N+2}+I_{N+3})\dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{N+2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{N+2}\right)}+\sum_{i=1}^{N+2}I_i\cos\left(\dfrac{2\pi}{N+2}\right)\left(i-\dfrac{N+5}{2}\right)} \tag{14.106}$$

表 14.5 分别总结了 $N+3$ 阶 bucket 算法的前三阶（即五、六和八帧）的情况。

表 14.5 $N+3$ 阶 bucket 算法的前三阶的情况

帧编号	算法	相移
五	$\tan\phi=\dfrac{3\sqrt{3}(I_4-I_2)}{2I_1+I_2-6I_3+I_4+2I_5}$	$\delta_i=(i-3)\dfrac{2\pi}{3}$
六	$\tan\phi=\dfrac{I_1-3I_2-4I_3+4I_4+3I_5-I_6}{I_1+3I_2-4I_3-4I_4+3I_5+I_6}$	$\delta_i=\left(i-\dfrac{7}{2}\right)\dfrac{\pi}{2}$
八	$\tan\phi=\dfrac{2I_1-I_2-6I_3-3I_4+3I_5+6I_6+I_7-2I_8}{3\sqrt{3}(I_2-I_4-I_5+I_7)}$	$\delta_i=\left(i-\dfrac{9}{2}\right)\dfrac{\pi}{3}$

表 14.6 概括了本章讨论的所有方法。

表 14.6 本章介绍过的算法集的概况（注意复杂性增加的通用公式）

各种算法：$\tan\phi=$		相位步长	参考文献
$\dfrac{-\sum_{i=1}^{N}I_i\sin\left(i\dfrac{2\pi}{N}\right)}{\sum_{i=1}^{N}I_i\cos\left(i\dfrac{2\pi}{N}\right)}$	$\delta_i=(i-1)\dfrac{2\pi}{N}$	N 阶 Bucket 离散傅里叶算法	Bruning，1974
$\dfrac{N}{D}=\dfrac{N_0+N_{\pi/2}}{D_0+D_{\pi/2}}$	$\delta_i=(i-1)\dfrac{2\pi}{N}$	$N+1$ 平均算法	Schwider et al.，1983
$\dfrac{N}{D}=\dfrac{(N_0+N_{\pi/2})+(N_0+N_{\pi/2})_{\pi/2}}{(D_0+D_{\pi/2})+(D_0+D_{\pi/2})_{\pi/2}}=\dfrac{N_0+2N_{\pi/2}+N_\pi}{D_0+2D_{\pi/2}+D_\pi}$	$\delta_i=(i-1)\dfrac{2\pi}{N}$	$N+2$ 阶扩展平均算法	Schmit and Creath，1995

（续）

各种算法：$\tan\phi=$		相位步长	参考文献
$\frac{N}{D}=\frac{\sum_i N_i}{\sum_i D_i}$	$\delta_i=(i-1)\frac{2\pi}{N}$	$N+m$ 阶多重平均算法	Schmit and Creath，1996
$\frac{\sum_{i=2}^{N} I_i\sin\left(i\frac{2\pi}{N}\right)}{\frac{I_1+I_{N+1}}{2}+\sum_{i=2}^{N} I_i\cos\left(i\frac{2\pi}{N}\right)}$	$\delta_i=(i-1)\frac{2\pi}{N}$	$N+1$ 阶 bucket 对称相移 A 型算法	Larkin and Oreb，1992
$\frac{\frac{I_{N+1}-I_1}{2}\cot\left(\frac{2\pi}{N}\right)-\sum_{i=2}^{N} I_i\sin\left(i\frac{2\pi}{N}\right)}{\frac{I_1+I_{N+1}}{2}+\sum_{i=2}^{N} I_i\cos\left(i\frac{2\pi}{N}\right)}$	$\delta_i=(i-1)\frac{2\pi}{N}$	$N+1$ 阶 bucket 对称相移 B 型算法	Larkin and Oreb，1992；Surrel，1993
$\frac{-\sum_{i=1}^{N-1} i(I_i-I_{2N-i})\sin\left(i\frac{2\pi}{N}\right)}{NI_N-\sum_{i=1}^{N-1} i(I_i+I_{2N-i})\cos\left(i\frac{2\pi}{N}\right)}$	$\delta_i=i\frac{2\pi}{N}$	窗口 DFT 算法	Surrel，1996
$\frac{\frac{1}{4}(I_0+I_1-I_{N+2}-I_{N+3})\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{N+2}\right)}{\sin^2\left(\frac{2\pi}{N+2}\right)}+\sum_{i=1}^{N+2} I_i\sin\left(\frac{2\pi}{N+2}\right)\left(i-\frac{N+5}{2}\right)}{\frac{1}{4}(I_0-I_1-I_{N+2}+I_{N+3})\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{N+2}\right)}{\sin^2\left(\frac{2\pi}{N+2}\right)}+\sum_{i=1}^{N+2} I_i\cos\left(\frac{2\pi}{N+2}\right)\left(i-\frac{N+5}{2}\right)}$	$\delta_i=(i-1)\frac{2\pi}{N}$	$N+3$ 阶 bucket 算法	Hibino，1997

14.7.8 评估算法的方法

随着算法的发展，与评估算法精度、速度、误差源及对不同应用场合的适宜性的相关理论也得到了长足的发展。

其中最强大的分析技术之一由弗瑞斯卡莱德和科累欧劳斯（Freischlad and Koliopoulos，1990）提出，该技术把对相位的评价当做频域中的滤波作用。

1. 傅里叶描述

一般来说，相位的评价可以被视为带有两个描述相移算法的真实函数f_N、f_D和真实信号$I(\phi)$的互相关。这就是相关函数c_N，c_D，可以定义为

$$c_i(t)=\int_{-\infty}^{\infty} I(\phi)f_i(\phi+t)\mathrm{d}\phi \tag{14.107}$$

特殊情况下，第M离散点处对光强进行数字化后的数字探测量默认为

$$c_i(t)=\sum_{n=1}^{M} I(\phi)f_i(\phi+t) \tag{14.108}$$

通过梳状采样，采样过程已并入到滤波函数中

$$f_x(t)=\sum_{l=0}^{M} a_{x,l}\delta(t-t_l) \tag{14.109}$$

式中，a_l为第l次离散采样的实系数；$t_l=lT_f/M$表示等距采样的位置。

现在如果将此方法用于特殊算法，例如由施温德等（1983）提出的五阶 bucket 算法，就会得到

$$f_N(\phi)=2\left(\delta\left(\phi+\frac{3\pi}{2}\right)-\delta\left(\phi+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$f_D(\phi)=\delta(\phi)-2\delta(\phi+\pi)+\delta(\phi+2\pi) \tag{14.110}$$

这些滤波函数的频谱通过使用离散傅里叶变换很容易得到

$$F_x(v)=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{r=1}^{M}f_x(\phi)e^{i\phi(v/v_f)} \tag{14.111}$$

得到两个频谱 $\mathscr{F}_x$

$$\mathscr{F}_N(v)=-4i\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{v}{v_f}\right)e^{-i\pi(v/v_f)}$$
$$\mathscr{F}_D(v)=2\left(\cos\left(\frac{v}{v_f}\pi\right)-1\right)e^{-i\pi(v/v_f)} \tag{14.112}$$

这些频谱在图 14.16b 中绘出。请注意，两个频谱在基频时都有相同的振幅。以类似的方式，三步算法就形成了以下滤波函数，如图 14.16a 所示。

$$\mathscr{F}_N(v)=2\sqrt{3}i\sin\left(v\frac{\pi}{3}\right)e^{-iv\pi}$$
$$\mathscr{F}_D(v)=-2+2e^{-iv\pi}\cos\left(v\frac{\pi}{3}\right) \tag{14.113}$$

拉金和欧比（Larkin and Oreb，1992）算法的频谱如图 14.16c 所示。

$$\mathscr{F}_N(v)=-2i\sqrt{3}\left(\sin\left(v\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(v\frac{2\pi}{3}\right)\right)e^{-iv\pi}$$
$$\mathscr{F}_D(v)=-4\left(1+2\cos\left(v\frac{\pi}{3}\right)\sin^2\left(v\frac{\pi}{3}\right)\right)e^{-iv\pi} \tag{14.114}$$

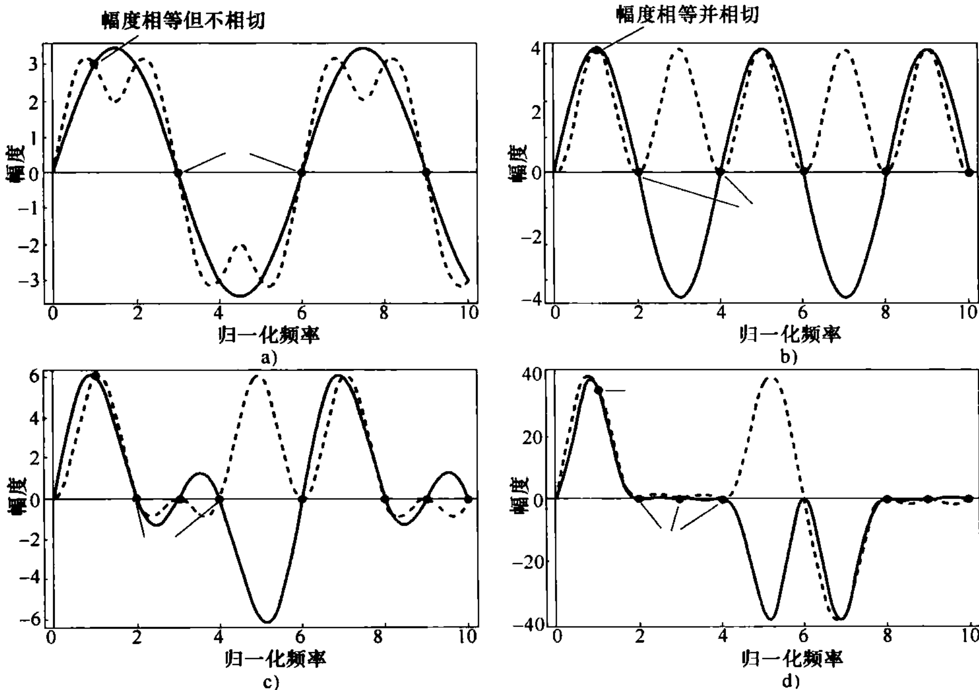


图 14.16 各种算法采样函数的频谱

对于哈宾（Hibino，1995）发展的更先进的算法，频谱分量如下给出，如图14.16d所示。

$$\mathscr{F}_N(v)=32\sqrt{3}\cos^3\left(v\frac{\pi}{6}\right)\sin^2\left(v\frac{\pi}{2}\right)e^{-(3/2)v\pi}$$
$$\mathscr{F}_D(v)=16i\sin\left(v\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\left(v\frac{\pi}{3}\right)-2\right)\left(2\cos\left(v\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(v\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 \tag{14.115}$$

为了确定与滤波函数相关的入射信号的相位，两个滤波函数之比定义为

$$r=\frac{c_N}{c_D}=\frac{a_0F_N(0)+2\mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty}a_nF_N^*(nv_s)\right]}{a_0F_D(0)+2\mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty}a_nF_D^*(nv_s)\right]} \tag{14.116}$$

为了确定第 m 次谐波信号的相位 ϕ_m，以下条件必须满足一个

$$a_nF_N^*(nv_g)=-iA\delta(n,m)$$
$$a_nF_D^*(nv_g)=A\delta(n,m) \tag{14.117}$$

这样形成的结论是当 $v=nv_g$ 时，a_n 分量应该是90°的异相和相等的幅度

$$F_n(nv_g)=iF_D(nv_g) \tag{14.118}$$

如同弗瑞斯卡莱德等（Freischlad et al.，1990）所述，相位等于比例 c_N/c_D 的反正切，独立于振幅 $|s_m|$ 而且也独立于带有一个常量偏置的信号的所有其他频率分量。

$$\phi=\arctan(r)+\text{const} \tag{14.119}$$

对于一个给定的基频 v_g，式（14.118）只能在某些信号频率才能满足。近一步，如弗瑞斯卡莱德（Freischlad，1990）和拉金及欧比（Larkin and Oreb，1992）所示，以下特性可以通过傅里叶描述而得到：

1）当采样函数的分子和分母的傅里叶变换幅度相等时，该算法对 m 次谐波不敏感，即

$$F_N\left(\frac{v}{v_f}\right)=F_D\left(\frac{v}{v_f}\right)=0$$

2）如果对谐波 m 的傅里叶变换的斜率相等，即 $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}F_N\ (v_f)\right)_{v=v_f}=i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}F_D\ (v_f)\right)_{v=v_f}$，该算法对该次谐波的失校准不敏感。

3）当在基频的傅里叶变换的第 k 阶导数相等（条件1）及在谐波频率（$k\geqslant2$）处的 k 阶导数为0（条件2）时，就能获得对相移误差和 k 次谐波的不敏感度。

2. 特征多项式

塞瑞尔（1996）提出了一个非常简明的分析方法。该方法使用一个特征多项式来描述算法，而且与前面所述的傅里叶方法的关系不需要很紧密。该方法保证了记录的相干信号光强 $I(\phi)$ 是一个周期函数，因此能够扩展成为一个傅里叶级数。

$$I(\phi+\delta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\beta_m(\phi)\exp(im\delta) \tag{14.120}$$

于是，各种相移算法被用作评价的傅里叶系数变量 β_1，该系数对应于该光强信号的基频谐波。将这些算法写作 $I(\phi+\delta)$ 的两个线性组合比例的反正切，得到

$$\phi=\arctan\left[\frac{\sum_{n=0}^{N}b_NI(\phi+n\delta)}{\sum_{n=0}^{N}a_NI(\phi+n\delta)}\right] \tag{14.121}$$

代入指数项 γ，特征多项式的复变量 z，以及 c_n，c_n 作为其相应的 n 阶系数

$$\phi = \arg\left[\sum_{n=1}^{N}(a_n + ib_k)I(\phi + n\delta)\right] = \arg\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\beta_m(\phi)\underbrace{\sum_{n=1}^{N}\overbrace{(a_n + ib_n)}^{c_n}\underbrace{[\exp(im\delta)]}_{z}}_{P(z)}\right] \tag{14.122}$$

就得到了形式非常紧凑的特征多项式

$$P(z) = \sum_{n=1}^{N} c_n z^{n-1} \tag{14.123}$$

多项式系数 c_n 是对应于该算法的特定系数，作为分子的系数或余弦部分 a_n，以及分母的系数或余弦部分 b_n。例如，如果布朗林（Bruning，1974）的三步算法采用 120°步长，特征多项式为

$$P_{\text{Bruning74}}(Z) = -2 + z + i\sqrt{3}z + z^2 - i\sqrt{3}z^2 \tag{14.124}$$

可以通过简单的求根得到的特征多项式，从而得出一个关于算法性能的结论。对于布朗林（Bruning，1974）的算法，只有两个单根

$$z = \left\{1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \tag{14.125}$$

当单值根 $z=1$ 时，算法可以探测到基频，但不存在双根证明了该算法没有补偿失调的能力。相比之下，施温德（1993）的算法有一个双根，使其对相移失调不敏感

$$\begin{aligned}&P_{\text{Schwider93}}(Z) = (-1-i) - (1-3i)z + (3-i)z^2 - (1+i)z^3\\&z_{\text{sin gleroots}} = \{1\} \qquad z_{\text{doubleroots}} = \{-i\}\end{aligned} \tag{14.126}$$

早在 1983 年提出的施温德算法，由于在正、负 m 阶谐波处各有一个单根，所以对 m 阶谐波不敏感

$$\begin{aligned}&P_{\text{Schwider83}}(z) = 1 - 2iz - 2z^2 + 2iz^3 + z^4\\&z_{\text{sin gleroots}} = \{-1, 1\} \qquad z_{\text{doubleroots}} = \{-1 - i\}\end{aligned} \tag{14.127}$$

哈宾的算法对一次谐波只有一个单根，但是对以下许多高次谐波有双根，使得算法对这些高次谐波不敏感

$$\begin{aligned}P_{\text{Hibino95}}(z) = {}&1 - i\sqrt{3} - z - 3i\sqrt{3}z - 7z^2 - 3i\sqrt{3}z^2 - 11z^3 + i\sqrt{3}z^3 - 6z^4 + 6i\sqrt{4}z^4 + 6z^5 +\\&6i\sqrt{3}z^5 + 11z^6 + i\sqrt{3}z^6 + 7z^7 - 3i\sqrt{3}z^7 + z^8 - 3i\sqrt{3}z^8 - z^9 - i\sqrt{3}z^9\\z_{\text{Singleroots}} = \{1\} \qquad &z_{\text{doubleroots}} = \left\{-1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\end{aligned} \tag{14.128}$$

使用特征多项式的特性归纳如下，就如塞瑞尔（Surrel，1996）原来提出的

1）为了探测基频（$m=1$），该特征多项式在 $z=-m$ 时有一个根，但在 $z=+m$ 时没有。

2）如果该特征多项式在 $z=\pm m(m\neq 1)$ 时有根，那么该算法对 m 次谐波分量不敏感。

3）当 $z=-m$ 或 $z=m$ 中只有一个是特征多项式的双根而另一个不是，那么谐波分量可以被探测到，但该算法仍然对相移的失调不敏感。

4）如果 $z=-m$ 或 $z=m$ 两个都是该特征多项式的双根，那么该算法对谐波分量（m）

不敏感，以及在这种情况下对相移的失调也不敏感。

在 1996 年，塞瑞尔也说明了一个来表现该特征多项式的特性的简洁方法。这里如图 14.17 所示，算法的相位步长绘成沿着单位圆的实线，其中线与原点的角度相当于相位的步长。线与单位圆交叉点上的大黑点对应特定谐波的根。如果该点周围有一个圆圈，就表明在那种情况下存在一个双根。图 14.18 所示为表 14.7 和表 14.8 中算法的特征多项式例证曲线图。此外，有一条从中心画出的粗线，表示有重叠，此处相位分步包括超过了一个完整周期 2π 的步长值。

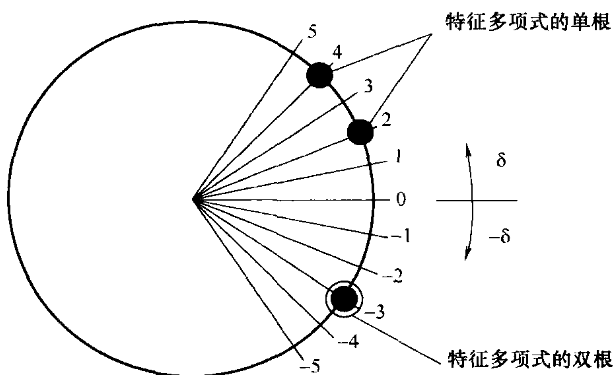


图 14.17　用于特定算法的特征多项式图形

（大的黑点表示第 m 阶的单根，圆圈点表示双根）

14.7.9　算法总结

在本节，我们研究了许多不同的 PSI 算法。它们都需要在参考相位移动时记录一系列干涉图。然后在每个测量点计算波前相位，该波前相位是测量该点上光强的函数。在得到最终的相位分布图前，这些计算结果必须经过一个相位展开过程。这些算法采用以下两种方法都有效，分步相位采集法和 bucket 数据积分采集法。在 14.9 节中，我们将研究这些算法关于误差源的特性，以帮助选择更适合于特殊应用的算法。通过画出每帧记录的干涉图需要的平均参考相位角，许多算法在图 14.18 中进行图上比较。

因为反正切函数具有的特性，对于相移量为 π 的倍数的算法没有任何差别

$$\tan(\phi + n\pi) = \tan\phi \tag{14.129}$$

马拉卡拉等（Malacara et al., 2005）也总结了 $\pi/2$ 和 $\pi/4$ 相移算法的效果。当所有相位移动量是一个常量时，是无关紧要的，但是可以改变算法的外形。以 $\phi+\pi/2$ 替代 ϕ，得到

$$\tan\left(\phi + n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos\phi}{-\sin\phi} = \frac{D}{-N} \tag{14.130}$$

式（14.130）相当于采样函数的一个简单变换，并且其中一项的符号改变了，但是现在的采样点被定位到相位移动了 $\pm\pi/2$ 之处。

以 $\phi+\pi/4$ 替代 ϕ，得到

$$\tan\left(\phi + n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\phi + \sin\phi}{\cos\phi - \sin\phi} = \frac{D+N}{D-N} \tag{14.131}$$

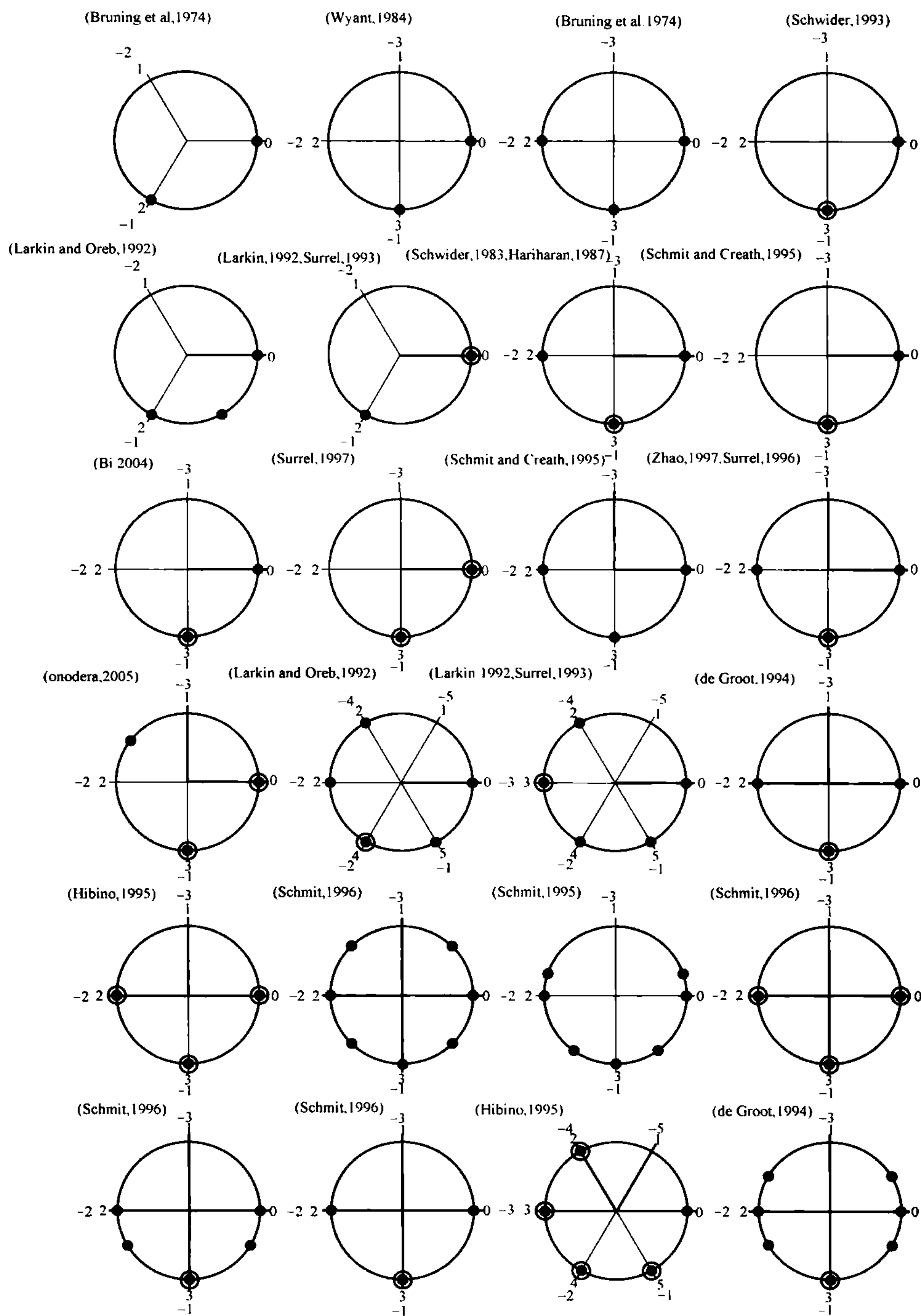


图 14.18 表 14.7 和表 14.8 中算法的特征多项式例证曲线图（也显示了对应特定谐波的单双根）

这些和其他的变换可能导致数学上或计算上的简化，以便提高效率，或增强针对特定应用场合的理解。马拉卡拉等（2005）发表了一种算法，其中参考采样函数对所有频率都是正交的，但振幅不相等；转变成另一种算法后，其中参考采样函数在所有频率处的振幅相等，但仅在某些频率处正交。

表 14.7 和表 14.8 总结了现有算法及其与 $\pi/4$ 相位移动相匹配的特性。

表 14.7　高达 5 阶的 bucket 算法及其特性的概述

N	算法		相位步长	家族						参考文献	误差行为			
	$\tan\phi =$	$\tan\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right)=$		N 阶 bucket 算法	A 类平均算法	B 类平均算法	N+1 阶 A 型	N+1 阶 B 型	窗口 DFT		线性相移	振动	振动扰动	探测器的非线性
3	$\frac{\sqrt{3}(I_2-I_3)}{I_2+I_3-2I_1}$	$\frac{2I_1-I_2-\sqrt{3}(I_2-I_3)+I_3}{2I_1-I_2+\sqrt{3}(I_2-I_3)-I_3}$	$\delta_i=(i-1)\frac{2\pi}{3}$	X						Bruning, et al. 1974				
	$\frac{I_1-2I_2+I_3}{I_1-I_3}$	$\frac{I_3-I_2}{I_1-I_2}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$							Wyant, 1984b				
4	$\frac{I_2-I_4}{I_3-I_1}$	$\frac{I_1-I_2-I_3+I_4}{I_1+I_2-I_3-I_4}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$	X						Bruning et al. , 1974				好
	$\frac{3I_2-(I_1+I_3+I_4)}{(I_1+I_2+I_4)-3I_3}$	$\frac{2(I_3-I_2)}{I_1-I_2-I_3+I_4}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$			X				Schwider et al. , 1993	好			
	$\frac{\sqrt{3}(I_2-I_3)}{I_2+I_3-I_1-I_4}$	$\frac{I_1-I_2-\sqrt{3}(I_2-I_3)-I_3+I_4}{I_1-I_2-\sqrt{3}(I_2-I_3)-I_3+I_4}$	$\delta_i=(i-1)\frac{2\pi}{3}$				X			Larkin and Oreb, 1992				
	$\frac{I_1-3I_2+3I_3-I_4}{\sqrt{3}(I_1-I_2-I_3+I_4)}$	$\frac{I_1-3I_2+3I_3+I_4+\sqrt{3}(I_1-I_2-I_3+I_4)}{-I_1+3I_2-3I_3-I_4+\sqrt{3}(I_1-I_2-I_3+I_4)}$	$\delta_i=(i-1)\frac{2\pi}{3}$					X		Surrel, 1993				
5	$\frac{2(I_4-I_2)}{I_1-2I_3+I_5}$	$\frac{I_1-2I_2-2I_3+2I_4+I_5}{I_1+2I_2-2I_3-2I_4+I_5}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$		X		X	X		Schwider et al. , 1983, Hariharan 1987	好	好	好	好
	$\frac{I_1-4I_2+4I_4-I_5}{I_1+2I_2-6I_3+2I_4+I_5}$	$\frac{I_1-I_2-3I_3+3I_4}{3I_2-3I_3-I_4+I_5}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$			X			X	Schmit and Creath, 1995				
	$\frac{3I_1-6I_2+4I_3-2I_4+I_5}{2I_1+2I_2-3I_3+2I_4-2I_5}$	$\frac{5I_1-3I_2+I_3-I_5}{-I_1+7I_2-7I_3+4I_4-3I_5}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$							Bi, 2004				
	$\frac{I_1-2I_2+2I_4-I_5}{2(I_2-2I_3+I_4)}$	$\frac{-I_1+4I_3-4I_4+I_5}{I_1+4I_2-4I_3+I_5}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$							Surrel, 1997b				

表 14.8　6 ~ 11 阶的 bucket 算法及其特性的概述

N	算法		相位步长	家族						参考文献	误差行为			
	$\tan\phi=$	$\tan\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right)=$		N 阶 bucket 算法	A 类平均算法	B 类平均算法	N+1 阶 A 型	N+1 阶 B 型	窗口 DFT		线性相移	振动	振动扰动	探测器的非线性
6	$\frac{-\sqrt{3}(I_2+I_3-I_5-I_6)}{2I_1+I_2-I_3-2I_4-I_5+I_6}$	$\frac{2I_1+I_2-I_3-2I_4-I_5+I_6-\sqrt{3}(I_2+I_3-I_5-I_6)}{2I_1+I_2-I_3-2I_4-I_5+I_6+\sqrt{3}(-I_2-I_3+I_5+I_6)}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{3}$	X						Bruning et al., 1974	好			
6	$\frac{-3I_2+4I_4-I_6}{I_1-4I_3+3I_5}$	$\frac{I_1-3I_2-4I_3+4I_4+3I_5-I_6}{I_1+3I_2-4I_3-4I_4+3I_5+I_6}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$			X				Schmit and Creath, 1995		好	好	
6	$\frac{4I_4+I_5-I_1-3I_2-I_6}{I_1-I_2-4I_3+3I_5+I_6}$	$\frac{-2(I_2+I_3-I_4-I_5)}{I_1+I_2-2I_3-2I_4+I_5+I_6}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$							Zhao 1997, Surrel 1996, Malacara-Doblado, 2000				好
6	$\frac{I_1-4I_2+2I_3+2I_4+I_5-2I_6}{2I_1-I_2-2(I_3+I_4-2I_5)-I_6}$	$\frac{3I_1-5I_2+5I_3-3I_6}{I_1+3I_2-4I_3-4I_4+3I_5+I_6}$	$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$							Onodera, 2003				
7	$\frac{\sqrt{3}(-I_2-I_3+I_5+I_6)}{I_1+I_2-I_3-2I_4-I_5+I_6+I_7}$		$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{3}$				X			Larkin, and Oreb, 1992		好		好
7	$\tan\phi\frac{-I_1-3(I_2+I_3-I_5-I_6)+I_7}{\sqrt{3}(I_1+I_2-I_3-2I_4-I_5+I_6+I_7)}$		$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{3}$					X		Larkin and Oreb, 1992, Surre, 1993		好		非常好
7	$\tan\phi\frac{7(I_3-I_5)-(I_1-I_7)}{8I_4-4(I_2+I_6)}$		$\delta_i=(i-3)\frac{\pi}{2}$							de Groot, 1994			好	
7	$\tan\phi\frac{4I_4-2I_2-2I_6}{I_1-3I_3+3I_5-I_7}$		$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$						X	Hibino, 1995				好
8	$\tan\phi\frac{I_2-I_4+I_6-I_8}{I_1-I_3+I_5-I_7}$		$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$				X			Schmit, 1996				
8	$\tan\phi\frac{2I_2-4I_4+3I_6-I_8}{I_1-3I_3+4I_5-2I_7}$		$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$				X				好			
8	$\tan\phi\frac{3I_2-7I_4+5I_6-I_8}{I_1-7I_3+5I_5-3I_7}$		$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$				X				好	好	好	
8	$\tan\phi\frac{4I_2-11I_4+8I_6-I_8}{I_1-8I_3+11I_5-4I_7}$		$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$				X				好	好		
8	$\tan\phi\frac{5I_2-15I_4+11I_6-8I_8}{I_1-11I_3+15I_5-5I_7}$		$\delta_i=(i-1)\frac{\pi}{2}$				X				非常好	好		非常好
10	$\tan\phi\frac{\sqrt{3}(-I_1-3I_2-3I_3+I_4+6I_5+6I_6+I_7-3I_8-3I_9-I_{10})}{I_1-I_2-7I_3-11I_4-6I_5+6I_6+11I_7+7I_8+I_9-I_{10}}$									Hibino, 1995		非常好		非常好
11	$\tan\phi\frac{(I_1-I_{11})-8(I_3-I_9)+15(I_5-I_7)}{(4I_2+I_{10})-12(I_4+I_8)+16I_6}$		$\delta_i=(i-6)\frac{\pi}{2}$							de Groot, 1994	好			非常好

表14.7和表14.8回顾了讨论过的算法，也围绕误差行为给出了一些建议。如果寻求一个，特别是要抑制一种特定误差如大幅度振动频率（就像马拉卡拉等（2005）的书中所述）的算法可能是一个良好开端的话，这也是本书中所研究的，那么其中论述如何开发这些算法的文献可能就是一种针对具体需要的微调算法所需要的文献。

表14.9概述了现有算法的谐波敏感性。谐波敏感性是由讨论的傅里叶理论衍生出来的，并给出了特定谐波频率时的振幅。

表14.9　现有算法的谐波敏感性

算法	谐波抑制									帧
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	N
Bruning, et al., 1974	—	y	—	—	y	—	—	y	—	3
Wyant, et al., 1984b	—	—	y	—	—	—	y	—	—	
Bruning, et al., 1974	y	—	y	—	y	—	y	—	y	4
Schwider, 1993	—	—	y	—	—	—	y	—	—	
Larkin and Oreb. 1992	—	y	—	—	y	—	—	y	—	
Larkin, 1992; Surrel, 1993	—	y	—	—	y	—	—	y	—	
Schwider, 1983; Hariharan, 1987	y	y	y	—	y	y	y	—	y	5
Schmit and Creath, 1995	—	—	y	—	—	—	y	—	—	
Bi, 2004	—	—	y	—	—	—	y	—	—	
Surrel, 1997b	—	—	y	—	—	—	y	—	—	
Schmit and Creath, 1995	y	—	y	—	y	—	y	—	y	6
Zhao, 1997, Surrel, 1996	y	—	y	—	y	—	y	—	y	
Onodera, 2003	—	—	y	—	—	—	y	—	—	
Larkin and Oreb, 1992	y	y	y	—	y	—	y	y	y	7
Larkin, 1992; Surrel, 1993	y	y	y	—	y	—	y	y	y	
de Groot, 1994	y	—	y	—	y	—	y	—	y	
Hibino, 1995	y	—	y	—	y	—	y	—	y	
Schmit and Creath, 1996	y	—	y	—	y	—	y	—	y	8
Schmit and Creath, 1996	y	y	y	y	y	y	y	y	y	
Schmit and Creath, 1996	y	—	y	—	y	—	y	—	y	
Schmit and Creath, 1996	y	—	y	—	y	—	y	—	y	
Schmit and Creath, 1996	y	—	y	—	y	—	y	—	y	
Hibino, 1995	y	y	y	—	y	—	y	y	y	10
de Groot, 1994	y	—	y	—	y	—	y	—	y	11

在设计一个相移算法时，分步数量在原理上不受限制；然而数目非常大时，其特征多项式和傅里叶评价就会各具优缺点（参见de Groot，1997年的讨论）。

14.8 相移校准

建立一套 PSI 系统的重要一步就是标校所记录干涉图之间的相移 α。一些算法对相移中的误差非常敏感，甚至需要校准算法能够容许的相移误差以获得最佳性能。如果使用了 bucket 积分法，每一个积分区域的相位中心必须进行校准。

一个方便的相移校准方法是：相移为 α 时使用从卡雷算法（式（14.74）给出半步长）求出的解。如果记录的一系列四帧干涉图都是等步长，那么用卡雷算法就会获得每个测量点上的相移。

一个简单的相移表达式可以通过采用所记录等步长 α（Schwider et al.，1983；Cheng and Wyant，1985b）的五帧干涉图来找出。这些光强与用于哈里哈伦算法（式（14.79）~式(14.83)）中的相同，并且相移的解为

$$\alpha(x,y) = \arccos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{I_5 - I_1}{I_4 - I_2}\right)\right] \tag{14.132}$$

注意，一组干涉图中的第三帧干涉图或者光强不需要加入计算，视场中每个点上的相移都可以计算出来。

这两个相移的解析表达式相对于波前相位 $\phi(x, y)$ 的某些值都存在畸点。为了避免产生误差，在干涉图中加入少许倾斜条纹，同时一些导致特殊方程的分母降低到低于某阈值的数据点在分析过程中要剔除。一种显示这些计算结果的简便方法是观察被测相移的直方图（Creath，1988)。90°相移的采样直方图如图 14.19 所示，相移控制器应该被调节到曲线的中心理想值，并且调节到将其标准差减小到最小的程度。在式（14.132）中使用五帧的方法是最常用的校准方式。

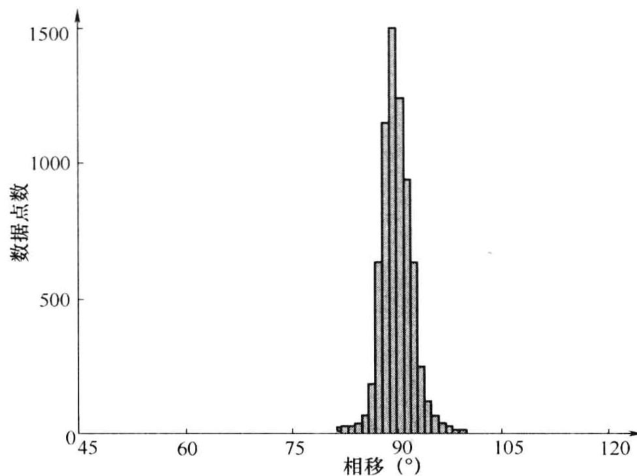


图 14.19 90°相移的采样直方图

直方图的宽度和形状又提供了一个监测空间相移变化的简单方法。图 14.19 中的直方图是建立在带有平物镜的菲佐干涉仪上。它是非常对称的并且宽度只有 4°的一半。图 14.20 中的直方图是在同一台干涉仪上得到的，但使用了一个 $f/0.75$ 的参考物镜。在这种情况下，曲线的宽度增大到大约 15°，并向相移较小值方向倾斜。倾斜的原因是高 f 数的光线与光轴

形成一个大的夹角。这些光线遭遇一个相移，该相移减小了上述夹角的余弦，并且此坐标点位于算法要求之外，在相移中对误差不敏感。

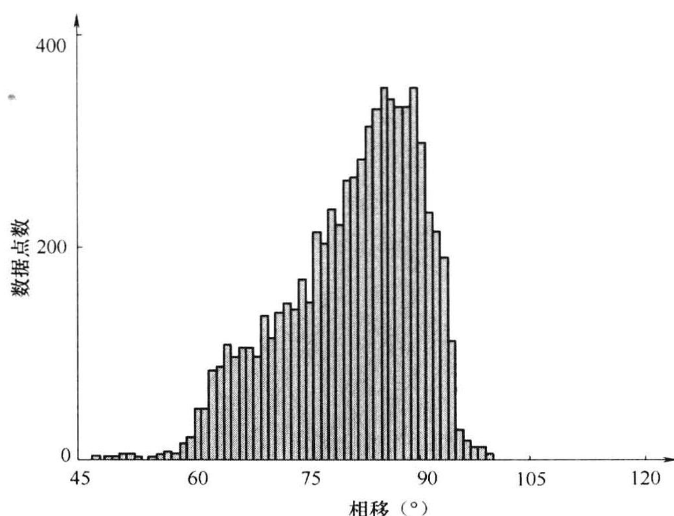


图 14.20 在带有快速参考物镜的激光菲佐干涉仪上获得的测得相移的直方图

几个更简单但精度差一点的校准相移的方法，涉及一系列干涉图的视图比较。如果显示采集的带90°相移的四帧干涉图（当 $\alpha=\pi/2$，由式（14.79）~式(14.83）表示，并参见图14.6)，第一帧和第五帧的相位相差 2π，看起来应该是同样的。互补光强图形应该出现在第一和第三帧，第二和第四帧，以及第三和第五帧，这是由于每对之间存在 π 的相移。增加少量倾斜条纹使分析更容易一点。这种光强的比较也可以通过绘制一条横穿这些干涉图的每一幅线性截面来完成（Cheng and Wyant，1985b)。对于这五帧干涉图，第一和第五帧的曲线应该彼此重合。这可以通过图14.21a中适当调节的90°相移来验证，而且在图14.21b中，可看到误差导致了一个97°的相移。这些技术可以扩展到其他的相移值。如果 $N+1$ 帧干涉图的采集方法使用 $2\pi/N$ 的相移((式14.67）中的 N 步算法)，这些干涉图的第一和最后一帧就应该重叠。使用这两种技术中的任一种，相移是通过改变PZT驱动器的增益直到获得视觉匹配校准的。正负几度的精度都是可能的。

另外一种校准相移的方法是使用一个单独的干涉仪来监测参考镜移动时的位置(Hayes，1984)。于是探测到的光强用来控制相移控制器。该参考干涉仪也可以当做一个相移干涉仪。另一种解决方案是使用相位位置测量值与广义最小二乘算法一起的方法（参见14.8.2节)。这就形成了一种适应采集数据时的实际相移的算法（Seligson et al.，1984)。

这种类型的参考监测系统在探测和补偿相移的非线性方面很有用。这种非线性即使在好的PZT中也存在不到百分之一到百分之几的范围，并且它们常常表现为滞后现象。这些非线性的影响将在下一节展开研究。其他校准方式可以对相移进行线性校正，但不能校正非线性。由于已知参考镜的实际运动是驱动信号或电压的函数，所以可以产生线性相移的控制器信号就能够形成。在实践中，通常是通过一个已经转换成模拟驱动信号的数字查找表来实现的。

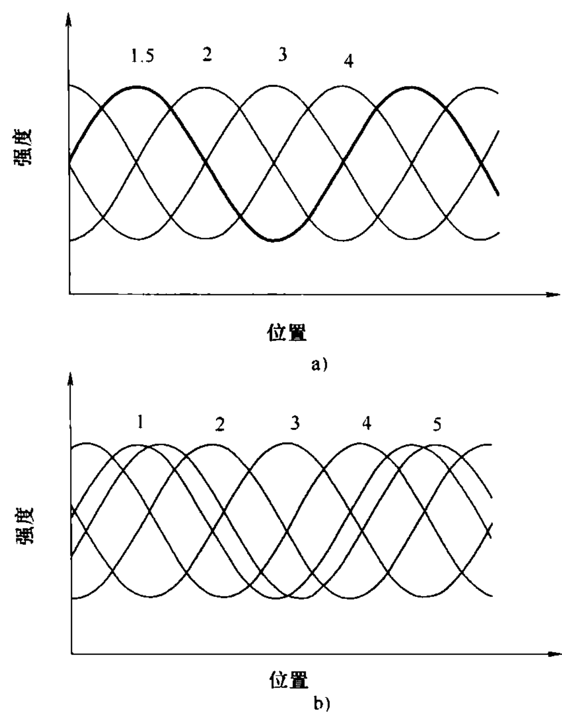


图 14.21 五帧相移干涉图的光强变化曲线
a) 90°相移 b) 97°相移 (Cheng and Wyant, 1985b)

14.9 误差源

有许多的错误来源可以影响到由不同 PSI 算法决定的相位测量精度。有一些基本误差源影响所有算法的准确性，其中一些 PSI 算法对特定的误差源比其他算法更加敏感。克里思 (Creath, 1986) 对大多数普通算法进行了完整的误差仿真。具体的误差对每个算法的影响都已被方便地列表于最近的文献，并且包括那些源自激光源、相移发生器、探测器及环境 (van Wingerden et al., 1991) 的误差。PSI 算法产生一个与 *OPD* 测量相关联的相位测量。我们常常期望的是对光学表面或光学系统 *OPD* 的绝对测量。许多因素制约着所希望的直接测量。下面讨论如何确定并尽量减少各种误差源的影响。

重要的是要强调精度、重复性和准确性之间的差异。随机误差非常小的那种系统是高精度系统。可以使连续测量获得同样结果的系统具有较高的重复性。然而，高重复性并不意味着高准确性和高精度，但如果不具备高重复性，高精度就不可能。因为随机误差可以通过数据平均来减小，故系统性误差非常小的系统具有高的准确性。通常我们希望这两类误差都能够最小。但是，如果要提高整体的精度，必须了解所有情况下误差的影响。虽然理解起来很容易，但是 PSI 中一些最显著的误差源都是系统性的，常常很难消除。通过对大量数据进行有效而代价不大的处理可以减小许多误差成分，但是高性能微处理器的使用会影响这一点。期待这方面的更多改进。

误差来源一般分为三类：①与数据采集相关的误差；②环境因素，如振动和空气湍流；③与光学机械的设计和制造缺陷相关的误差。数据采集误差包括相移过程中的误差、探测系

统的非线性、光源的振幅和频率稳定性及模数转换过程中的量化误差。我们首先讨论第一类误差，这类误差是最可控的，而且往往是算法的依据。

14.9.1　相移误差

所有PSI算法都依赖于干涉仪中以一种已知方式进行的移动相位，作为数据采集处理的一部分。理想条件下，在干涉图任意采样点上期望的光强变化，是在相移臂上光程范围内线性变化的纯正弦曲线（式（14.6））

$$I(x,y,t)=I'(x,y)+I''(x,y)\cos[\phi(x,y)+\delta(t)] \tag{14.133}$$

如果相移$\delta(t)$增量及其整个范围在数据采集期间不是预计的2π细分，那么测得光强的采样值就不能精确匹配一个正弦信号的完整周期。换句话说，使用以上假设，可以得到一个精确的正弦信号，而且采集的数据点满足正弦信号的最小二乘和傅里叶级数理论。例如，如果使用N步算法的参考相移每步的平移量在OPD中不是理想的$2\pi/N$，而是每一步都偏离一些误差ε_r，最小二乘算法将试图拟合一组光强数据来表示周期为$2\pi+\varepsilon_r'$的正弦信号以替代周期为2π的正弦函数，此处ε_r'表示全2π周期的偏离量。周期为$2\pi+\varepsilon_r'$的正弦信号可以分解成在基频$v=1/2\pi$的一个正弦傅里叶级数，以及所有的高次谐波$2mv$，这里m是一个实数。在这些情况下，测得相位就存在相应的误差，它在测得相位$\phi(x,y)$的第一谐波处显得极其严重。施温德（1989）证明，如果参考相位$\phi(x,y)$中有一个小误差ε_r，则测得相位$\phi'(x,y)$与真实相位$\phi(x,y)$之间存在相应的相位差

$$\Delta\phi(x,y)=\phi'(x,y)-\phi(x,y) \tag{14.134}$$

对相位误差的详细计算是相当长的，但对于一般情况下的N步最小二乘算法，有

$$\phi(x,y)\approx a+b\cos[2\phi(x,y)]+c\sin[2\phi(x,y)] \tag{14.135}$$

系数a、b和c可以理解为干涉条纹空间变化的傅里叶系数求和，该空间变化是真实相位$\phi(x,y)$空间变化的两倍。高阶近似会表现出相应系数较小的高阶谐波。

在许多实际情况下，方程（14.135）中的误差可以减到最小。其中最显著的是施温德等（Schwider et al.，1983）及哈里哈伦（Hariharan，1987）算法（参见14.7.4节），其中进行了采样之间相移量为$\pi/2$的连续五次采样。在这种情况下，式（14.135）减去式（14.95）就写成

$$\phi(x,y)\approx(\varepsilon_r^2/4)\sin[2\phi(x,y)] \tag{14.136}$$

对于相移增量中的线性误差，卡雷算法显示没有测量误差，因为对算法的分析决定了在测量中采用的相位步长。该算法已被开发为一种坐标测量工具中的长基线干涉测距法（Carré，1966）。

施温德等（Schwider et al.，1983）及哈里哈伦（Hariharan，1987）算法对除了分步相移中的线性校准误差以外的其余误差都很敏感。移相器中的高阶非线性更加难以预测和分析，但是对于数字仿真却非常简单。哈里哈伦已经证明正常的$\pi/2$分步相移的1%线性偏差，会引起最大不超过被测相位ϕ值的0.005°的误差。振幅的滞后误差会引起类似的误差。

采用这个算法可以尽量减小移相器的线性漂移，但事实上，可以使用一个简单的额外操作来基本消除漂移。如果漂移量小，此类漂移的影响可以通过反序数方向第二次采集数据并与第一次作平均来基本消除。哈里哈伦等（Hariharan et al.，1987a）已经证明：在此情况下，全部两个采样周期内的4°漂移（对应于第一组的数值为-178°、-88.5°、1°、90.5°、和180°及第二组的数值为180°、89.5°、-1°、-91.5°和-182°）经过两组数据的平均后，

贡献的误差量只有0.001°。在实践中，关于干涉仪的一个特定部分的漂移或不稳定性，对算法来说，可能是无法从移相器的漂移中区分出来的，因为在同一视场上它们两个都表现为*OPD*的变化。

尽管施温德等（Schwider et al.，1983）和哈里哈伦（Hariharan，1987）算法相对相移误差不敏感，标定相移的步长还是很重要。为方便这个算法，施温德等（Schwider et al.，1983）提出一个简单的计算，其中相位的步长α用以下公式计算

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}\frac{I_5-I_1}{I_4-I_2} \tag{14.137}$$

这个方程的使用是受限制的，因为当$I_4-I_2=0$时，方程是奇异的，如14.1节的讨论。克宁思泰勒等（Kinnstaeter et al.，1988）、欧亚马等（Ohyama et al.，1988）及弗瑞斯卡莱德和科累欧劳斯（Freischlad and Koliopoulos，1990）全面给出了相移误差影响的更深入分析。

实际上，更重要的是要针对每一种特殊应用选择对相移误差最不敏感的算法。这个结果来自于以下事实：大多数相移误差是由干涉腔中*OPD*的变化引起的；如果它们与应用环境相关，就会受控于漂移、湍流和振动；它们不是由于参考反射镜（即移相器）的不正确移动或者其组合引起的。

图14.22是上述线性相移误差算法的误差敏感性的数值仿真。对于使用多达4个步长的算法，施温德等（Schwider et al.，1993）提出的算法具有最佳补偿效果，如表14.9所述。当使用多达6个相位步长时，施密特和克里思（Schmit and Creath，1995）提出采用6个光强值的算法，其性能改善已超过了由施温德等（Schwider et al.，1983）和哈里哈伦（Hariharan，1987）提出的最好和最常用的五阶bucket算法。

图14.23总结了各种7~9帧相移算法的性能。此处施密特和克里思（Schmit and Creath，1996）及德·格如特（de Groot，1994）提出的平均算法采用了最优化的采样窗口以得到最佳性能。一般而言，这也说明，采用越多的采样帧数就可以得到越精简的算法来减少误差源。

14.9.2 探测器的非线性

探测器的非线性表现为有一个误差，在动态范围或条纹对比度很高时，该误差就变得不可忽视。相应地，当对比度低时，探测器的非线性就不那么重要。克宁思泰勒等（1988）已经证明了使用四步算法（$\alpha=\pi/2$）时，相位的测量不仅对线性探测器是无误差的，而且甚至对有二阶非线性的探测器也是无误差的。然而，对于三步算法则并非如此，探测器的第四阶非线性形成的误差，会激发四步算法中相位$\phi(x,y)$空间变化的三次谐波。在PSI算法中，使用的相位细分量越多，在减小探测器高阶非线性上就越有效，但这些误差之间通常没有因果关系。现代硅阵列传感器在室温下线性工作，动态范围接近100:1。该范围可以应用热电或低温冷却就很容易地扩展至少一个数量级。这不是通常需要的，除非光照水平很低或要求的像素积分时间很短。

如果二极管阵列运行于饱和状态或者接近饱和，在光强值大时，CCD探测器更有可能遭遇非线性。通过插入适当的衰减器，这是很容易补救的。如果可以工作在略低于饱和状态的区域，积分型CCD探测器则具有最大动态范围。这就需要选择合适的激光功率、光学衰减度，以及积分时间（帧速率）。

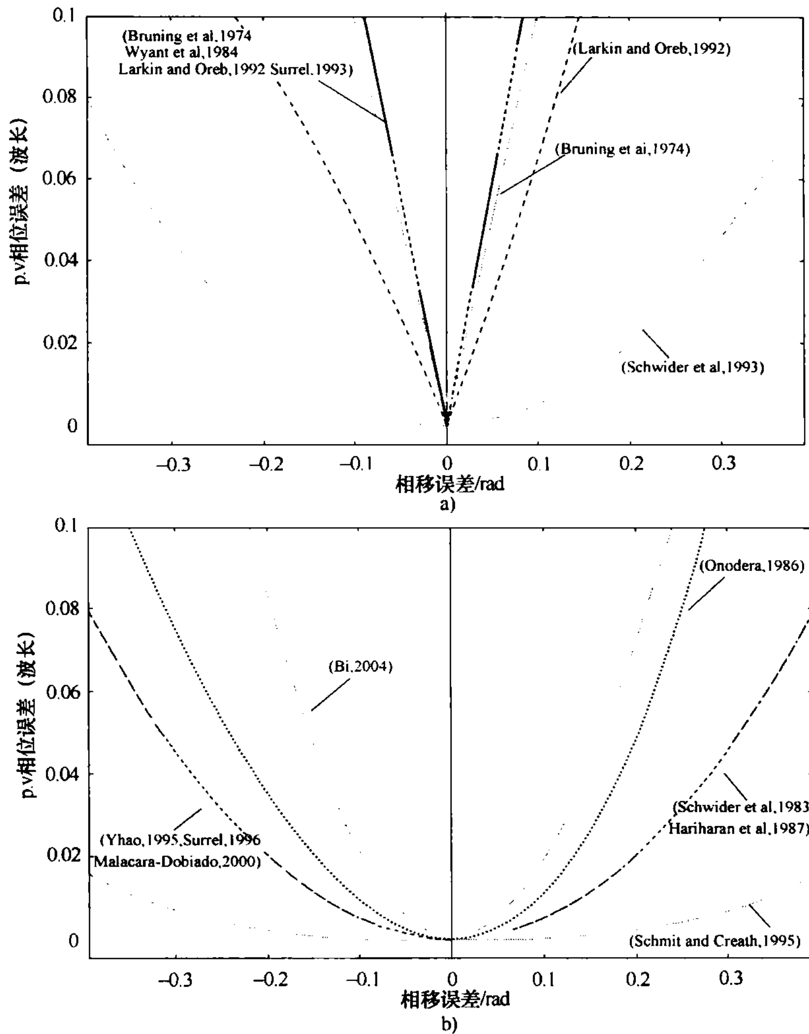


图 14.22　上述线性相移误差算法的误差敏感性的数值仿真

a）多达 4 帧的算法的线性相移器误差　b）含有 5 或 6 个光强采样值的算法的相位误差

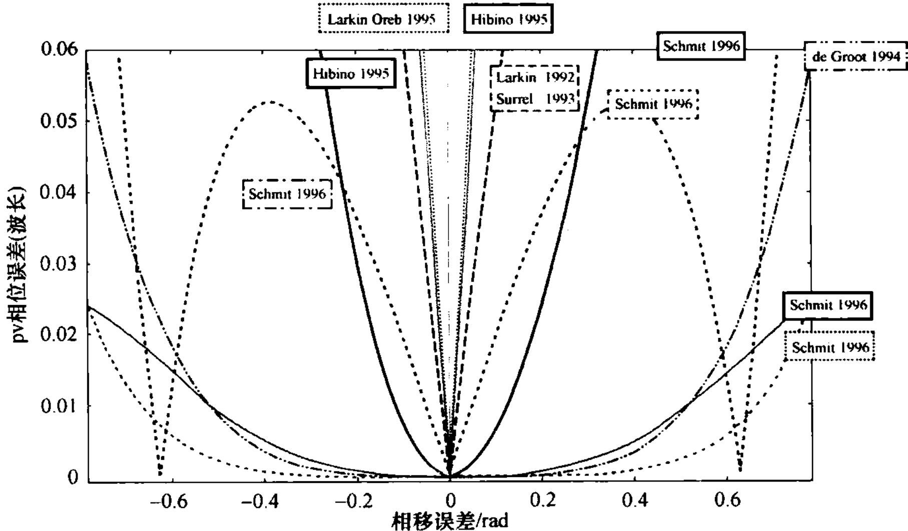


图 14.23　各种 7～9 帧相移算法的性能

图 14.24 所示为由不同的伽玛值说明不同探测器的非线性。伽玛校正这个术语常见于现代视频应用领域。

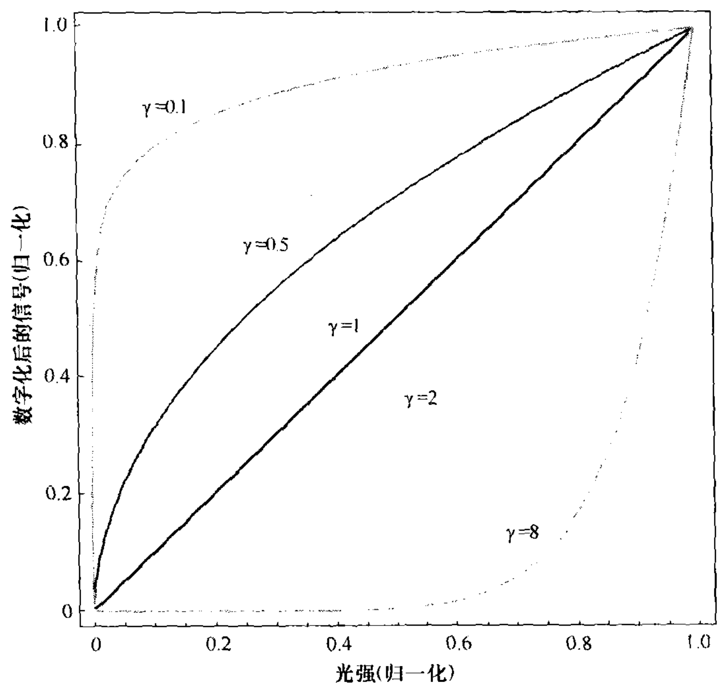


图 14.24 由不同的伽玛值说明不同探测器的非线性

（注意，低伽玛值相当于探测器工作于饱和区附近，而高伽玛值相当于部分光强低于探测器极限）

$$I_{\text{detected}} = I_{\text{real}} \tag{14.138}$$

式（14.138）说明在探测区间上的实际光强 I_{real} 和探测到的光强 I_{detected} 之间的关系。为了使式（14.138）更具说服力，两个光强都归一化到 0 到 1 之间。从图 14.24 可以看出，低伽玛值相当于探测器工作于饱和区附近，而高伽玛值相当于光强低于探测器域值。针对探测器的非线性，图 14.25 所示为不同 PSI 算法针对模拟的不同伽玛值的敏感性。

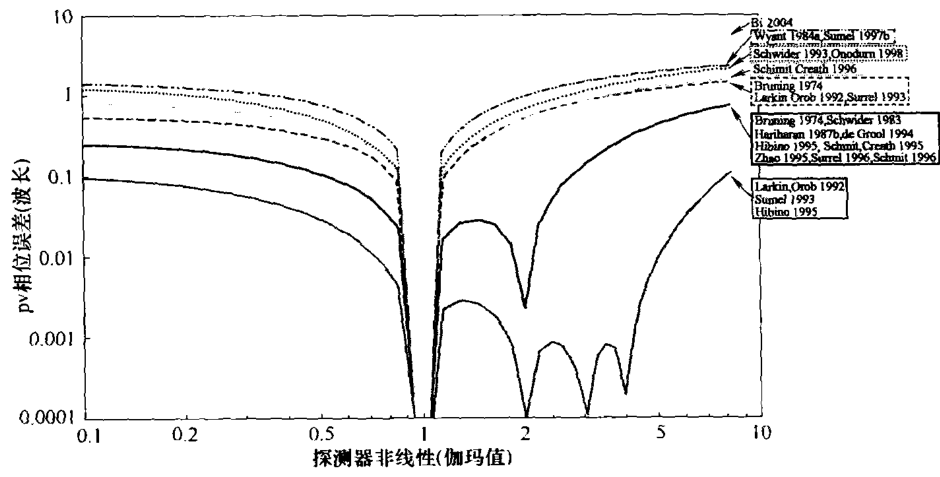


图 14.25 不同 PSI 算法针对模拟的不同伽玛值的敏感性

14.9.3　光源稳定性

干涉仪光源的稳定性对频率和振幅都很重要。尤其是如果激光频率不稳定，可能相应地会引起条纹形态的不稳定并且降低波前测量精度。这可能更麻烦，这对工作在两臂之间有大光程差的干涉仪来说更是潜在的麻烦。He-Ne 激光较长的相干长度可能是忽略这个因素的原因之一，但对于高精度的，必须考虑这一稳定性要求。对于干涉仪中 ΔL 的光程差和 k 波长的理想测量精度，光源频率的稳定性 Δv 满足不等式

$$\Delta v < \frac{ck}{\Delta L} \tag{14.139}$$

其中，c 是光速。式（14.139）基于以下假设，如果激光的相干长度和光程差相匹配，就能确定相位在一个波长之内。因而，3m 的光程差和小于 0.01λ 的精度需要 1MHz 的光源稳定性。当 *OPD* 较大又面临频率不稳定的光源时，如果光源频率或波长是系统很容易控制的参数，建议采用一种平移条纹的替代方法。这就是利用激光二极管源，具体内容将在 14.16.4 节中详细介绍。

如果光源光强的波动是随机的，就可以通过平均来缓解，因为视场中所有点的变化在大多数情况下都是相同的。光强波动对相位测量的影响取决于使用的算法。就 N 步最小二乘算法而言，已经证明了被测相位的标准差 σ_ϕ 由式（14.140）给出（Bruning，1978；Koliopoulos，1981）

$$\sigma_\phi = \frac{1}{\sqrt{NS}} \tag{14.140}$$

这里 S 是探测器系统的信噪比。弗瑞斯卡莱德和科累欧劳斯（Freischlad and Koliopoulos，1990）及布如菲（Brophy，1990）详尽地探讨了大多数算法情况下的光强波动及其他噪声源。当振幅振动较小时，光强波动的一般表现是相同的（参见 14.9.5 节）。如果出现系统性又缓慢变化的光强波动，就可以另加一个探测器来检测这些变化，而且无论是探测器测出的结果之比还是信号都可用于反馈以使光源保持稳定。后者通常更可取。

双光束干涉精度的最终局限归结于探测器的光子散粒噪声。特贝斯伍（Tarbeyev，1986）估算的精度极限为 6×10^{-5}nm。

14.9.4　量化误差

由于使用了代价不大的数字计算，PSI 已成为一种实用技术。第一步是将光强的模拟信号转换为数字信息。在此阶段，误差源是视频信号的量化误差。由于完成转换要使用一个模/数转换器，转换过程的准确性取决于传输到计算机的数字位数。普通视频转换器将输入的模拟信号数字化为 8～16 位字，意味着数字中有 $2^8=256$ 到 $2^{16}=65536$ 个离散的量化电平。科累欧劳斯（Koliopoulos，1981）首先探讨了三步算法的量化误差影响，后来基于具有 75°相移步长的 13 步算法特例，布如菲（Brophy，1990）严格推导出大多数普通算法的误差并进行了归纳。仿真计算过程较复杂，均是基于量化误差不是统计误差的事实。布如菲已经证明了相对于四步算法（$\alpha=\pi/2$）由于量化水平 Q 导致的相位 ϕ_4 的标准差近似为

$$\sigma_{\phi_4} \approx \frac{1}{\sqrt{3}Q} \tag{14.141}$$

以及

$$\sigma_{\phi_N} \approx \frac{1}{\sqrt{3N}Q} \tag{14.142}$$

该表达式能够推广到 N 步算法。13 步算法显示了把改善误差的两个因素之一作为减小步长之间相关性的指标。式（14.138）和式（14.139）假设条纹的调制跨越了整个量化电平的动态范围。对于 1024 的量化电平，四步算法的相位误差均方根（RMS）为小于 0.0001 波长。在多数情况下，这是完全可以忽略不计的，说明使用一个八位的转换器就足够了。实际上，当条纹的调制减弱时，使用更少比特数的动态范围，其结果是减小了 Q，于是增大了误差。如今，采用高分辨率成像，每个像素使用更多比特数进行数字化，不再是问题，因为相机接口、数据传输速度及计算机内存已经满足了日益增长的需求。

14.9.5 振动误差

机械稳定性在干涉测量中是极为重要的。振动的存在不利于完全确定探测器所探测到的条纹。然而在多数情况下，振动是不能消除的。一些专用技术已经用来处理这些情况。例如频闪照明和全息方法，其数据捕获系统可以冻结振动的条纹，那么同样的一些分析方法也可以用来对这些条纹进行分析。大振幅振动的情况，可通过测试结构或者干涉仪的二维或三维运动来显现出来，同样其他运动可能存在某些其他的基本振动模式。这里不论述这种类型振动的分析，但可以在其他参考资料（Powel and Stetson，1965；Hariharan et al.，1987b；Hariharan，1984）中找到。

干涉仪的应用应该采用尽量减小振动的预防措施，例如使用被动或主动的振动隔离基座、声学振动隔离，以及在干涉仪及其放置平台的设计中使用实践验证过的优良结构。干涉仪还应放置在没有机械干扰的区域、远离旋转的机械设备，这也是至关重要的。

少量振动的存在通常以相当于相移增量的扰动方式显现，因此，可以采用熟悉的方法进行分析。式（14.135）给出了带有相移增量误差时相位误差测量的一般误差表现形式。该误差由位于条纹两倍空间频率处的误差项描述。第一步，对相移增量误差具有最大抗干扰性的那些算法对于振动和小幅度漂移也具有最大的抗干扰性。与像素帧速率相比，当振动频率比较高时，幅度的波动趋于平均，并且在每个像素位置上的振动成分之间几乎没有关联。光强波动引起的振动效应依赖于所使用的 PSI 算法。小振动导致的相位标准差，通过在相位 ϕ_l 的所有可能值平均后，与光强波动的标准偏差 σ_l 关联，简单的关系式如下（Brophy 1990）

$$\sigma_{\phi\gamma}=\frac{\sqrt{k}\sigma_l}{\gamma l_0} \tag{14.143}$$

其中，γ 为条纹调制，l_0 为平均光强，k 是取决于所采用 PSI 算法的一个常数。参数 k 的减小大致反比于算法中相位的细分数量。对于四步算法，$k=1/2$；而对于 N 步算法，$k=2/N$。相位（单位是 rad）的方差总是低于帧 - 帧间互不相关的光强噪声的方差，即使光强噪声是由光源的小振动或光强变化引入的。

1995 和 1996 年，德・格如特发表了解决相移干涉中振动问题的文章。在其 1995 年的文章中，推导了导致相位传递函数的一阶近似，乘以噪声谱就可以预测一台干涉仪对各种形式振动的响应。

在 1996 年的文章中，德・格如特和狄瑞克发表了相移干涉测量中振动的数值仿真，以及它们对测量结果的均方根（RMS）误差的影响。这里，他们使用给定振幅 A 和频率 v 的 RMS 误差

$$E=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{\Delta\varphi(\phi,\alpha)-\Delta\varphi_{\text{average}}(\alpha)\}^2\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\alpha\right)^{1/2} \tag{14.144}$$

其中的相位误差 $\Delta\varphi=\varphi-\phi$ 包含了真实相位 ϕ 和计算得到的相位 $\varphi=\arctan(T)+\text{const}$，

这里

$$T = \frac{\sum_{j=1}^{J} s_j \overline{g_j}}{\sum_{j=1}^{J} c_j \overline{g_j}} \tag{14.145}$$

式（14.145）为所用的算法，而且$\overline{g_j}$表示光强。为减少振动的敏感性，bucket 积分方法是使用的首选，德·格如特和狄瑞克（de Groot and Deck，1996）提出

$$\overline{g_j} = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} g(\phi, t_j + t')\,\mathrm{d}t' \tag{14.146}$$

图 14.26 所示为 14.7 节中提出的不同算法用德·格如特的（de Groot，1996）方法进行的数值仿真。可以观察到振动条件下的两种类型普遍特性。图 14.26 中所示的算法模拟结果：狭窄的峰值区域和扁平的低谷对应于采样频率与振动频率之比的奇次谐波。

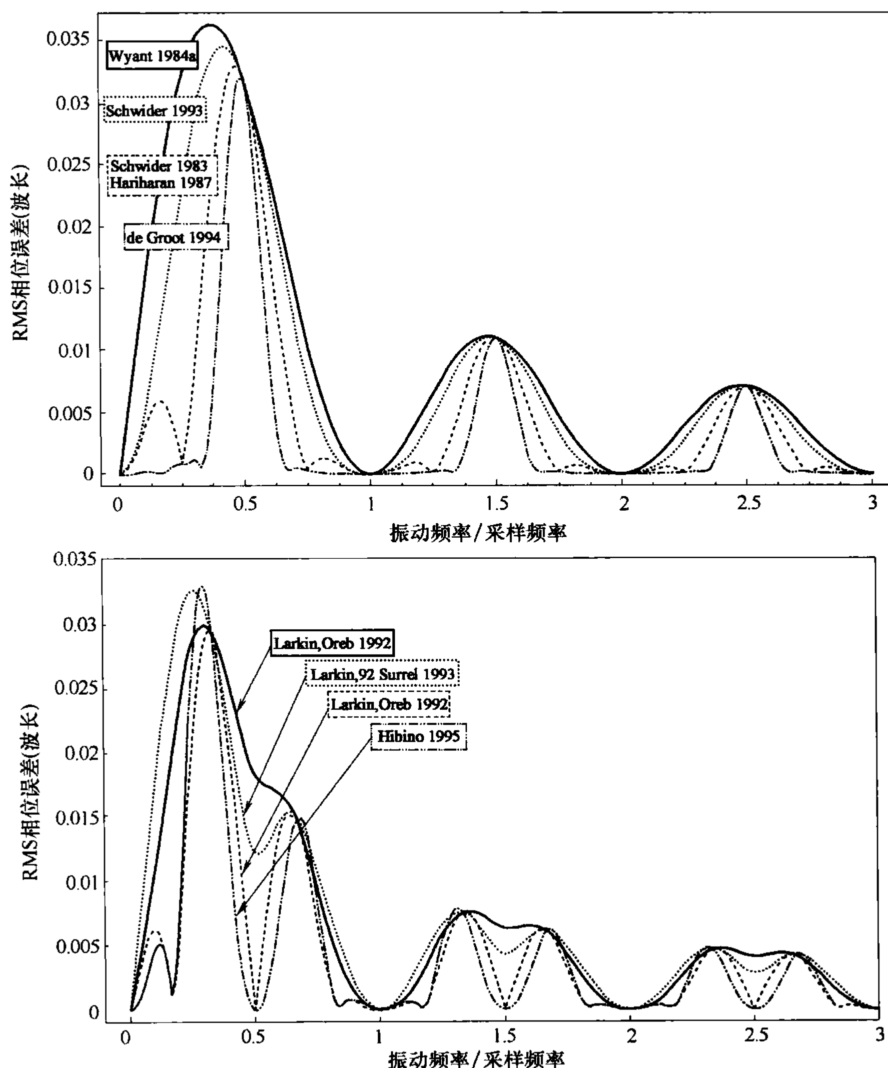


图 14.26 由不同算法引入的 RMS 波前误差的数值仿真与标准化的振动频率的关系

也有一些算法，在奇偶谐波处显示出灵敏度减小的特点，但是在奇偶谐波之间引入了旁瓣。

在这里，两种算法之间存在显著的不同，特别是在频率低于实际的采样频率时，如图14.27所示。

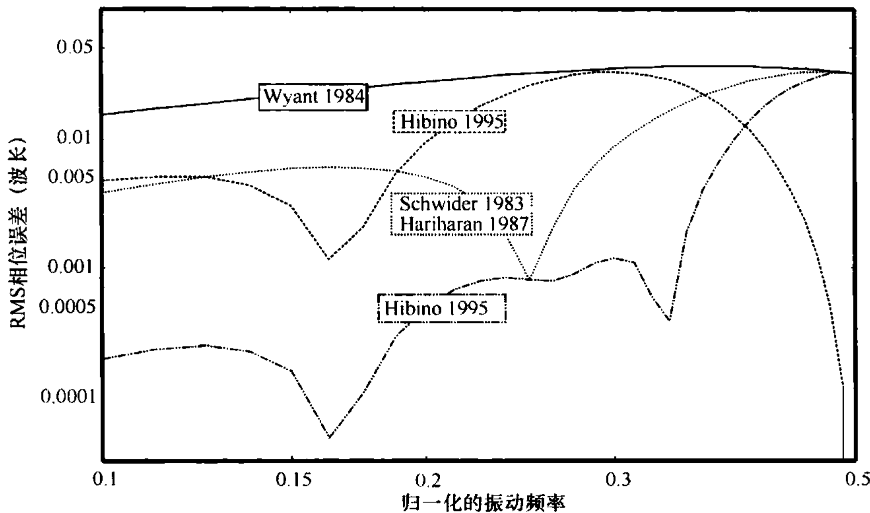


图 14.27　低振动频率下的数值模拟曲线（注意双对数坐标步长）

14.9.6　空气湍流

气流和空气湍流是严重的误差源，特别是需要高精度测量时。在条纹视场内，任何特定点的性质往往是一个缓慢变化的相位误差，随着距离临近点大于几毫米到几厘米，点的相关性就会减小（Rosenbluth 和 Bobroff，1990）。同样的问题困扰着早期的全息图成像人员，直到他们学会如何正确地“混合”环境内的空气。适当的空气混合可通过产生足够的气流来得到，以防止停滞或分层，而不会产生过度的湍流。

气流和湍流与热梯度不无关系，它作为一个孤立热源和多个热源的结果而存在。当温度梯度存在于干涉仪的任何结构部件中或被测试部件中时，随时间的变化必然会存在于全波前孔径的光路中。必须有足够的时间分配给零部件的加热和仪器使用。这可能是以小时计，$\lambda/100$ 量级的测量精度是必需的。但是，特殊的测量策略必须考虑潜在误差源中的时间常数，以及数据采集算法的时间。图14.27显示了不同算法采用德·格如特（de Groot，1996）法进行数值模拟时的低频振动灵敏度。

14.9.7　有害条纹和其他相干效应

泰曼-格林或者菲佐干涉仪具有长激光源时，相干长度在测试臂与参考臂中允许有大光程差的干涉存在。虽然这可能在某些情况下在机械上提供了方便，但是在相干长度以内的多个表面反射可能彼此形成干涉，并且混淆真正的测量。有害条纹引入的系统测量误差，在某些情况下是可以消除的。

首先考虑的是三光束干涉的影响。设 $e^{i\phi(x,y)}$ 为测试臂场，$e^{i\phi_r(x,y)}$ 为参考臂场，而 $qe^{i\eta(x,y)}$ 是一个具有主相干光束的分振幅 q 的多余反射场。当这三束光形成干涉，得到的光

强为

$$I_r = 2 + q^2 + 2\cos[\phi(x,y) - \phi_r(x,y)] + 2q\cos[\eta(x,y) - \phi_r(x,y)] + 2q\cos[\phi(x,y) - \eta(x,y)] \tag{14.147}$$

真实的相位 $\phi(x, y)$ 被修改成了失真相位 $\phi'(x, y)$，误差为 $\Delta\phi(x, y)$，可以表示为（Schwider et al. , 1983）

$$\Delta\phi(x,y) = \arctan\left\{\frac{q\sin[\eta(x,y) - \phi(x,y)]}{1 + q\cos[\eta(x,y) - \phi(x,y)]}\right\} \tag{14.148}$$

误差 $\Delta\phi(x, y)$ 看起来依赖于真实相位 $\phi(x, y)$。这就减小了当 $\phi(x, y) = 0$ 时，布朗林等（Bruning et al. , 1974）报道的数值。如果通过引入一个附加相移器使得测试臂的相位移动 π 值、并得到另一组数据，再与第一组作平均，就能得到湍流波前振幅大幅下降的结论（Schwider et al. , 1983）。

艾和怀扬特（Ai and Wyant，1988）提出了对这一过程（特别是在四步法的情况下）作修改，以便更容易实现的建议。在他们的方法中，使用四步 bucket 法采集四个光强数据，这些光强数据被单独存储。随后，测试光束在到达检测表面之前被挡住，又采集到四个新的光强数据，并从中减去第一组数据。根据最后的光强数据计算得到相位值，它已经消除了没有误差的杂散反射的影响。以上分析适用于那些参考面和测试面的反射率相对较低且相互匹配的情况。如果测试表面的反射率较高，情况就会变得更加困难。哈里哈伦（Hariharan，1987）已经证明了对于杂散反射，三步算法比四步算法敏感得多。

其他形式的相干噪声，例如光学表面上的灰尘和划伤、光学元件和膜层内的非均匀性和缺陷，都可能形成棘手的干涉效应。一个接近光源点的移动扩束器也可以平均掉一些相干噪声。仔细清洗光学表面，可以进一步降低散射光、提高对比度，并减少附着物。在偏振干涉仪中明智地使用 1/4 波片可以最大限度地减少不必要的表面反射并使参考臂和测试臂的光强达到平衡（Bruning and Herriott，1970）。

14.9.8 干涉仪的光学误差

由于波前的剪切，干涉仪及其部件的整体光学质量影响着检测精度。从一个不完美的波前发出的光线，即使从一个完美的平面或球面反射回来，也不会再原路返回，这是一个事实。当光线本身不再返回，它们就产生了剪切。波前剪切产生的测量误差随着干涉仪中波前斜率误差的增加而变得更大。即使尽可能减小焦斑尺寸和倾斜条纹，由于残余像差不可避免地存在，最好结果也只能在条纹尽可能被完全抵消的情况下获得。

许多情况下，很难给出量化光学误差影响的通用公式，但是在二次或更高次时，较大的斜率会引起更大的误差。干涉仪精密的光学设计必须要光线追迹以准确地定性效果。对于给定畸变引起更大斜率或者对于给定斜率引起更大畸变的情况，任何作用都将产生更大的误差。赛尔贝格（Selberg，1987、1990a）计算出泰曼-格林干涉仪的几种特定结构下的一些误差。他介绍了一个模拟测试表面不同量的倾斜、离焦及球差，并将计算的测量误差进行了列表。表 14.10 给出了一个计算结果的摘要，它是针对直径大约为 100mm 的测试部件，峰谷（P-V）误差为 1 和 10 个波长的倾斜、正负离焦误差（无倾斜）及表面球差（无倾斜和离焦误差）。请注意，对于球面，可以通过调节结构来去除倾斜和离焦误差，而球差却不能。仿真证明：由于非线性的存在，这些误差很少能被结合起来分析。具体情况必须经过完整地模拟，特别是当像差较大时。就如同表 14.10 中对凸离焦误差的计算结果指出的，从远离轴

向返回光线的表面误差会产生更大的误差。重要的是让参考波前的半径与被测波前适度地相似。由不完美的参考面或者干涉仪引入的误差，取决于像差及测试和参考波前的半径之差两个方面。

表 14.10 由于检测条件产生的测量误差的峰谷值

对应测试元件装置的误差类型	1 个条纹对应的光线拟合用波长表示的峰谷值	10 个条纹误差对应的光线拟合用波长表示的峰谷值
斜率误差	<0.0001	0.007
凹离焦误差	<0.0001	0.007
凸离焦误差	<0.0001	0.017
表面球差	0.0004	0.089

源自设计、制造或准直缺陷的光学误差是不可避免的。为了获得最高精度，我们必须找到尽量减小或者补偿这些误差的方法。如果误差的特点都可以用不同的形式来表征，干涉仪就能够进行标定。这重要的一步取决于干涉仪的构造和配置。

干涉仪成像或观测系统的几何失真也要引入与被测波前斜率成正比的误差。这个误差可能是由于被测表面的斜率误差或者是由于离焦的原因产生的。例如探测器的成像系统在视场边缘有5%的畸变，对于1 个波长的离焦来说，将引入0.01 波长的误差（Truax，1988）。这就强调了在采集数据之前尽可能把测试条纹调到零位的必要性。

波前测量的另一个来源发生于当被测口径或表面没有以锐聚焦方式成像在探测器上时。由于菲涅耳衍射，这往往会在被测孔径边缘产生强烈的斜率误差。

14.10 探测器和空间采样

在现今使用的大多数 PSI 系统中，使用固体探测器阵列来获取需要的光强。选择这些探测器主要是因为，在每个像素点上对光强的响应具有优良的线性度，测量的帧与帧之间没有图像滞后，并且在记录干涉图的过程中没有传感器引起的几何畸变。在每个离散像素点位置上测量的光强可以数字化并存储在计算机的内存中以用于 PSI 的计算。管式传感器（tube-type sensors），如摄像机，已经成功应用于 PSI 系统中，但是系统性能常常因探测器的非线性、成像滞后和畸变而降低。

14.10.1 固体传感器

固体传感器可根据其几何形状分为面阵型和线阵型。面阵型最常用于干涉测量并可以测量一个二维的表面或波前。测量系统的空间分辨率与沿传感器每一维方向上像素的数量相关，普通传感器仅适用于可视监测等应用场合，典型的是 500 × 500 像素或更少一点。一些为机械可视化应用或者高清晰度电视设计的新传感器具有大约 1000 × 1000 像素，甚至 4000 × 4000 像素。线阵型则相反，测量仅仅靠跨越零件的一维轨迹来实现，但可以沿着这条轨迹线提供更高的空间分辨率以弥补这个劣势。现今的线阵传感器可得到 7 千多的像素，因此可以进行具有极高空间分辨率的测量。与低分辨率面阵型的 10 万或更多像素相比，从这些大型线性阵输出的数据量是比较小的并易于处理。由于半导体制造业的发展，我们可以预见，能够获得的传感器数据密度将会不断地增大。

有许多结构和技术用于固体传感器的制造，包括帧转移和行转移的电荷耦合器件（CCD）、电荷注入器件（CIDs）及光电二极管阵列。全面回顾此项技术不属于本章所讨论的范围（见 Hall，1980 或 Janesick，2001），但是其中一些传感器可以用于 PSI。基于应用考虑，采用这些不同固体传感器的相机之间的主要差异在于分辨率、感光灵敏度、动态范围及数据输出格式（Prettyjohns，1984）。分辨率取决于传感器上的像素数量，而灵敏度是量子效率和几何结构（由光敏像素，而不是储存和转移的寄存器和控制线路，占据的成像区域的百分比）两者的函数。另外，相机的性能在输出的信噪比上也存在差异。

对于面阵列，有两种主要的数据输出格式：隔行和逐行序列。为视频应用设计的传感器会产生一个视频信号，每一视频帧由两个隔行的视频场组成。帧的奇数扫描线在第一场时间内输出，而偶数则发生在第二场内。一个普通的 US 视频标准需要每场有 242 条扫描线或者每帧 242 条扫描线，并且帧和场的速率在 1/30s 和 1/60s。当两场信号在不同时间和不同坐标上被积分时，隔行信号对于 PSI 系统可能是个问题。用一系列的视频帧来记录被测的干涉图已成为分步相位数据采集的常用方法，但不适用于 bucket 积分策略，这是因为在每一帧中两场的平均相移量 δ_i 不同。一个适用于任何数据采集方案的办法是，仅仅使用视频信号的奇数场或偶数场来记录系列干涉图而忽略其他场数据。这就形成了 242 线可用的数据。一些视频相机提供的选择性能中有在重复场模式下只输出两场中任一场的功能。采用线序列输出的相机，例如由 EG&G Reticon 及其他公司提供的产品，没有隔行输出，只能使用帧输出。这些相机通常由像素（一般是 128×128 和 256×256）的方阵组成并且能够调节帧速率。一个方阵比为 4:3 的电视格式更恰当，因为对于大多数应用来说，保留干涉图的几何完整并且在 x 和 y 方向具有同样的分辨率都很重要。因为相机设计中涉及各方面的复杂性，没有任何单一的传感器技术和构件能够成为本项应用的最佳选择。

14.10.2　空间采样

不考虑干涉仪中使用的传感器类型，但必须仔细考虑数据采集对被测量光强数据的影响。所有这些传感器由具有一个给定的活跃区域和间距的像素阵列构成。干涉图成像于探测器上，而光强图形是经过平均的，不仅是传感器整个积分时间内的平均，也是整个活跃区域的空间平均。当传感器被读出时，视频信号对应于每个像素的模拟电压被数字化后又被存储在计算机内存中。每个像素分配一个数字。这个过程一直重复，直到相移发生变化并采集到足够数量的帧。对于 PSI 系统构建围绕管型传感器的未经定义的有效像元区域，由在水平方向模/数转换器积分周期和垂直方向扫描线的宽度所定义。数字化过程就是在空间上对干涉图的采样过程。有关 PSI 系统的性能，在本节余下部分和 14.13 节中将研究与空间采样过程相关的算法和影响。真正有意义的是，PSI 的在三维方向上采样干涉图案的处理方式：时间和两个空间方向。

将传感器建模为一个方形像素的阵列，如图 14.28 所示。像素的尺寸和间隔分别为$a\times b$ 和 $x_s\times y_s$。在特定像素点（mx_s，ny_s）上测量的信号（此处 m 和 n 都是整数）在整个像素活跃区域内通过时间平均的干涉图光强 $I_i(x,\ y)$ 进行积分后被获得：

$$\hat{I}_i(mx_s,ny_s)\iint_{-\infty}^{\infty} I_i(x,y)\,\mathrm{rect}\left(\frac{\alpha-mx_s}{a},\frac{\beta-ny_s}{b}\right)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \tag{14.149}$$

此结果是相对于第 i 帧的光强，其中矩形函数 rect 代表了像素的活跃区域，而 α 和 β 是积分变量。传感器产生的充分采样的干涉图存储在特定的内存坐标地址中并集结了所有的

像素

$$I_i^s(x,y) = \sum_m \sum_n \hat{I}_i(mx_s, ny_s)\delta(x - mx_s, y - ny_s) \tag{14.150}$$

其中，$\delta(x, y)$ 是两维的克罗内克 δ 函数。对于某些操作，式（14.108）和式（14.109）联立得到以下第 i 个采样干涉图的表达式

$$I_i^s(x,y) = \left[I_i(x,y) ** \mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)\right]\mathrm{comb}\left(\frac{x}{x_s}, \frac{y}{y_s}\right) \tag{14.151}$$

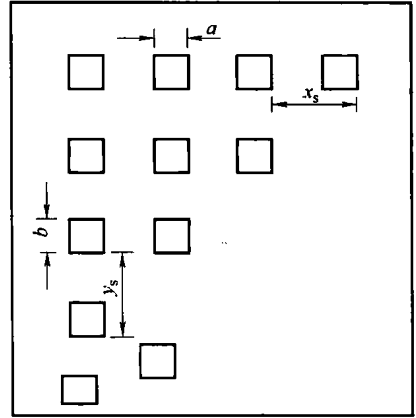


图 14.28 典型传感器像素排布示意图

其中，** 表示二维卷积，而梳状函数是一个符合像素坐标位置的 δ 函数矩阵。求解此表达式，光强与矩形函数的卷积在每个像素的活跃区域内对光强进行平均，并且梳状函数让所有的像素点都参加每一次平均。

因为干涉图的光强图形是由整个像素活跃区域经平均后得到，下这样的结论是有道理的：这个过程将降低对数字化的干涉图形的调制。这种效果完全类似于式（14.34）涉及的 bucket 积分数据采集方案中使用时间平均而发生的调制降低。使用点探测器时，由于不进行平均，就没有损失任何的调制，但是随着活跃区域的增大，记录的调制就减少。还应当清楚，调制降低是所记录条纹空间频率的函数。对于一个给定尺寸的像素，高频率比低频损失得多；频率越高，像素内光强产生的变化越大。实际上，当一个完整条纹周期严密地匹配像素的活跃区域（或者条纹频率等于 $1/a$）时，记录的调制等于 0；整个活跃区域的空间平均形成了一个与相对于像素点的条纹位置无关的常数。这个位置相当于在 bucket 积分中 $\Delta = 2\pi$ 的时间条件。

通过增加条纹的空间频率来降低调制和在频域中进行空间平均相关是很有用的。通过式（14.110）的傅里叶变换获得空间采样干涉图的频率－间隔的关系表示

$$\tilde{I}_i^s(\xi,\eta) = [\tilde{I}_i(\xi,\eta)\,\mathrm{sinc}(a\xi, b\eta)] ** \mathrm{comb}(x_s\xi, y_s\eta) \tag{14.152}$$

其中，ξ 和 η 为空间频率坐标，～表示傅里叶变换，而 sinc 函数是由式（14.35）定义函数的二维方程式。

$$\mathrm{sinc}(\alpha,\beta) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\frac{\sin\pi\beta}{\pi\beta} \tag{14.153}$$

式（14.111）表示采样频谱是由与像素点对应的 sinc 函数乘以时间平均后干涉图的频谱而形成的。于是这个滤波频谱在两维采样频率（$1/x_s$，$1/y_s$）每一次乘积时就可以被复制。因为由 sinc 函数表示的所有像素的平均用作入射到传感器上的干涉图光强的低通滤波器，给这个术语起个简便的名字叫做像元 MTF

$$\text{Pixel}\quad \text{MTF} = \mathrm{sinc}(a\xi, b\eta) \tag{14.154}$$

由于像素点的尺寸非零，记录的信号调制的衰减量可以通过在条纹频率上计算这个函数来得到。如上所述，这个函数第一个 0 点是在出现空间频率等于 $1/a$ 时（沿着一维，缩放到传感器的平面上）。像元 MTF 对应于传感器像素的宽度间距比分别为 50% 和 100% 的变化，如图 14.29 所示。如果使用非矩形的像素点，可以修改这些表达式，这时将会有不同 rect 和 sinc 的函数出现。

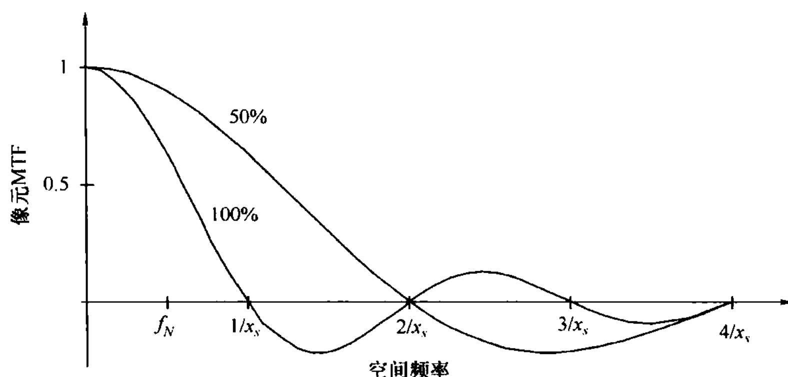


图14.29　对应传感器像素的宽度间距比分别为50%和100%的像元MTF

采样成像系统的其他主要影响是它对分辨力的限制。采样系统的受限的分辨力就是奈奎斯特（Nyquist）频率，定义为采样频率的一半

$$f_{\mathrm{N}}=\frac{1}{2x_s} \tag{14.155}$$

这里是沿着 x 轴测量（Gaskill，1978）的。其奈奎斯特频率在垂直方向上依赖于像素间距，而且常常是不同的。该限制背后的含义就是要测量一个特定频率或周期的条纹，每个测量周期必须进行至少两次采样，例如，我们必须能够测量到条纹的高点和低点。如果条纹频率超过了奈奎斯特频率，混叠的干涉图采样结果就不能被标准的PSI技术所解释。混叠效应及避开其限制的方法在14.13节中已有介绍。

14.11　品质函数

在显示和评估需要计算的相位 $\phi(x, y)$ 之前还要完成一项甚至多项工作。我们必须要补偿在相位计算中出现的不连续的结果如反正切值，因为标准的反正切计算仅仅定义在有限的角度范围，$-\pi/2$ 到 $\pi/2$。不考虑相位的真实值，从式（14.27）只能得到在这个限制条件之内的相位值，或者同其他算法相对应的相位值。这种限制似乎会限制我们能够测量超过半波长的 *OPD* 的能力。幸运的是，在计算中有足够的信息来补救这种情况，并提供一个可操作的扩展测量范围。此外我们知道，波前或表面其实是连续的并能够扩展到更大的范围。

对被计算相位的第一个校正是将计算范围拓展为 $0\sim2\pi$。这是可行的，因为正弦和余弦值的符号是已知的，与正切值的符号无关。对于四步算法，式（14.24）和式（14.25）直接与正弦值和余弦值成正比。类似的关系可在本节将讨论的其他算法中发现。表14.11给出了需要使正切计算结果转换为 $0\sim2\pi$ 之间数值的公式，它们是正弦和余弦计算值的函数，这个过程如图14.6所示。这种校正结果就是形成 2π 的波前相位的模；每一次的实际相位等于 2π 的倍数，计算值就归为0。通常，计算机已经支持这种计算方式，通过使用一个有时被写成为tan2的 $\arctan(y/x)$ 的反正切函数来实现。为简单起见，这里校正过的相位被称为原始相位、包裹相位或者以 2π 为模的相位。请注意表14.11只能在反正切计算的返回值位于 $-\pi/2$ 和 $\pi/2$ 之间时才使用。图14.30以图形显示出由图14.6所示的四帧干涉图计算的包裹相位轮廓。

表 14.11 2π模相位的校正

正　　弦	余　　弦	校正后的相位 $\phi(x, y)$	相位取值范围
0	+	0	0
+	+	$\phi(x, y)$	$0 \sim \pi/2$
+	0	$\pi/2$	$\pi/2$
+	−	$\phi(x, y) + \pi$	$\pi/2 \sim \pi$
0	−	π	π
−	−	$\phi(x, y) + \pi$	$\pi \sim 3\pi/2$
−	0	$3\pi/2$	$3\pi/2$
−	+	$\phi(x, y) + 2\pi$	$3\pi/2 \sim 2\pi$

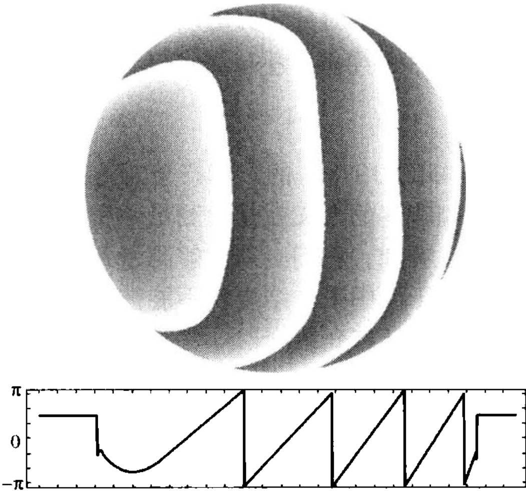


图 14.30　由图 14.6 所示的四帧干涉图计算的包裹相位轮廓

前面讨论的计算相位的方法如果存在光强图形的真实调制时才能使用。假如探测器的像素点超出了干涉仪口径或者它们被灰尘掩盖了或者其他方面的原因不能使用，像素点就会输出病态数据。这通常表现为一个常数值或者对那些特殊像素点仅有非常低的调制。在所有的光强值 I_i 均近似相同的地方，分子和分母将变成非常小的数值并接近反正切函数的奇点，在此处相位没有定义。

$$\tan\phi = \frac{N}{D}\arctan\left(\frac{0}{0}\right)(\text{没有定义}) \tag{14.156}$$

为了防止这个现象，使用了几种度量方式来识别有效和无效的像素点以对每一个待测像素点进行评价并设定一个品质函数。这是在执行原始相位解包程序前的一个重要步骤。

14.11.1 调制

在式（14.29）和式（14.65）中，我们引入了单像素调制度或者可见度 $\gamma(x, y)$，这是一个针对与每一个像素相关的数据的优良品质指示器

$$\gamma(x,y) = \frac{I''(x,y)}{I'(x,y)} = \frac{2}{\sum I_i(x,y)}\sqrt{\left[\sum I_i(x,y)\cos\delta_i\right]^2 + \left[\sum I_i(x,y)\sin\delta_i\right]^2} \tag{14.157}$$

如果把初始数据绘成极坐标系中的向量形式，每个像素点的初始相位就是向量的角度，

而调制就是向量的长度。图 14.31 左边给出了一个极坐标系统的示意图，右边是实际测量的数据集。注意标记的阈值和变形圆，圆上绘制的是测量点。这是由于相对应的数据集的相移器的失校对而引起的。此处，就像相位的计算，调制的计算也要受到以下误差源的影响，如移相器的失校准、谐波误差及光强的线性度误差，它们使得其余的理想圆变形。

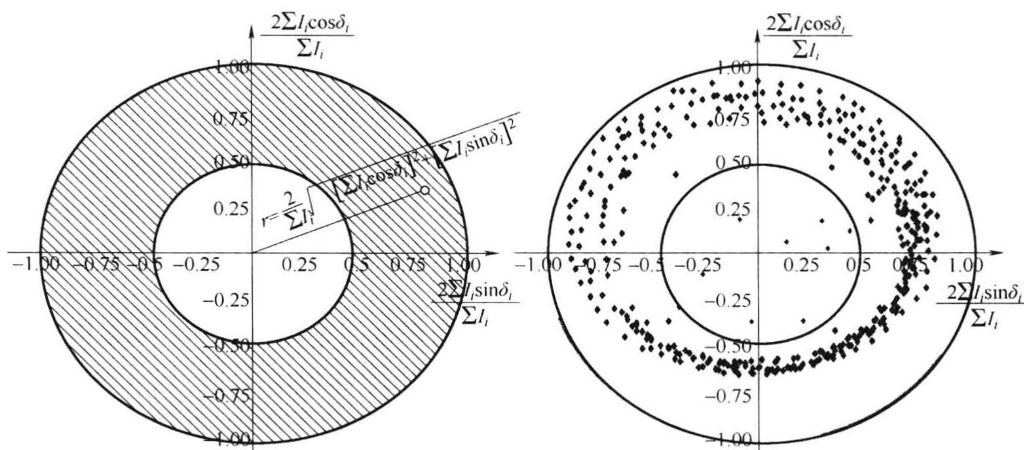


图 14.31　在极坐标系统中以半径表示的调制或可见度

1994 年，施温德阐述了调制对于这些同样的误差及当存在误差时相位的第二和第四阶谐波很敏感。

$$\widehat{\delta}_i=\delta_i+\varepsilon_i\Rightarrow\widehat{\gamma}=\gamma\frac{\sqrt{(1+A^2+C^2+S^2)+(2S-2AC)\cos2\phi-(2C-2AS)\sin2\phi}}{1+\gamma c\sin\phi-\gamma s\cos\phi}$$

$$A=\frac{1}{N}\sum_i\varepsilon_i,S=\frac{1}{N}\sum_i\varepsilon_i\sin2\delta_i,C=\frac{1}{N}\sum_i\varepsilon_i\cos2\delta_i,s=\frac{1}{N}\sum_i\varepsilon_i\sin\delta_i,c=\frac{1}{N}\sum_i\varepsilon_i\cos\delta_i$$

(14.158)

施温德也证明：依赖于使用的探测器，调制可以用来确定当调制降低时的欠采样像素。调制降低是由探测器的填充因子决定的。如果使用最优填充因子 1，在奈奎斯特极限处的调制衰减是 36%。

克宁思泰勒等（Kinnstaeter et al.，1988）在 1988 年证明了使用如图 14.31 中的李萨如（Lissajous）图形是一种非常有用的图形调试工具，可以快速识别误差源以及测量的内在特性。

14.11.2　残差

计算包裹相位图中残差（Goldstein et al.，1988；Huntley，1989）的办法经常常用来确定噪声和识别解包裹过程的边界条件。残差法基于的基本思想是：在一帧连续干涉图中的两个任意点 i_0 和 i 之间，条纹数量与选取的路径无关。

$$\phi(i)=\int_C\nabla\phi\mathrm{d}i+\phi(i_0)\tag{14.159}$$

图 14.32 试图说明沿着一幅连续干涉图存在不同的路径。

$$\oint\phi(r)\mathrm{d}r=0\tag{14.160}$$

式（14.160）为用来探测残差的主要标准。连续干涉图上的每一个闭合回路会造成零相位跳跃。如果它是不同的，那么一个局部的残差就出现了。

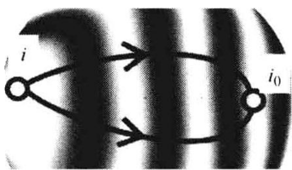


图 14.32 连续的相位图中的不同路径

图 14.33 举例说明了一个在中心有奇点的函数，如果相位不连续处的数量是围绕中心向左或向右计数，就出现一个不相同。

$$\oint \phi(i)\,\mathrm{d}i = \pm 2\pi \sum (\text{闭合路径内的残差}) \tag{14.161}$$

就如式（14.161）所表述的那样，闭环的解包裹结果或者为 0，或者为所选择的闭合路径内的残差之和。残差可以为正也可以为负，这取决于是否存在一个正的或负的奇点。就如戈尔兹坦（Goldstein）等和荷尔特里（Huntley）所指出的那样，一幅相位图的残差都是成双出现并且彼此关联的。

如果两个残差之间能够相关联，其中一个可以阻断彼此之间的路径。如图 14.33 所示，由于分支切割阻断了两个残差之间的路径（只允许围绕着它们的路径），式（14.160）中的连续相位条件实际上是存在的。图 14.34 所示为一幅模拟出的有缠绕的相位图中不同的闭合回路。

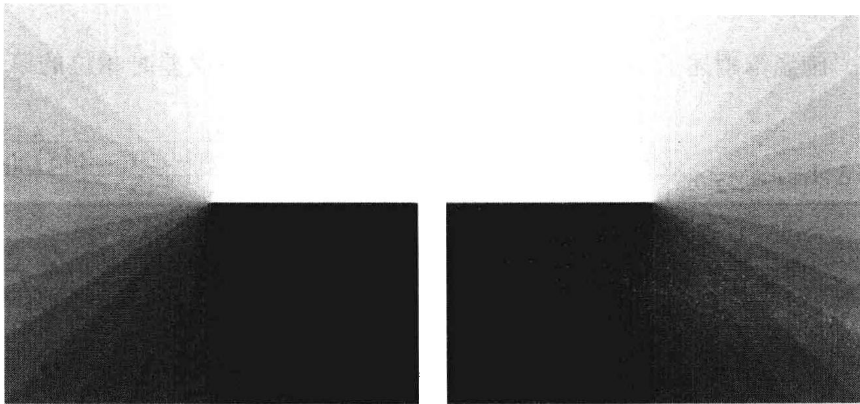


图 14.33 负的（逆时针，左）和正的（顺时针，右）残差图像

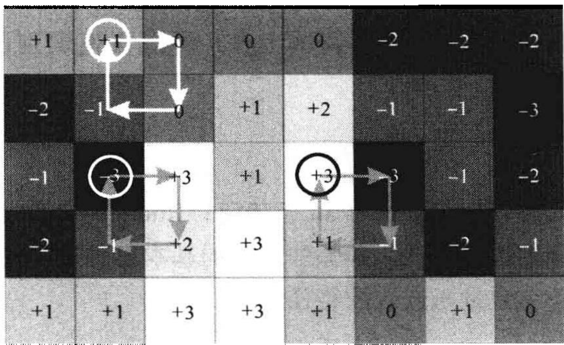


图 14.34 一幅模拟出的有缠绕的相位图中不同的闭合回路

（数字为对应于以弧度为单位的相位值。相位的中断点出现在相邻的两个值之差大于 π 的地方：无奇点（左上）、正奇点（左下）、及负奇点（右下）。）

图 14.35 所示为含有局部残差的真实测量结果。在这种情况下，测试中的透镜包含了光学特性，而且由于偏振光束通过了透镜及干涉仪，在探测到的干涉图上可以看到在残差位置上的是一个反向损耗以及残差之后的倒置条纹。还有，干涉图的相位在残差被剔除后可以计算出来。

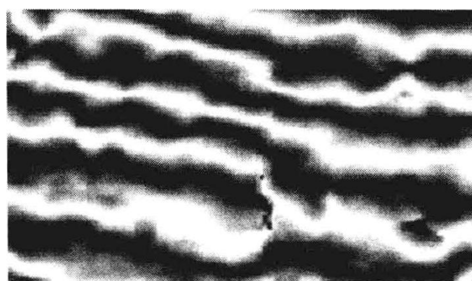


图 14.35 含有局部残差的真实测量结果

图 14.36a 所示为含有很强噪声的包裹相位图形，包含许多残差。这样的相位图形只会出现在有大量连贯噪声的如斑点干涉测量法中。然而，即使是在如此复杂的情况下，也发展了很多通过滤波来减少残差数量的方法。

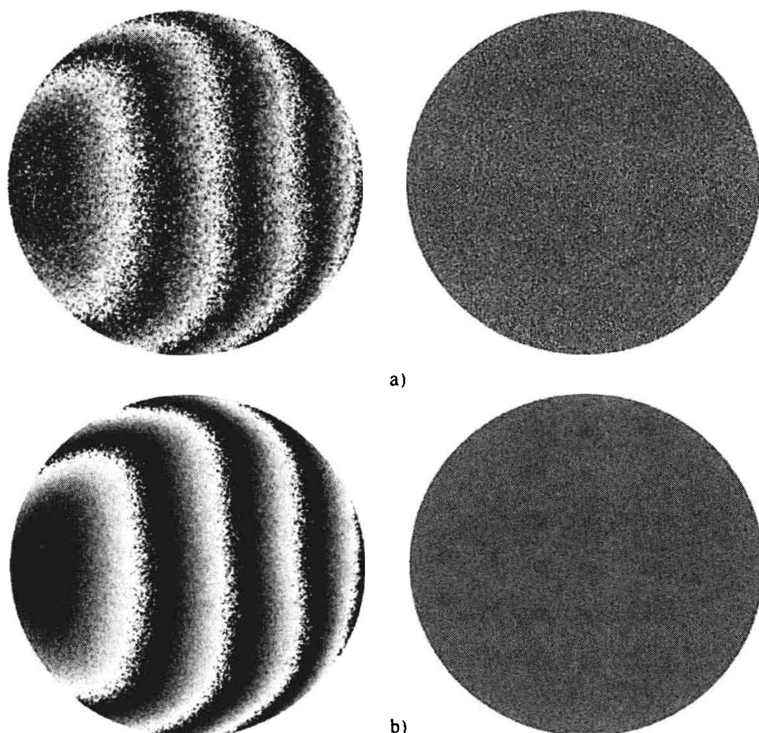


图 14.36 有噪声的包裹相位图像

a）有噪声的包裹相位图像及相应的残差 b）滤波后的干涉图以及减少后的残差数量

14.11.3 滤波

图 14.36 所示为有噪声的包裹相位图像（A noisy wrapped phase map），在计算品质函数之前可以用滤波方法来大大改善。无论如何，如果对包含有噪声的相位数据本身进行滤波，非连续点将在空间上被剔除。

然而，有一个简单的解决不连续问题的方法，它是基于对正切函数的定义。

由于在计算相位 ϕ 时使用的正切函数是通过计算两个确定的处处与 ϕ 相关联的数值函数之商来获得，其计算结果是不连续的，最适合在作除法之前单独筛选出分子和分母。

$$\tan\phi=\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\approx\frac{\text{filter}(\sin\phi)}{\text{filter}(\cos\phi)} \tag{14.162}$$

使用这项技巧不影响后面计算信号的相位跳跃，否则将被低通滤波所混淆。根据应用报道，

最佳滤波器使用的几种方法已经由鲍恩（Bone et al.，1986）、荷尔特里（Huntley，1989）、维克海德（Vikhagen，1990）、龚卡尔兹（Goncalves et al.，1993）及塞瑞（Seara et al.，1998）发表。

图14.36b为图a的低通滤波版本。右边显示了滤波过程如何大大降低残差的数量，因此也降低了后来解包裹过程的复杂性。布什曼（Bushman et al.，1993）、普里特（Pritt，1994）及弗瑞德兰德和弗朗西斯（Friedlander and Frances，1996）已经提出同时进行滤波和解包裹的方法。

滤波也可以在连续相位图计算以后再进行；然而，预先了解干涉图有助于滤波过程。

14.12 相位解包裹

波前重构过程的最后一步是消除原始相位数据形成时出现的2π非连续性。这个过程称为相位解包裹、相位复合或者相位连续化，它将检测到的以2π为模的相位数据转化为连续波前的表达形式。每当在重构中有大的不连续性发生时，2π或者2π的整数倍被加到毗邻的数据上以消除非连续性。这个过程的一维数据图解如图14.37所示。相位解包裹的二维作

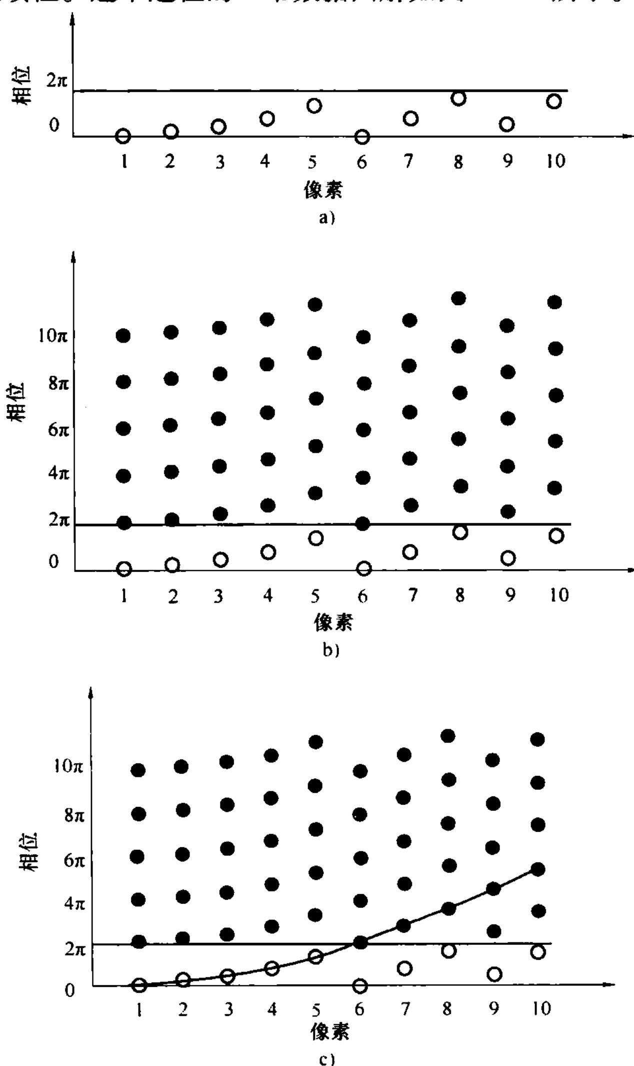


图14.37 PSI相位解包裹过程的一维数据图解

a）每个像素上以2π为模的波前数据 b）波前相位的所有可能解 c）重构的波前

用效果如图14.38所示。

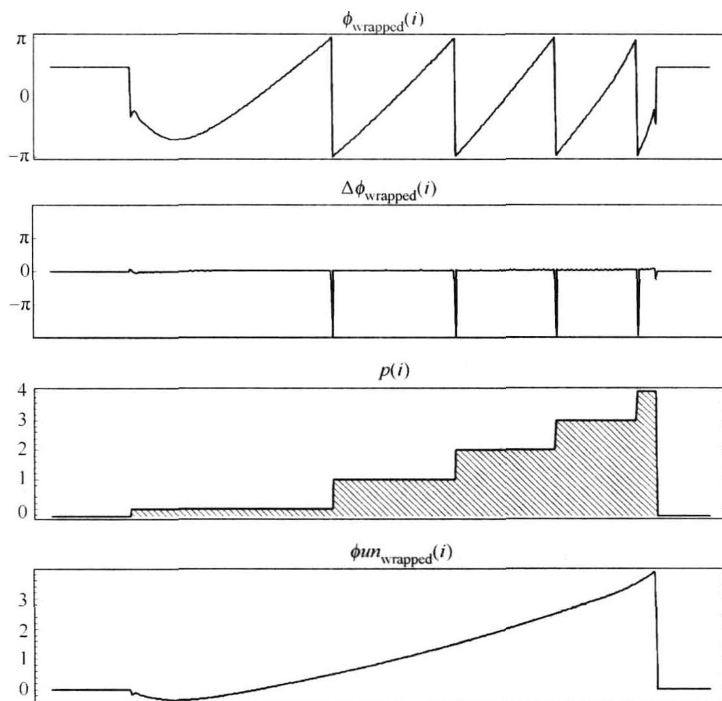


图14.38　相位解包裹的二维作用效果

（当平移函数和解包裹相位以条纹或2π的整数倍显示时，相位以弧度标示。）

14.12.1　一维解包裹

1982年，伊藤（Itoh，1982描述了解包裹过程的基础知识。在原理上，相位解包裹就是在计算中给包裹相位（式（14.115））加上一个2π的整数倍。解包裹过程决定了未知的2π整数倍的平移函数$p(i)$。

$$\phi_{\text{unwrapped}}(i)=\phi_{\text{wrapped}}(i)+p(i)2\pi \tag{14.163}$$

一种辅助确定$p(i)$的办法是检验沿着路径i上的相位差，此处$i-1$对应i之前的像素序号。可以看出，在图14.38中$\Delta\phi$在每个相位非连续点上有一个明显的尖峰。

$$\Delta\phi_{\text{wrapped}}(i)=\phi_{\text{wrapped}}(i)-\phi_{\text{wrapped}}(i-1) \tag{14.164}$$

使用$\Delta\phi$作为一个辅助量，可以在式（14.117）中沿尖峰方向增加或减少$\Delta\phi$来递归确定函数$p(i)$。当$\Delta\phi$呈现出一个相位的不连续或者仅仅是一个大的相位梯度时，此时的阈值常常设为π，其原因是在奈奎斯特条件下的条纹频率，相位差都是精确的π。因此，所有在奈奎斯特极限之下的相位差认定为相位梯度，而在此之上的认定为相位非连续并且需要解包裹。

当记录的干涉图满足奈奎斯特准则时，换句话说，每个条纹周期至少有两个像素，相位解包裹的进程就可以一直往前进行。每个条纹有两个像素意味着波前相位的变化按每个像素间隔不超过π进行。因此，这个准则用来重构丢失的平移项。

$$p(i)=\begin{cases}p(i-1)-1 & \Delta\phi(i)<\pi\\ p(i-1) & -\pi<\Delta\phi(i)<\pi\\ p(i-1)+1 & \Delta\phi(i)<-\pi\end{cases} \tag{14.165}$$

解包裹从波前的某个位置开始，通常是接近干涉图的中心，条件是任意两个相邻像素之间的相位变化不超过 π。解包裹相位图如图 14.39 所示。

如果计算出来两个像素间的相位差超过了 π，那么要在第二个像素计算值中加上或减去 2π 的整数倍直到满足以上条件。整个波前图形的计算是从起始点开始向外进行，故设 $p_{start}=0$。

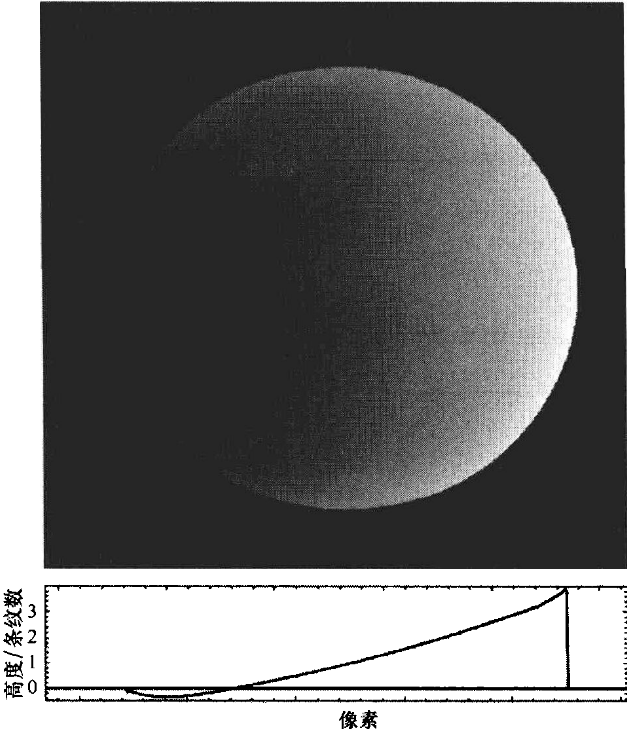


图 14.39 前面所示的解包裹相位图

14.12.2 二维相位解包裹

虽然一维解包裹过程比较简单，但是二维问题则复杂得多。在一维过程中，如果沿着路径缺失有效数据，没有额外信息是不可能完成解包裹的。在二维解包裹过程中，有多个路径对数据解包，并且获得的结果与选取的路径紧密相关。在处理噪声或损坏数据时，解包“问题”就变得很重要，并且许多文献对特定应用都提供了解决方案。

在伊藤于 1982 发表的文献之后，戈尔兹坦等（Goldstein et al.，1988）、荷尔特里（Huntley，1989）、荷尔特里等（Huntley et al.，1995）、吉利和艾瑞克（Ghiglia and Eichel，1994）、吉利和罗麦尔（Ghiglia and Romero，1996），弗林（Flynn，1996）、以及陈（Chen et al.，2000）发表的几篇文献都涉及解包裹问题，并使用了现有的高速计算能力来获取计算结果。

在此我们给出了二维解包裹的简要概述并请读者再次阅读吉利和普里特的书“二维相位解包”（Two dimensional phase-unwrapping）（Wiley，NY 1998），其中有具体的例子和更深入的研究。

算法的主要种类可分为路径跟踪算法和路径无关算法。

14.12.3　路径跟踪算法

奥本海姆和薛弗（Oppenheim and Schafer，1975）在1975年曾经发表最直接的相位解包方法，就是使用简单的一维表达式并以之解决二维问题。图14.40所示为一个可能的解决方案。一维解包从已知的一个有效起点开始进行逐渐趋向孔径边缘；然后正交于这条解包线路，再一次朝向孔径边缘进行一维线路解包。已经提出的另外一些扫描模式，如螺旋或者甚至填充算法，可用于绕过暗点或无效的像素。对于表现良好的低噪声数据，此方法的效果非常好。不过，如果在路径上存在噪声或无效的像素点，那么此后所有像素点所在的位置发生改变，将形成一个错误的平移函数。这种方法用于二维数据处理时通常具有速度快的优点，但是很容易受到噪声传播的影响。因此，许多种解包算法已经要求要提高抗噪性能或者减少误差传递。

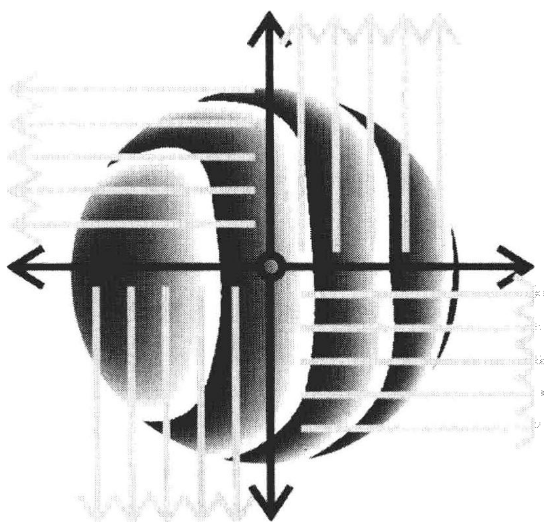


图14.40　一维方法的直接二维应用

（1）切割算法　分枝切割的原理首先在14.11.2.节中提出。戈尔兹坦等（1988）先提出，后来经荷尔特里（1989）进一步完善，这些算法使用的信息是通过确定残差的正负并将它们相互关联而得到的。通过引入分支切割算法，可以禁止在这些残差之间的路径上进行解包，强迫该算法找出另一条备用的路径。确定并互相联残差以生成正确的解包路径确实是增加了额外的计算量，但通常能得到比简单的一维方法更好的结果。

（2）质量优先路径算法　陈等（Ching et al.，1992），基罗加和伯纳乌（Quiroga and Bernabeu，1994），基罗加等（Quiroga et al.，1995），以及海瑞（Herráez，1996）于1996年发表的算法都集中在如何获取解包路径并引入了路径传输标准。这些算法对路径传输的约束是基于一种或多种度量，这些度量对所选路径的可靠性进行检查（参见图14.41）。例如，调制 γ 可用来确定的路径首先集中在具有最高对比度的像素和最后集中在最终用于解包的具有最小调制的像素。提出的另一种度量方法为相位梯度 $\Delta\phi$，它改变解包的方向以越过具有大相位差时出现的相位跳跃，首先要假定它最有可能是一个相位跳跃而不是相关的残差或噪声。

计算结果的质量在很大程度上取决于用来确定这些数值的可靠性的度量标准。

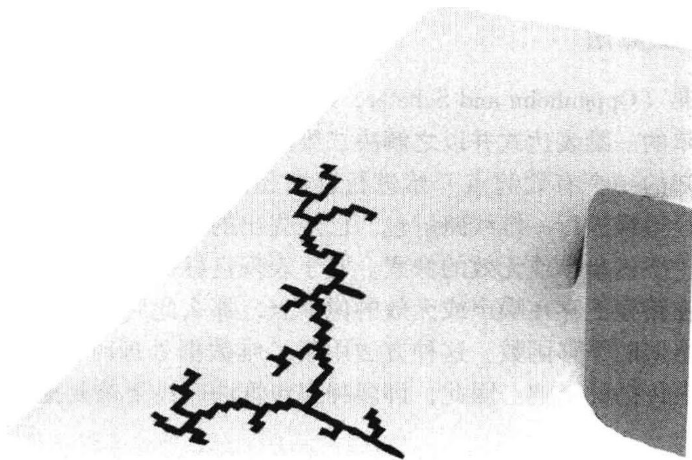


图 14.41 质量指向的路径算法沿着最小斜率波前方向传输

14.12.4 与路径无关的方法

与路径选择方式相比，还有一些其他方法来彻底避免选择一条路径，而是把测得相位图和解包过程的数据集作为一个整体处理。

（1）分区算法 吉尔罗夫（Gierloff，1987）于1987年介绍了“区域解包”的原理。如同我们在这里看到的图14.42，首先有缠绕的相位图被设置成由相位跳跃隔离开的几个区域。于是该算法试图确定单个区域相互之间的平移量，以找到最佳平衡点来消除它们之间的所有跳跃。

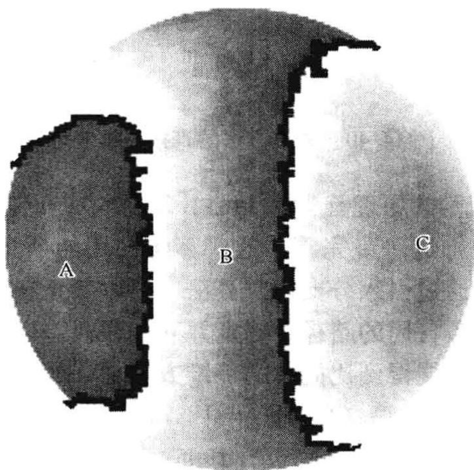


图 14.42 带有由相位不连续性分隔开的A、B和C三个区域的有缠绕相位图形

相似的算法有：如海瑞于2002年所发表的，使用图像分解方法来确定区域并对之解包。

另一种分区方法是将有缠绕的相位图分解成为许多较小区域中的小网格，再按照桃尔斯等（Towers et al.，1989），海瑞（Herráez，1996）和鲍尔迪（Baldi，2001）所述的方法逐一解包。解包后的小区域组合起来，再相对于其他区域进行解包。

（2）细胞自组算法 吉利等（Ghiglia et al.，1987）在1987年提出了基于简单相邻法

则的细胞自动调整方法。该方法试图通过迭代对相连的像素增加或减少 2π 的倍数，以尽量减少相位图的不连续性。尽管在减少整体不连续性方面效果很好，无效的像素点和噪声仍然存在；不过，减少程度依据法则来确定。使用标准的 RISC/CISC 型微处理器时，细胞自动机法的运行时间相当长，这是因为其并行处理没有用起来。不过，现在已有开发专用单元处理器的计划，这将大大加快该技术的实现速度。

（3）时域相位解包 荷尔特里和赛尔德勒（Huntley and Saldner，1993）提出一项技术可以不用通过查找动态信号来运行实际的解包，例如那些表现为机械变形的因素。以零变形开始，每一个新的步骤引入的变形不会大到引起不连续。最终的变形结果可能产生不连续，而每一个小的动态步骤则不会。这样，最终的结果通过分成许多小幅递增步骤来获得。这种对具有最小误差传递的相位变化引进小变形的过程就构成了增量解包过程。

14.13 非球面及扩展量程的 PSI 技术

从测试的角度来看，一个非球面波前或表面的首要特征是它与一个最佳拟合参考球面相比存在很大的偏离，所以，没有经过某种非球面零位补偿形成的干涉图含有许多条纹（参见第12章内容）。根据奈奎斯特条件，每个条纹至少要有两个像素，这是采用 PSI 系统可以检测到的非球面度的极限量度。可以测量到的无混叠的最大波前斜率也就为 π 每像素。在空间上，条纹频率正比于波前斜率，而且当用现有仪器对一个以球面做参考面进行测试时，即使轻度非球面表面也经常违反此条件。通常情况下，测试非球面表面不超过 10 ~ 20 波长的极限。精确的数字无法预测，因为最大的条纹频率与斜率相关，而不是与参考球面的峰谷值偏离量相关。

使用 PSI，通常有四种方法可用来测试非球面：①使用零位补偿元件（折射或全息）以减少波前中的非球面量；②使用一个具有更大像素密度的探测器阵列以增加探测器的奈奎斯特频率；③使用长波长（如 10.6μm 的 CO_2 激光）来重新定标对长波长的波前偏离量；④用小的足够数量的分块来测试波前的子孔径，以充分求解单个的子孔径。这些方法的每一种单论都不是完美的，而不同方法的交叉使用往往花费很长的测试设计时间，还需要额外的加工制造，增加了仪器使用和标定的难度、降低仪器精度，或大大增加仪器的成本。为了测试非球面表面而不依靠这四个方法之一，PSI 系统能够处理条纹密度的能力必须高于奈奎斯特频率，例如，那些混叠的方法。已经提出并证明了两种分析大偏离量面形或混叠干涉图的有效技术：子奈奎斯特干涉法和双波长 PSI。

14.13.1 混叠

在描述这些扩展范围技术的其中任何一种之前，有必要讨论有关混叠的更多细节。混叠属于一个采样成像系统的特性，它会导致输入的高频率成分丢失或者模糊，并显示为较低的空间频率，也就是低于奈奎斯特频率。这种特性可以用图 14.43 中的图形来表示，其中对输入的两种不同空间频率进行采样。为了说明这点，假设像素点无限小并且小圆点代表像素点上的采样值。图 14.43a 中，条纹频率为奈奎斯特频率的 2/3，或者说采样速率为 3 个像素点每条条纹或每个周期。采样输出显然是与输入具有相同的频率。图 14.43b 中的条纹频率为奈奎斯特频率的 4/3 倍，每两条纹仅有 3 个像素点。没有足够的像素来求解此频率，但记录的样本与图 14.43a 中测量的较低频率完全相同。由于检测到的输出图 14.43a 和 b 是相同

的，在图 b 中所显示的输出结果是频率为 $2f_N/3$ 而不是在 $4f_N/3$ 处。混叠的结果表现在条纹形态的显示上就是，用低频率的条纹替代了空间频率大于奈奎斯特频率的条纹，并且混淆了条纹图形的正常表现。

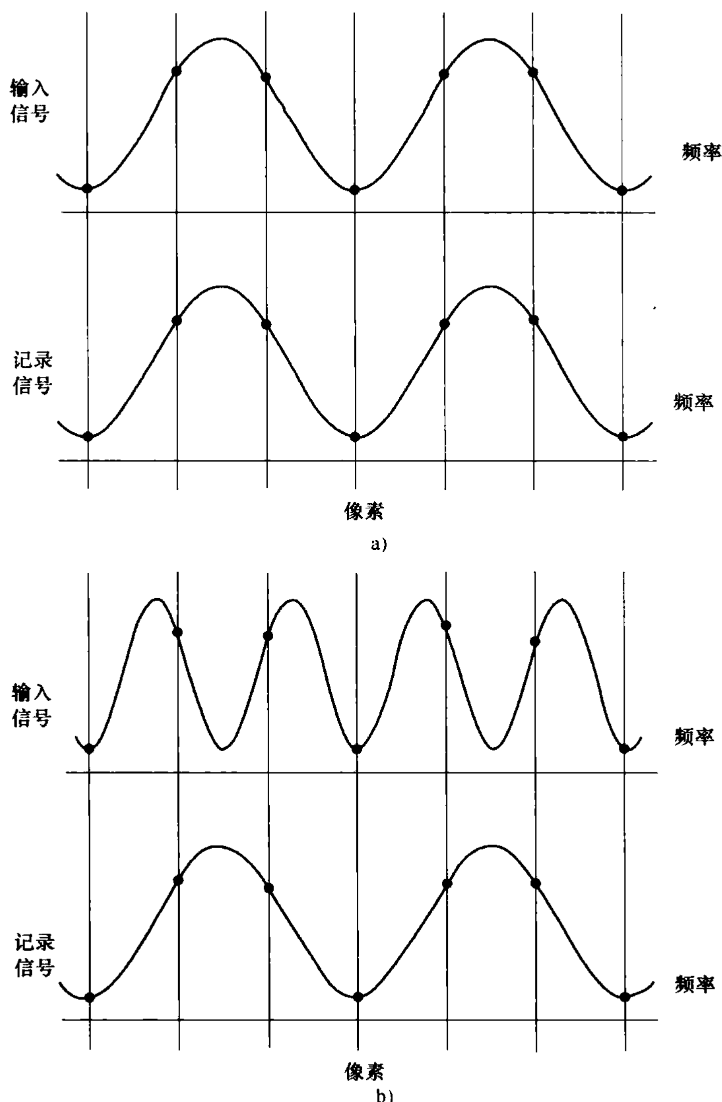


图 14.43 一维采样和混叠

a）输入的频率小于奈奎斯特频率 b）输入的频率超过奈奎斯特频率

对于 PSI 更重要的是，混叠现象表明了波前相位的变化速率大于 π 每像素。在此情况下，目前为止 14.12 节中叙述的相位解包操作必然失败，因为这一进程限制了每像素 π 的波前变化。

这个失败由惠特克-香农（Whittaker-Shannon）采样理论预测到了，它指出如果一个场景图像带宽在传感器的奈奎斯特频率以内，此图像场景就可以通过无采样误差的采样图像来恢复。默认的 PSI 相位解包操作基于图像带宽限制满足上述条件的假设。重要的是要注意，这个定理并没有说明当这个条件不能满足时，任何关于图像恢复的可能性。如果输入的场景或条纹图形相对奈奎斯特频率是不在频率范围内，一些关于测试波前或表面的额外信息或先验认识就需要用来适当地复原或解包相位。

14.13.2 子奈奎斯特干涉法

子奈奎斯特干涉法（Sub-Nyquist interferometry，SNI）是一种数据编码和分析的方法，它通过使用先验信息，能够极大地扩展PSI测量范围（Greivenkamp，1987b；Greivenkamp，1990）。SNI应用于非球面测试时，使用了一个简单的假设，即被测波前或表面是平滑和连续的，因此，存在连续的导数。这条附加信息可以用于分析从而判读哪些频率远高于奈奎斯特频率并且明显欠采样的条纹。SNI和PSI之间的差别出现在对2π模数据的相位解包期间。SNI不是使用通常PSI对波前高度的限制条件，而是要求重构的波前斜率在像素与像素之间不会出现大的变化。这个斜率连续性的约束条件限制了波前斜率的变化为π每个像素，并允许像素之间的波前高度有大的变化。每个像素添加适当2π的倍数来满足此项条件，而这也是在每个像素达到这一结果的唯一独立解。斜率连续的约束条件从混杂数据中正确地重构出了波前，除非实际波前的二阶导数超过约束条件规定的限度。当这种情况出现时，可能需要更多的补偿条件：例如二阶或更高阶的导数是连续的，并加上更多的2π倍数。这个过程可以一直持续到如下所述的一个更根本的限制。然而在实践中，一阶导数或者斜率的连续性非常有效地增大了PSI的测量范围，而更高的阶次通常是不需要的。

对于非球面的SNI相位展开过程在图14.44的中使用了与14.12节类似的点图。图14.44a所示为每个像素的反正切值的所有可能解，而空心圆表示2π的相位模。产生这些点的非球面如点画线所示，它正好穿过位于每一个像素位置上的圆。重构的目标就是确定这些点的正确位置。这些数据经典的PSI重构结果如图14.44b所示，第5个像素点重构失败，其原因是正确的点并不是最近的点；波前的变化超过了π每像素。重构中显示出了波前斜率的较大变化。任何其他选择都违反斜率连续性条件。可以通过外推一条有适当阶次的曲线来施加高阶约束条件，经过拟合的该曲线必须穿过一定数量的已知圆点。例如，二阶导数连续性就使用穿过前三个点的二次拟合。

对于一个SNI系统的测量范围，最根本的限制是传感器对高频条纹的响应能力：像元调制传递函数（MTF）。对于反正切计算的良好结果，测量数据的调制必须要高，并且传感器对条纹的响应必须高于奈奎斯特频率。由式（14.154），我们看到，通过使用一个具有小的宽度与间隔之比的像素的传感器，像元MTF的范围提高了。对于普通的传感器，这个比率通常为50%～100%；而且这种应用需要的稀疏阵列传感器，其比率应接近10%。这个传感器上的像素点都近似为一个点探测器，并且像元MTF的第一零位频率在20倍奈奎斯特频率处。该像元MTF同标准传感器的比较，如图14.45所示。使用这个传感器和SNI可以检测到的最大波前斜率，与用PSI和同样数量像素点来检测相比，可以提高达20倍。取决于波前函数形式的检测范围，甚至增加了一个更大的因子。

图14.46所示为一些干涉图及对它们的评判。该波前的干涉图如图14.46a所示，探测器的欠采样干涉图如图14.46b所示而且严重混叠。围绕中心环的圆环图形为混叠的条纹。这些附加图案中每一条的中心产生于当实际的条纹频率等于传感器的奈奎斯特频率一倍的时。图14.46c中干涉图形的PSI重构，仅仅在中心非混叠区域内表现出良好的重构结果，而混叠的条纹被错误地理解了。二维SNI产生如图14.46d所示的平滑二次波前重构。此结果中的横向条纹是由于所使用算法较简单所至；相位解包算法还没有被教会要跳过坏的数据点。

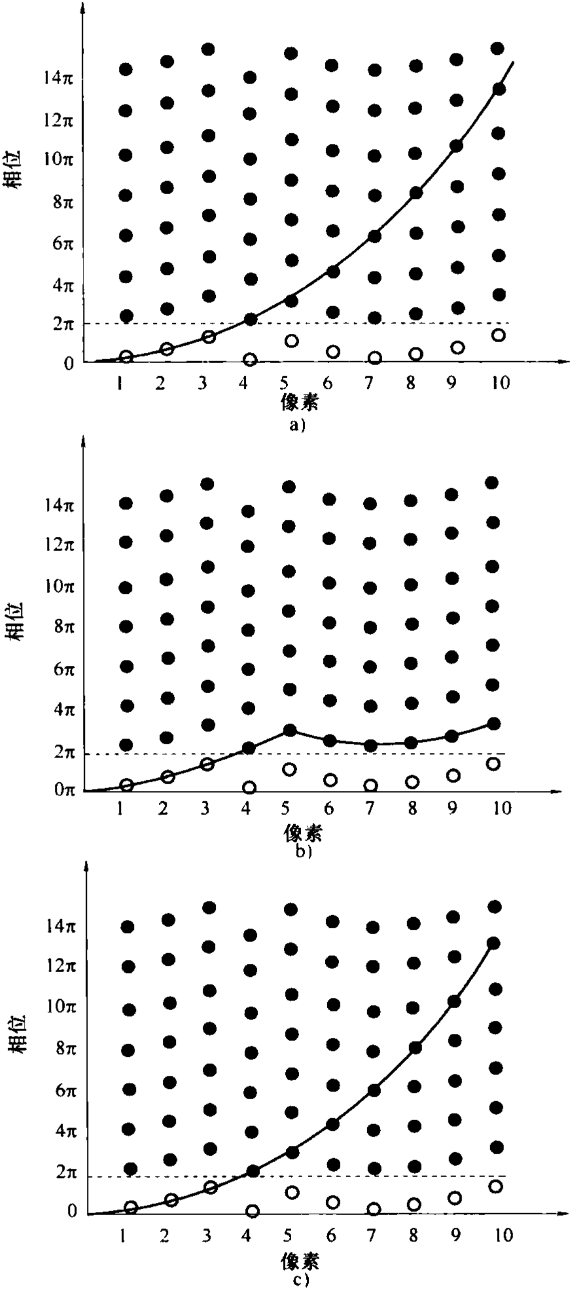


图 14.44 SNI 重构过程

a）每个像素点上可能的波前相位解 b）该数据的标准 PSI 重构 c）使用斜率连续性的 SNI 重构（Greivenkamp，1987b）。

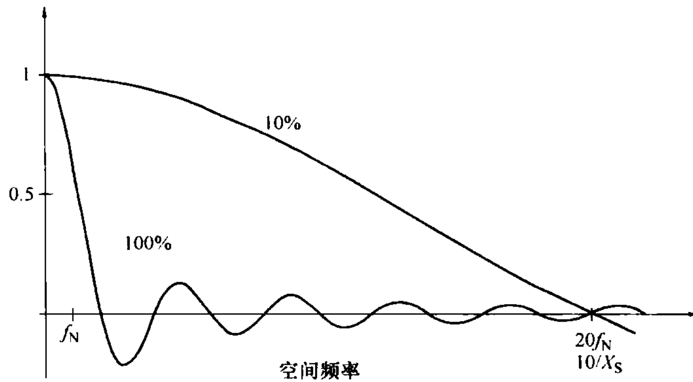


图 14.45　稀疏阵列传感器与标准传感器像元 MTF 的比较

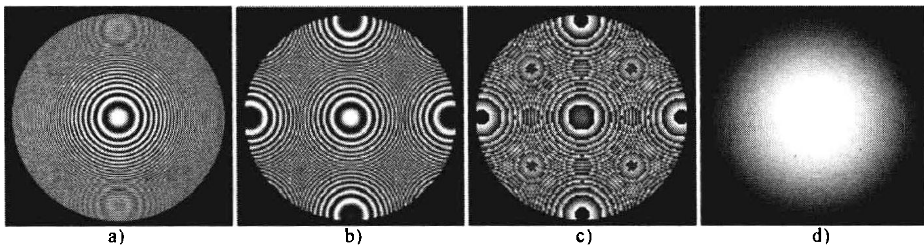


图 14.46　干涉图及对它们的评判

a）离焦波前的采样干涉图　b）探测器看到的欠采样干涉图　c）此数据的标准 PSI 重构　d）使用斜率连续性的 SNI 重构

SNI 可以使非常复杂的条纹图案得以理解，需要在实际执行 SNI 之前处理的主要问题是标定。没有零位补偿的非球面表面检测会导致错误的结果。

在零位测量情况下，在曲率中心使用非佐干涉仪来检测球面，如图 14.47a 所示。由被测表面反射回来的光线沿着由参考表面反射光线同样的路径穿过聚焦透镜和干涉仪。参考波前和被测波前有相同的额外畸变量，而且这个畸变被忽略了。这种与检测非球面的情况不同，如图 14.47b 所示。这两路光可能差异很大，在两束相干光中产生不同的系统误差。关于此情况最简单的考虑方法是非球面不同环带在不同共轭点和不同孔径处使用不同的聚焦透镜，而且这只能补偿一个共轭点。干涉仪测出的波前差不是简单的被测波前和参考面波前之差。一个非球面测量系统需要整个干涉系统，包括干涉仪所有的光学元件，在测量中都要进行非球面的光线追迹。

14.13.3　双波长 PSI

用于在奈奎斯特频率之外拓展 PSI 测量范围的双波长 PSI（TWPSI）的额外信息是用不同的波长对零件进行单独测量（Wyant et al，1984a；Cheng and Wyant，1984；Fercher et al，1985；Creath et al，1985；Creath and Wyant，1986；Wyant and Creath，1989）。

采集两组完整的干涉数据，并计算在每个波长处的 2π 相位调制。由于 2π 相位在不同波长时表示不同的 *OPD*，故只能选择其中一个能同时满足两组数据的波前变化。TWPSI 也可以用点连接的表示法来解释，如图 14.48 所示。现在垂直轴度量用 *OPD* 代替了相位，与波长无关。每组数据在每一个像素点上产生自己的序列，各点间距为波长。两组落在彼此顶

部的点的位置表明波前可能的正确解，现在删除了许多个别点。

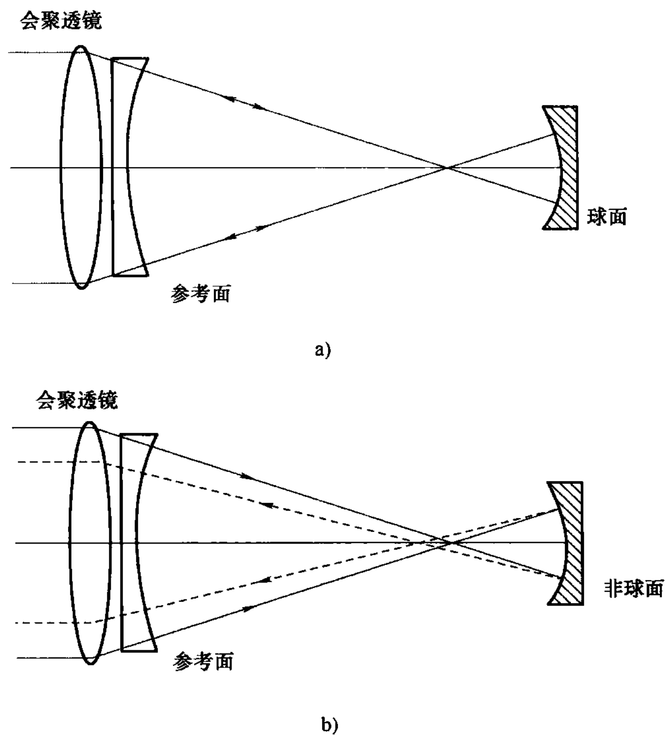


图 14.47 需要标定和光线追踪

a）在其曲率中心检测球面 b）同样情况下检测非球面

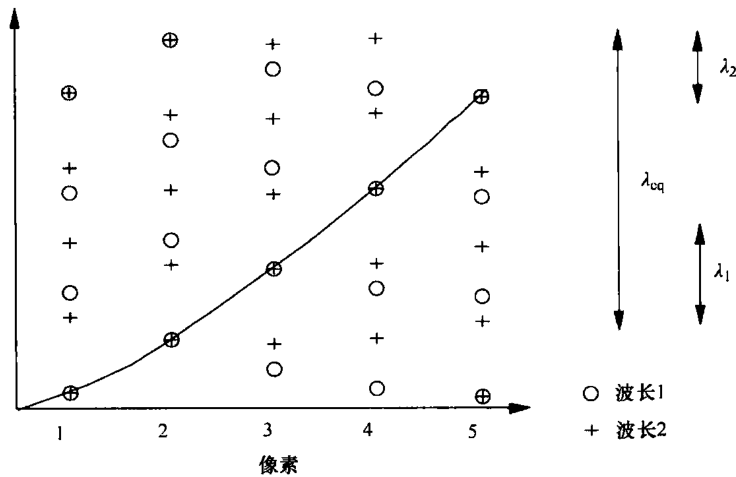


图 14.48 双波长 PSI

在每一个像素点上，存在多处位置重合，而且这些点的间距为等效波长

$$\lambda_{eq}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{|\lambda_1-\lambda_2|} \tag{14.166}$$

此处 λ_1 和 λ_2 为两种测量波长。普通点的相位解包裹现在变为使用等效波长的标准 PSI 技术。由于等效波长比实际波长长得多，就可以在算法分解前处理大的波前斜率。对于非球

面，在一台干涉仪中操作两种波长需要对光学系统进行两种波长的光学补偿，并且在测试非球面时要追迹这些光线。也可以将这一技术拓展用于多于两种波长（Cheng and Wyant，1985a）的场合。关于这些多波长技术，第17章将有更多论述。

在测量非球面表面的SNI和TWPSI中存在一个重要的相似性：两种方法都以能够测量混杂条纹为基础，因此需要小宽度间距比像素的稀疏阵列传感器。它们同时受限于像元MTF。一个阻碍TWPSI实际应用的现实问题是存在于参考光学元件及干涉仪的色差。这些光学元件必须在两个波长之间消色差。对于表面高度大于1/4波长的测量步长或非连续性的应用（波前相位用π表示）情况，会得出与非球面所需要的不一致的解。与高频率条纹相反，条纹图形存在中断。单波长技术在各步骤之间会丢失追踪条纹的序号，并且得不到正确的结果。相反，多波长技术可以确定条纹序号，而且能够测量大大超过1/4波长步长的表面高度。TWPSI已经成功地使用干涉显微镜解决了这个问题（Creath，1987a），这个应用也将在17章中讨论。SNI已经应用于基于单波长的非连续表面测量，但是需要注意步长间的增幅是已知的$\pm\lambda/4$(Greivenkamp et al，1989)。这个附加信息使得2π的校正数将被加在反正切的数据上。由于测量步长的这些技术都与探测到的假频条纹无关，故不用考虑专用传感器。

14.13.4 子孔径拼接

一些其他方法已经应用于解决非球面检测中存在的问题（Wyant，1987)。这些方法的目标是减少用于分析的单干涉图中的条纹数量。其中两种为剪切干涉方法和子孔径检测方法。

使用剪切干涉仪检测非球面的诱人之处在于测试灵敏度可以通过调节剪切距离来改变（参见第4章内容）。如此，条纹数量就可减少。然而，要测量一个非对称的波前，必须采集两组正交剪切PSI数据。在以横向剪切为基础的情况下，径向剪切和朗奇测试都已证明是可行的（Hariharan et al.，1984；Seligson et al.，1984；Yatagai and Kanou，1984；Yatagai，1984；Kothiyal and Delisle，1985b；Kanoh，1986；Omura and Yatagai，1984)。用剪切干涉仪测量波前斜率，然后通过合成找到实际的波前或表面。测试中的一个实际困难是噪声，它将伴随整个波前的重构过程并存在于合成的结果中；一个不好的像素点可以影响大部分的波前像差图。当直接测量波前的时候，不良像素的影响可以在该点位置标定。

子孔径检测非球面的基本思想是将波前分割为小区域；每个子孔径中的波前误差要小于仪器的测量动态范围。要保证最大的条纹频率小于传感器的奈奎斯特频率。于是问题就变成如何将这些分离的测量结果拼接起来还原为非球面波前或表面完整的相差图，其中包括不同程度的倾斜、平移甚至有时还有离焦（Kim，1982；Thunen and Kwon，1982；Jensen et al.，1984；Negro，1984；Stuhlinger，1986；Liu et al.，1988)。图14.49所示为一组子孔径。总波前表示为一个展开的多项式，而且子孔径的数据经过分析后用于确定展开系数。一般选择泽尼克多项式表达方式，并且只使用其中的有限项。此方法可给出完整的非球面波前形状。小的或局部误差由子孔径数据确定，不会出现在拟合的最终多项式中。尤其重要的是，在全孔径中的每个子孔径位置必须精确的定位。

一种子孔径方法已经用于扩大干涉测量表面轮廓显微镜的视场（Cochran and Wyant，1986；Cochran and Creath，1987，1988)。这种方法可以提取一系列的表面局部误差相交线。

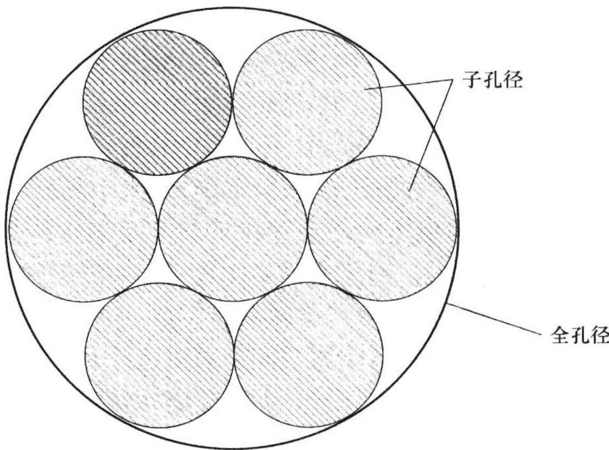


图 14.49　子孔径拼接示意图

通过调节倾斜、平移及位置来尽量减少相交区域中交线之间的差异，于是这些测量结果可组合为一条相交线。拼接技术已在专业的非球面测试解决方案中得到了实现，可以在拼接中选择不同几何形状和网格来测量各种不同偏离量大小的非球面（Tricard et al.，2006）。

14.14　其他分析方法

本章大部分内容都是集中在移相干涉技术中最常用的相位跃变和 bucket 积分算法上。还有其他的一些移相干涉算法和系统也有了不错的发展。本节，我们将介绍其中一些较为特别的方法。其中一些方法在历史上有重要地位，另一些方法在实际应用中也相当有效。

14.14.1　零交叉分析方法

零交叉分析方法是一种电子技术，它直接测量干涉图上不同位置的光强信号之间的时间延迟。通过对时间延迟的测量可以计算两点间的相对波前相位（Crane，1969；Moore，1973；Wyant and Shagam，1978）。重新观察图 14.1，可以发现干涉图上的任意位置处光强呈正弦曲线变化，同时某点的时间相位和波前相位成比例关系。如果指定干涉图中的某点为参考点，那么就可以测得参考点与另一点之间的时间延迟。这些数值可以通过以参考信号为周期进行标准化转化为以 2π 为模的波前相位。零交叉方法是一种实用方便的测量时间间隔的方法。因为光强不可能为负值，所以先确定参考光强量级［例如平均光强 $I'(x, y)$］以便用来确定零交叉的位置。要测量二维波前，必须测量大量测量点位置相对于参考点的时间延迟。

14.14.2　同步检波

同步检波方法是一种较早使用的测量相位跃变的技术，如今依然在使用。它基于众所周之的无线电通信理论，其中未知信号的相位通过使用相同频率的正弦信号进行复原。（Bruning et al.，1974；Bruning，1978）。因为是一个线性参考相移，故干涉图的光强分布如式（14.167）所示（由式（14.6）得）

$$I(x,y,t) = I'(x,y) + I''(x,y)\cos[\phi(x,y) + \alpha t] \tag{14.167}$$

其中，α 是参考相位的变化率。因为我们控制着参考相位，所以 α 为已知值，由此可以得到相同频率的正弦和余弦信号。该余弦信号与每一点的干涉图光强互相关

$$\langle I_1(x,y)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T I(x,y,T)\cos(\alpha t)\,\mathrm{d}t \tag{14.168}$$

可以简化为

$$\langle I_1(x,y)\rangle = I''(x,y)\cos[\phi(x,y)] \tag{14.169}$$

同样可以可到正弦信号的形式

$$\langle I_2(x,y)\rangle = -I''(x,y)\sin[\phi(x,y)] \tag{14.170}$$

我们讨论了的所有相位跃变技术，波前相位与 2π 的模都可以由上述两者之比的反正切来表示

$$\phi(x,y) = \arctan\left[\frac{-\langle I_2(x,y)\rangle}{\langle I_1(x,y)\rangle}\right] \tag{14.171}$$

这种分析方法同样可以测量此种技术和 PSI 技术的抗噪性。干涉图中的附加噪声并不影响相当于相移的频率 α，而且这些噪声项的互相关平均结果为零。

以类似的方式，这种互相关可以表示为时间的抽样数据。当在参考相位的一个 2π 变化范围内进行 N 次干涉图光强测量时

$$\delta_i = i2\pi/N \qquad i=1,\cdots,N \tag{14.172}$$

用简单的傅里叶级数分析来求解未知的波前相位

$$\phi(x,y) = \arctan\left[\frac{-\sum I_i\sin(\delta_i)}{\sum I_i\cos(\delta_i)}\right] \tag{14.173}$$

其中从 1 到 N 累加求和。所得结果与通过在适当频率下进行光强数据的最小二乘拟合方法得到的结果是一致的（如式（14.66））。

14.14.3 外差干涉测量法

外差或是 AC 干涉测量法是过去常常用来描述干涉仪的一般术语，通过在干涉仪的两臂中引入不同频率的光线来产生一个时间相位的延迟。用来产生频差的方法有几种，最普遍的是移动的衍射和双频激光器（如 14.4 小节）。不管使用什么方法，都要在频率差上调整干涉图光强（式（14.9）~式(14.12)）。外差干涉测量法的实质是一种测距干涉测量法，测量系统的动态特征和表面形貌（Crane，1969；Koliopoulos 1980；Som-margren，1981；Barnes，1987）。

为了满足高速分析动态系统的需求，数字式外差干涉测量法（DHI）得到进一步发展（Massie and Nelson，1978；Massie，1980，1987；Massie et al.，1979；Mottier，1979；Massie et al. 1981；Massie et al. 1983；Evans，1983）。这种技术的两个重要的应用是变形反射镜和湍流场测量。为了获得有用的移相干涉数据，相位移动必须按照一定速率出现，移动的速率要比观测到的变化快。布拉格声光调制器是获得频移最方便的方法，可以获得 0～1MHz 的任意频率。干涉图光强在一定的频率上分布，同时波前相位被调制为在不同的测量点上的不同振荡相位。由于不同频率的介入，故需要高灵敏度的探测器，而常用的摄像机则不能满足要求。原理上最简单的获得数据的方法是使用一组各自相互独立的探测器。每个探测器输出不同相位的 1MHz 的信号。假定其中一个探测器为参考物，其他信号的相位测量值与参考信号相关。一种相位检测方法，例如上面所描述的零交叉检测方法，可以通过测量不

同的相位，以 2π 为模绘制一个波前图。一个高帧频摄像管；也称为析像管可以用来作为探测器。这种摄像机同时也起到了一个快速扫描光电倍增管的作用。目前已有重复性优于 $\lambda/100$ RMS 的数字式外差干涉测量系统。

14.14.4 锁相干涉测量法

锁相干涉测量法需要为反射镜提供一个小的正弦振荡（Johnson and Moore，1977；Johnson et al.，1977、1979；Moore et al.，1978；Matthews，et al.，1986）。其平均参考相位同样也是变化的，如下所示

$$\delta(t)=\delta+a\sin\omega t \tag{14.174}$$

其中，a 为远小于波长的振幅值。干涉图光强为

$$I(x,y,t)=I'(x,y)+I''(x,y)\cos[\phi(x,y)+\delta+a\sin\omega t] \tag{14.175}$$

式（14.175）中光强的级数展开为

$$\begin{aligned}I(x,y,t)=I'(x,y)+I''(x,y)\{&\cos[\phi(x,y)+\delta][J_0(a)+2J_2(a)\\&\cos2\omega t+\cdots]-\sin[\phi(x,y)+\delta]\\&[2J_1(a)\sin\omega t+2J_3(a)\sin3\omega t+\cdots]\}\end{aligned} \tag{14.176}$$

其中，J_n 为 n 阶贝塞耳函数。除了振荡的基频外，其他的高频形式也存在。此信号通过滤波器后只允许基频 ω 通过，即

$$I_f(x,y,t)=-2I''(x,y)J_1(a)\sin[\phi(x,y)+\delta]\sin\omega t \tag{14.177}$$

此信号有两个有趣的现象。其一，如果平均参考相位 δ 是变化的，则 $\phi(x,y)+\delta$ 等同于 π 的一倍，$I_f(x,y,t)$ 趋于零，且由于反射镜振荡或者抖动的原因使光强调制不存在了。重新查看图 14.1，这种情况相当于位于曲线的最大值或是最小值处；由抖动引起的这种相位上的微小变化不会引起光强的任何改变。其二，注意观察 $I_f(x,y,t)$，它的重要在于其与干涉图形的斜率成正比关系，对于 $\phi(x,y)+\delta$ 的微小值，其实际上与距离最边缘处的相位成正比。斜率信号被编译为此信号相对于驱动信号的相位；这样可以通过仪器测量找到光强最大值用以取代最小值。

干涉仪的工作原理是使用探测器测量干涉图上一个位置经过滤波的光强信号 $I_f(x,y,t)$。此信号的振幅和相位通常用来产生一个反馈信号，该反馈信号往往会指出相移控制器是如何将平均相移 δ 变化至零的。当取零值时，$\phi(x,y)+\delta$ 之和等于零、模数为 2π，这样正位于条纹最大值之一。由于已知 δ，故可以确定波前相位 $\phi(x,y)$ 与 2π 的模的值。随着波前相位改变，反馈信号也将用于改变平均相移以维持零状态。当要求的平均相移达到 $\pm2\pi$ 时，上升或是下降计数器增加或减少，然后 δ 被重置为零。这样便减少了 PZT 上的行程要求，以便产生相位移动的调整量和并且计数条纹数量。波前相位由所计数的 2π 的总数加上 δ 的当前值计算得到的。为了测量一个区域，探测器需要扫描整个波前。由于扫描速率会发生改变，含有大量条纹的干涉图可以通过锁相干涉法测量出来，同时重复精度可以达到 $\lambda/100$RMS。

14.14.5 空间同步检波和傅里叶方法

虽然称 PSI 技术是不严格的，但通常人们所说的空间同步检波和傅里叶干涉分析方法都与 PSI 技术存在相似之处。两者都是观测一幅干涉图的条纹分析方法，因此都可以在存在气流和振动的情况下进行测量。这两种技术在无需确定条纹中心时，测量精度都远高于标准的

干涉图分析技术；相关数据在一个规则网格进行采集以便于和电子计算机分析相兼容。

空间同步检波通过在空域上使测量的干涉图形与基准图形相乘而实现。（Ichioka and Inuiya，1972；Womak，1984a；Toyooka and Tominaga，1984）。未知干涉图形和基准图形的表达式为

$$I(x,y)=I'(x,y)+I''(x,y)\cos[\phi(x,y)+2\pi f_0 x] \tag{14.178}$$

和

$$R(x,y)=\cos(2\pi f_0 x) \tag{14.179}$$

其中重要的是将一个波前倾斜量加入干涉图，且f_0为由倾斜引起的条纹频率。$R(x, y)$是均匀的条纹图形（倾斜条纹）且非常接近干涉图，在实际中和计算上都是可实现的。这两种图形相乘的结果为

$$I(x,y)R(x,y)=I'(x,y)\cos(2\pi f_0 x)+[I''(x,y)/2]\cos[\phi(x,y)+4\pi f_0 x]+[I''(x,y)/2]\cos[\phi(x,y)] \tag{14.180}$$

式（14.180）中第三项包含低空间频率，可以通过其他两项滤波来产生

$$S_1(x,y)=[I''(x,y)/2]\cos[\phi(x,y)] \tag{14.181}$$

类似的，第二个滤波过的信号是由干涉图与参考图形的乘积引起的，等同于$\sin(2\pi f_0 x)$

$$S_2(x,y)=[I''(x,y)/2]\sin[\phi(x,y)] \tag{14.182}$$

2π模的波前相差与可以通过上面两个信号的比来计算

$$\phi(x,y)=\arctan\left[\frac{S_2(x,y)}{S_1(x,y)}\right] \tag{14.183}$$

这种算法与许多PSI算法，特别是式（14.171）表示的同步检波算法之间的相似性更为明显。研制了类似的系统，将干涉图成像在两个独立的探测器上，且各自的输出信号为了确定相位而被正弦加权（DeCou，1974；Mertz 1983a，b，1989）。

傅里叶分析方法实际上是同一分析方法，但是其计算是在空间频率域而不是空间域进行。（Takeda et al.，1982；Macy，1983；Nugent，1895；Bone et al.，1986；Kreis，1986；Roddier and Roddier，1987）。由式（14.178）表示的带有倾斜的干涉图形可以被改写为

$$I(x,y)=I'(x,y)+c(x,y)e^{i2\pi f_0 x}+c^*(x,y)e^{-i2\pi f_0 x} \tag{14.184}$$

其中

$$c(x,y)=[I''(x,y)/2]e^{i\phi(x,y)} \tag{14.185}$$

*表示复共轭，$I(x, y)$的一维傅里叶变换式为

$$\tilde{I}(\xi,y)=\tilde{I}'(\xi,y)+\tilde{c}(\xi-f_0,y)+\tilde{c}(\xi+f_0,y) \tag{14.186}$$

其中，ξ为空间频率坐标，~表示为傅里叶变换式。此函数是个最小值和最大值分别为$-f_0$和f_0的函数，如图14.50a所示。中心在f_0的光谱分量可以在没有载波的情况下回复，通过先进行带通滤波，然后将隔离的光谱图移动回原始位置，如图14.50b所示。这导致函数$\tilde{c}(\xi, y)$。逆傅里叶变换式$c(x, y)$由式（14.185）描述。波前相位的2π模的根据下面的反正切确定

$$\phi(x,y)=\arctan\left\{\frac{\mathrm{Im}[c(x,y)]}{\mathrm{Re}[c(x,y)]}\right\} \tag{14.187}$$

其中，Re和Im为函数的实部和虚部。

当被测波前与参考波前存在比较大的偏差时，上述的两种空间技术都会面临一个问题。干涉光谱的三个分量存在着重叠；而且不可能通过滤波将它们完全分离。各种滤波器被用来优化这些技术的输出干涉光谱图（Womak，1984a、b）。

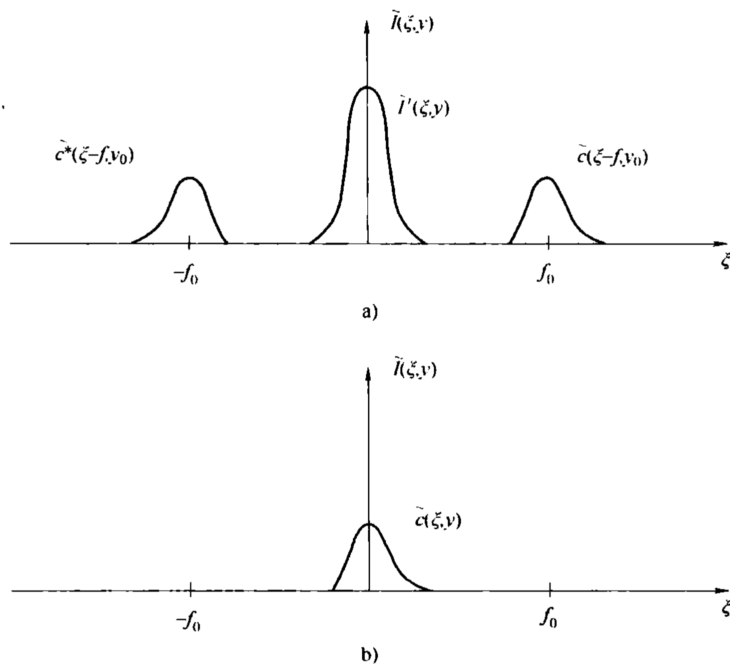


图 14.50 傅里叶条纹分析

a）干涉图光谱 b）处理过的光谱

14.15 计算机处理和输出

现在完整的波前相位信息已经存入计算机存储器中，我们可以利用计算机来分析和显示这些数据。许多不同的分析方法可以应用于不同的应用领域。初始分析常常开始于将测得波前拟合为多项式的展开形式，通常为泽尼克多项式（Kim and Shannon，1987）（见本书的第13章）。对应斜率和焦点的这些展开项，可以从测得波前中去除，仅留下波前误差，正如根据最佳拟合参考球面所测出来的偏差（如果是平面，仅有倾斜量被去除，由于我们关注波前曲率半径）。高次像差，如球差，彗差和像散，也能被去除。PSF 和 MTF 技术中测得波前误差和衍射可以根据波前数据简单地计算得到。首先以式（14.3）的形式表示波前，其中包含振幅项

$$w(x,y)=a(x/d,y/d)\,e^{i\phi(x,y)} \tag{14.188}$$

振幅项 $a(x,\ y)$ 定义了出瞳直径 d。PSF 的振幅由波前函数的快速傅里叶变换确定，并且 PSF 光强通过此结果的模的平方得到（Goodman，1968）。因为波前代表的仅仅是相对于参考球面的误差，这个误差结果必定与波长和系统 $f/\#$ 的像平面有关。光瞳直径已经包含在波前表达式中，以便由 $x/\lambda f$ 和 $y/\lambda f$ 分别取代空间频率变量 ζ 和 η 实现缩放，表示为

$$\mathrm{PSF}=\left|\,\tilde{w}(\xi,\eta)^2\,\right|_{\xi=x/\lambda f;\,\eta=y/\lambda f} \tag{14.189}$$

其中，~代表傅里叶变换，f 为焦距。带有圆形光瞳的非失真波前的计算结果为爱里（Airy）图形，且像差会影响 PSF 的值。系统 MTF 对于被测波前的作用通过对 PSF 做一次快速傅里叶变换而显现。此变换结果恰好与光学系统的 $f/\#$和衍射极限截止频率 $1/(\lambda f\#)$ 有关。

有时我们并不知道系统参数（光瞳直径、焦距和波长），或者在测量的时候才定义这些参数。因此，以任意单位表示结果很有用。例如在用多光学元件系统中测试平面镜；我们只关注平面镜对系统特性的影响，并且假设该表面的像差会经过系统传播到最终收敛的波前。我们也不可能以最终系统的波长测量元件。这是该最终波前的参数，一般由于元件的原因都与 PSF 和 MTF 有关。有时使用的任意单位为波长或半径，在计算时可以通过将出射光瞳半径、焦距和波长设为 1 得到。波或半径的输出量与在后面的实际距离与 $\lambda f/r = 2\lambda f/\#$乘积成比例，其中 r 为光瞳半径。

一个被测表面的干涉仪输出结果如图 14.51 所示，图中给出了光程差、结果 PSF 和 MTF。我们可以选择不同方式的图形表示方法，包括等高线图和等面积图。其他一些例子可从一维的波前数据中进行分析，如表面斜率曲线，斯群尔（Strehl）比估算、环围能量分布、面形误差直方图和几何点图。输出形式的选择由根据用户的要求制定（Truax，1986；Creath，1987b）。其他能够设在软件中的特性参数是操作者通过测量过程指导确定的菜单，然后由根据某种预先选定的准则判断是否显示。

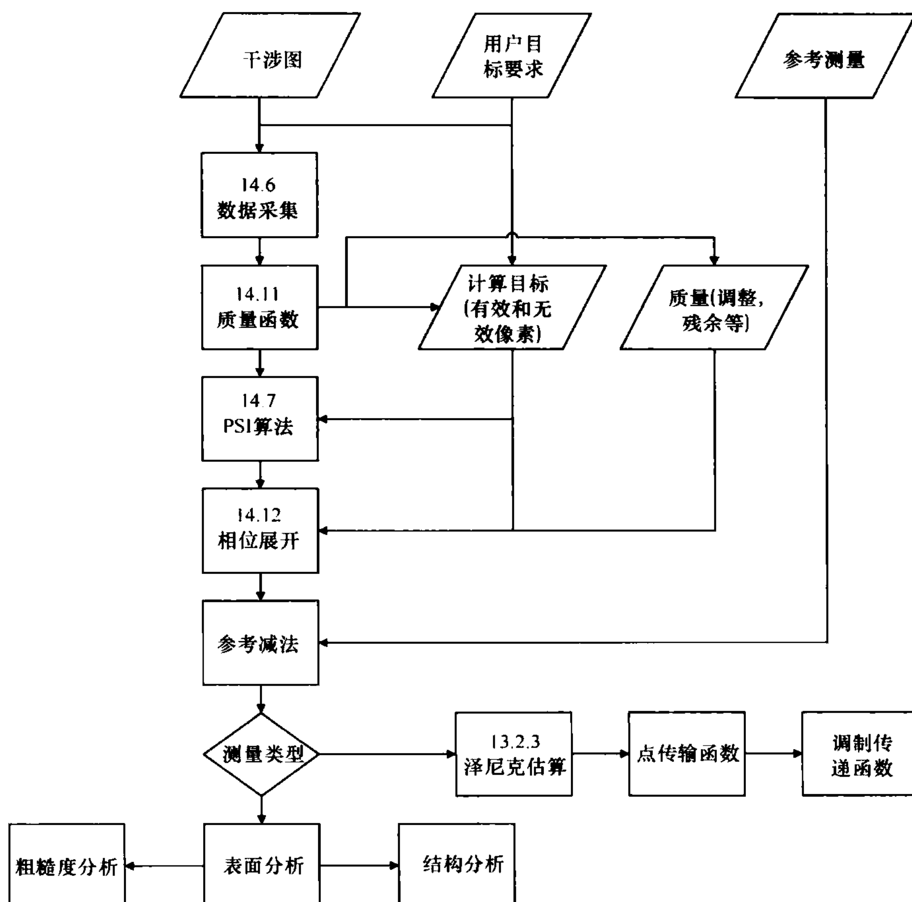


图 14.51　PSI 系统中的数据流实例

近来，干涉仪分析软件和光学设计程序之间已经有可用的通用接口。尽管这种能力的研究探索才刚刚开始，却已经被应用于几种实际场合中（Figoski et al.，1989；Stephenson，1989；Willey and Patchin，1989）。整个系统的设计可以根据已经制造出来和经过检测真实元件进行再次优化；这种优化对于含有比较难制造的元件的系统尤其具有指导意义。类似地，干涉测量数据可以用来预测实际系统的性能，用于和设计要求细致进行比较。光学系统的对准也可以利用这种功能。将整个光学系统或者子系统的波前进行测量，并且和通过设计程序预算的波前做对比。根据两波前的差异，设计程序以迭代方式估算提供系统技术指标所需的变化。更一般地，可以应用这一性能在计算机软件下可以产生参考波前。设计软件计算想要的波前，然后干涉仪从测量中除去计算的波前即可得到波面波前误差。这种处理几乎精确地复制了利用计算机产生全息图的过程，只不过计算全息图总是存储于计算机的内存之中。

14.16 实现和应用

在本节中，我们讨论一些关于 PSI 技术的实际问题，同时也检查一些 PSI 技术的特定应用。一般的 PSI 系统由四部分组成：干涉仪、改变参考相位的装置、探测器或是探测器阵列和一台计算机。探测器阵列为波前和计算机提供接口，计算机可以控制干涉仪和相移器，并作一些必要的计算。探测器和计算机的发展已经使得 PSI 技术可以更好地被接受和提高。个人计算机有足够的计算能力应对大部分 PSI 应用软件。

14.16.1 商品化的测量仪器

使用 PSI 技术的商品化测量仪器可以用来测量表面和波前形状、表面轮廓和距离。基于 PSI 技术的表面轮廓显微镜已被广泛地应用于微小表面形态和光学或非光学元件微粗糙度的定量检测，且重复精度可以达到几埃 RMS，这些轮廓测量仪器将在第 17 章中论述。

基于三种光学结构（泰曼-格林、马赫-泽德、菲佐激光参见第 1 和第 2 章内容）测量表面和波前面形的 PSI 干涉仪已在市场上出售，其结构如图 14.2 所示。这些系统都使用摄像机来记录干涉图形；相移通过利用 PZT 传感器来移动参考目标而实现，且许多参考目标和平面都可以和被测元件相匹配（Smythe et al.，1987；Creath，1987b）。这些系统的突出特点是由计算机提供较为灵活的用户界面。由 14.15 节的讨论可知，可以有许多图形显示器，且处理过程可以根据用户的需求而定。

马赫-泽德移相干涉仪可以利用 PSI 技术来检测光学波前的质量，如图 14.52 所示（Hayes and Lange，1983；Creath，1987b）。输出光源例如激光二极管，在进入系统期间即被

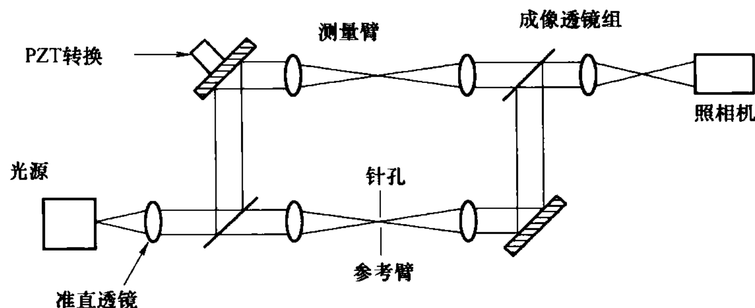


图 14.52 测量光源波前质量的马赫-泽德移相干涉仪

校准。通过参考臂中的空间滤波器产生一个参考球面波前。类似的光学装置，用在测试臂中使光程在两臂中相当，并没有加入针孔。光束通过相机被结合和成像。波前的光强和相位分布也可以测量得到。

一个有用的系统也可以测量非光学元件的面形或平面度，此系统是基于掠入射干涉仪技术（Synborski，1978）开发的。系统的整体光路图如图 14. 53a 所示。被测元件放置在临近一块大玻璃棱镜的斜边的位置，此玻璃棱镜也作为干涉仪的参考平面。保持一个空气间隙的存在。

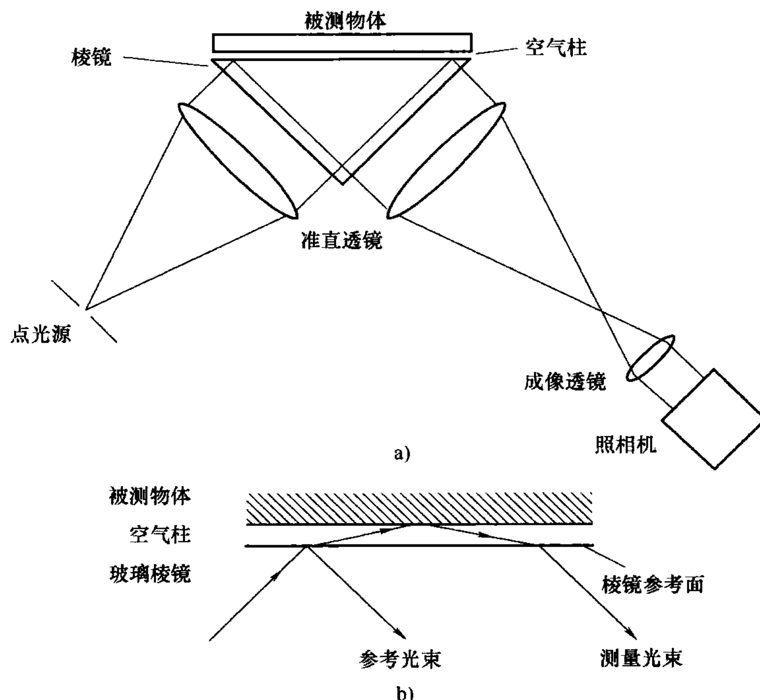


图 14. 53　掠入射情况下的 PSI 干涉仪

a）系统的整体光路图　b）空气间隙界面的详图

空气间隙界面的详图如图 14. 53b 所示。因为折射，被测光束以大角度入射到元件上。对于 41. 7°的入射角和 1. 5 的折射率，检测平面上的入射角为 86°。这个角度已经接近棱镜的临界角。这种结构有两个有利的结果。一是测试灵敏度在减小了入射角的余弦。当入射角为 86°时，灵敏度只是正入射时的 7%；一条条纹代表 7 个波表面高度变化而不是半个波。这就像表面是以较长波长被检测的。二是几乎所有的物体，包括磨砂表面，在此入射角都有很高的反射率，因此我们可以使用许多不同的材料和样品来制作这种结构。如果棱镜中光的入射角发生微小的变化，那么在空气中的光程改变量则远大于在玻璃中。这时使用这种特性引起的倾斜在参考光束和测量光束之间产生相移。系统可以使用 200mm 的光孔，并且可以适用于检测硅匀墨辊和加工的或磨砂零部件。此系统明显的缺点是需要高精度的玻璃棱镜。

测距干涉仪（DMI）能够读出位置值，其分辨力优于千分之一个波长（小于 1nm）。DMI 现已广泛应用于大范围机器控制中（Dukes and Gordon，1970；Steinmetz et al.，1987；Smythe et al.，1987；Steinmetz，1990）。大多数 DMI 都基于外差干涉技术（见 14. 14. 3 小节），其基本系统框图如图 14. 54 所示。光源输出的两频率光是正交偏振的，偏振分光镜将两频率光分别入射到干涉仪的参考臂和测量臂。两个直角棱镜将两束光反射到探测器中，其

中起偏器的起偏角为45°以使此两束光进行干涉。当可移动直角棱镜保持不动时，可以获得此两束光的差频。此频率等同于从激光头输出的参考信号。此棱镜的移动可以在光从测量臂返回的过程中产生一个多普勒频移，同时被测的差频发生改变。测量臂的长度改变量可以根据被测差频和基准差频的对比得知。DMI 的某些特定应用是微光刻分步重复相机、单点金刚石车削机和精密光电绘图仪。关于 DMI 的其他资料见本书第 18 章内容。

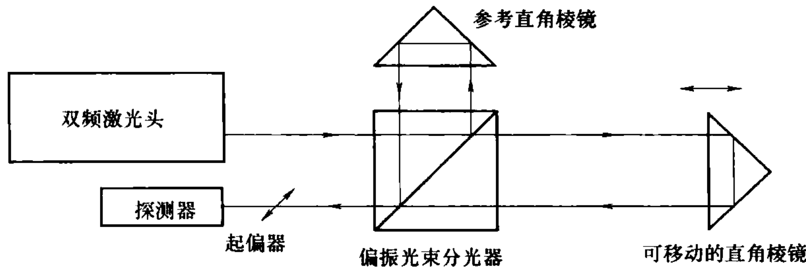


图 14.54　测距干涉仪的基本系统框图

14.16.2　干涉仪构造

许多光栅横向剪切干涉仪都是基于 PSI 技术，这点已经得到证实（Wyant，1975；Hardy et al.，1977；Stump，1979；Koliopoulos，1980；Hardy and MacGovern，1987；Schreiber and Schwider，1997）。光栅平移在衍射级之间产生一个频移，从而导致了干涉光束之间的线性相移。更多关于光栅干涉仪的资料见本书的第 4 章。波前聚焦于光栅上，这样便可以产生三次或更高的衍射级。选择光栅周期以便光栅部分存在重叠，因此衍射级的干涉图形也会叠加。当光栅平移时，衍射级即为多普勒频移（参见 14.4 小节内容）；正的部分增加，负的部分则减少，零级不变。差频出现在输出中，可以通过外差分析或者 bucket 积分技术来确定波前相位。一种简便的光栅结构是采用围绕其中心旋转的径向光栅（星芒图案）（Stevenson，1970）。使用这种光栅，横向距离可以通过变动光栅中心相对于焦斑的距离来改变。

PSI 技术同样可以用于双频光栅剪切干涉仪中（Wyant，1973）。在此系统中，波前被聚焦在光栅上两个不同的谱线密度上，这样可以产生两幅衍射图，每级都位于光栅刻线处。两个一级衍射条纹由两光栅频率之差决定，同时可以选用平均频率从非衍射光中分离出这些衍射级次。通过焦点平移的光栅可以产生对于两束衍射光束的每一束不同的多普勒频移，因此就产生了相对相移。结果形成的干涉图可以利用 PSI 技术进行分析和估算。

一个非常紧凑的横向剪切干涉仪结构采用串联的朗奇（Ronchi）光栅。通过两光栅上的相位延迟可以去除零级衍射级，我们可以在光轴方向上将第一个光栅的第一级衍射级和第二个光栅的负第一衍射级进行综合。剪切的量可以通过光栅的距离来调整。除了在光轴上和容易调整外，加强级和减弱级的综合还导致光轴方向上光束对波长的独立性，可以使用带宽较宽的发光二极管或者准分子激光器作为光源（Schreiber et al.，2002）。在某些情况下，即被测波前会随着时间的改变而变化的情况，需要同时获得所有的相移干涉图。而且在这些测量过程中，不能存在时间滞后。一些这样的快速拍照干涉仪也被研制出来，同样这些干涉仪也都可以使用脉冲光源。

第二类频闪干涉仪利用衍射光栅在参考光束和多束被测光束之间引入相移（Kwon，1984、1987；Kwon et al.，1987）。使用衍射光栅的频闪 PSI 干涉仪的结构图如图 14.55 所

示。三束同样的测试光束为固定光栅的衍射级，参考光束则由空间滤波器提供。光栅方向上微小的横向移动可以在三束测试光束中产生一个 90°的相移。对于此相移，一个简单的理解是光栅位于波前的傅里叶变换平面上，这个平面上的相移可以在干涉图形平面上导致一个线性相位因子。移动四分之一光栅周期便可产生需要的相移。三个输出的干涉图形可以用三步算法之一来评估（见式（14.48）或式（14.52））。

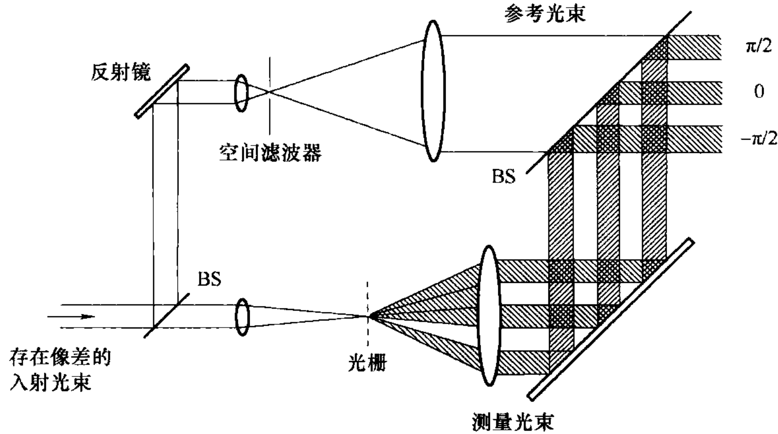


图 14.55 使用衍射光栅的频闪 PSI 干涉仪的结构图

第三类快速拍照的干涉仪（McLaughlin and Horwitz，1986），利用相位光栅来剪切检测波前并且在干涉图中产生一个载波条纹频率。这些载波条纹的周期通过调整等同于传感器上的四个像素，且每个像素的相对相移为 90°。因此，四步算法则可用来分析剪切的波前。这种方法和 14.14.5 小节中介绍的空间同步检波方法存在很大的相似性。交叉光栅可用来同时分析正交方向上的剪切波前。

14.16.3 绝对测量

通常假设干涉测试的精度与参考平面的相同，因为干涉仪是通过对比被测平面和该参考平面来测量的。如果可以去除由参考平面和干涉仪引入的误差，则测量结果的绝对精度会得到提高。完美的光学检测元件可以用来标校某种特定结构的干涉仪，但是这些参考元件往往是不存在的。已经发展了一个有效的手段，用来绝对标校球面表面和干涉仪，而且在事先并不知道它们的准确值。(Jensen，1973；Bruninget al.，1974；Bruning，1978；Truax，1988)。因为这种标校过程需要对几个波前进行估算，所以当这些波前信息已经存在于计算机中时，这种估算很适合 PSI 系统。这一步需要三组数据，如图 14.56 所示。前两组数据是检测球体，其测试表面在测量之间旋转 180°。将该球围绕光轴旋转是十分必要的。第三次检测是在猫眼反射位置对干涉仪进行检测，且干涉仪聚焦于球面的最高点处。每种情况下都能获得波前图。系统中的波前误差存在三个因素：检测表面的误差 W_S，参考臂和参考平面中的误差 W_R，检测臂和发散镜头误差 W_T。

三幅干涉图的每一幅都可以表示为上面波前误差的组合

$$W_1 = W_R + W_T + W_S \tag{14.190}$$

$$W_2 = W_R + W_T + W_S^{180°} \tag{14.191}$$

$$W_3 = W_R + 1/2(W_T + W_T^{180°}) \tag{14.192}$$

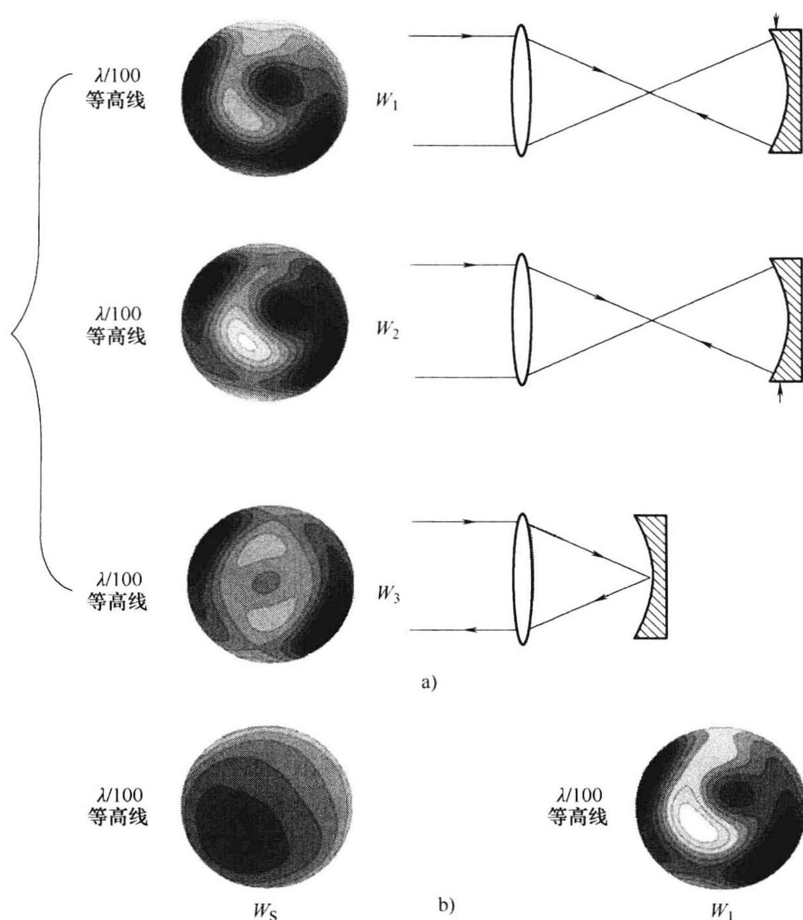


图 14.56　一个非球面表面的绝对测量

a）未经处理的带有干涉仪误差的三个波前　b）干涉仪和检测表面的综合误差

其中，W_R^α，W_S^α，W_T^α 为波面基准臂；α = 波前方向（0°或 180°）

猫眼反射后，光线会偏离光轴方向，这种结果会导致检测臂的偏差 W_3 的旋转。第一次估算受限平均 W_1 和被旋转后的 W_2。干涉图中光轴的位置必须针对此数据旋转进行识别。数据集 W_3 以其旋转后结果来进行平均，然后这个结果从早些得到的结果中被减去便得到由检测表面导致的波前误差

$$W_S = \frac{1}{2}(W_1 + W_2^{180°} - W_3 - W_3^{180°}) \tag{14.193}$$

表面高度图可以根据该波前误差得到。将干涉图中的总误差表示为 W_1，它由 W_R和 W_T 的和组成。则干涉仪的误差可以通过将式（14.193）带入式（14.190）计算得到

$$W_1 = \frac{1}{2}(W_1 - W_2^{180°} + W_3 + W_3^{180°}) \tag{14.194}$$

观察式（14.193）和式（14.194），都涉及波前的运算，由元件旋转和波前数据度量旋转 180°得来。这就允许我们在使用猫眼结构时，分开干涉仪的偶和奇误差。图 14.56b 所示为此校准计算的结果及干涉仪和检测元件的单独误差与综合误差。这种方法通常在需要获得尽可能的最高精度时采用。这种方法仅在如下条件时有效：测量处于一个稳定的环境，且 W_1和 W_2 的 0°与 180°检测结构与探测器矩阵的像素坐标（x'，y'）和（$-x'$，$-y'$）匹配。

这种标校步骤可以很方便地实现 PSI 技术，且容易操作和在内存中储存波前信息。由不适当的各种表面对准引起的误差已由特鲁阿克斯（Truax，1988）和厄尔斯特等人（Elssner et al.，1989）检测出来。通常，侧向对准是关键的，我们必须将其控制在一个像素上或更少。

特殊情况如平面表面，可以使用不同方向上的三个表面进行标校。相似的方法也适合于非佐型参考平面的标校（Schulz and Schwider，1976）。使用泽尼克多项式可以使平面的标校过程更为简便（Fritz，1984）。

14.16.4 光源

PSI 系统光源的波长范围在紫外和红外之间。检测波长有时也用来以工作波长检测系统（Prettyjohns et al.，1985）。检测精度的提高是由于使用了更短的波长导致的；2π 的波前相位对应于更短的物理距离。波长比较大时会降低测试的灵敏度，同时也允许检测非球面波前，而不存在零位补偿。长波长的第二个优点在于可以获得较高对比度的条文，即使检测磨砂表面也可以，同时检测可以在研磨期间就开始。目前 PSI 系统普遍采用的输出红外波长为 10.6μm 的二氧化碳激光器，同时这些系统的探测器是热电光导摄像管（PEV）(Kwon et al.，1980；Stahl et al.，1987；Creath，1987b；Stahl，1989)。PEV 仅仅对时间变化敏感，因此可以应用于 PSI 系统中。相移导致光强发生变化，但是相移的速率必须被调整到与相机的最佳响应相匹配。已发现 7.5Hz 的调制频率为一个系统的最佳频率（Stahl et al.，1987）。红外固体传感器的发展使得截止波长达到了中红外段，大约为 6μm（Zanio，1990；Kozlowski et al.，1990）。这种有关材料如汞碲化镉等的研究工作可能最终会获得 PEV 的替代品。

对简化 PSI 系统的操作过程展示出巨大潜力的一个领域是，通过调制激光二极管的输出波长来获得相移（Tatsuno and Tsunoda，1987；Ishii，et al.，1987；Chen and Murata，1988；Chen et al.，1988）。激光二极管的输出波长随着注入电流和温度的变化而变化。激光二极管的输出光被发送到干涉仪的两臂，且正比于两臂之间的 *OPD*，如式（14.195）所示：

$$\alpha = \frac{2\pi OPD\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \tag{14.195}$$

其中，$\Delta\lambda$ 为波长的变化，λ_0 为平均波长。有了使用 2+1 算法的测量仪器（根据 14.8.6 小节内容），可以知道此相移等同于波长数目之差，而该差与这两波长时的 *OPD* 相匹配。能够细分激光波长以实现分步相位 PSI 方法也能够将激光波长变成锯齿波来使用 bucket 积分方法。这种获得相移的方法不需要 PZT 机械运动和相关的高压驱动电路。

光源调制干涉仪不仅可以测量平面，还可以根据一组相移干涉图来测量玻璃平板的折射率的不均匀性（Okada，Sakuta，Ose and Tsujiuchi，1990）。平板放置在泰曼-格林干涉仪的测量臂中，条纹在参考面和前表面反射光之间，以及参考面和后表面反射之间形成。因为这些重叠条纹图形的每一幅对应于一个不同的 *OPD*，每次相移都有不同的速率，同时可以分离三个被测量。

一个锁相激光二极管干涉仪（见 14.4 小节）已经通过调制驱动电流得以演示，从而获得二极管的输出波长（Suzuki et al.，1989）。使用激光二极管作为光源可能存在两个问题，其一是随着波长的变化输出功率会发生改变；其二是将波长锁定在参考腔需要小量的波长调制（Hariharan，1989a、b）。

14.16.5 线性基准

在干涉法测量中，常常会忽视一个问题，即条纹位置或者干涉图上的某点与被测部件或系统的孔径中的实际位置相关联时所要求的精度。这种关系通过在检测孔径上放置基准标记来解决。干涉图中这些标记的图像会将干涉图坐标联系到元件上的位置。精确基准的定位允许消除校准波前，如那些由于干涉仪或是参考光学元件引起的波前。这些对准辅助方法绝对标校和上述子孔径技术都十分重要。基准也可以为几何波前运算包括翻转、旋转和放大等变化，提供一个坐标系，同样适用于像差拟合。分析时，一个测试元件的几何对准的重要性可以这样理解，即考虑将存储的一个校准波前从一个被测波前中去除的情况。未对准的情况下，分析期间会转移误差以使其依靠自身被去除。这种转移会导致彗差或像散。

14.17 PSI 技术的发展趋势

本章集中介绍了相移分析的理论及其在干涉仪领域的应用。PSI 技术具有更高的测量重复精度、精度和准确度，并且还可以对波前和表面数据做更全面的分析。这些相同的技术可以用于几乎任何使用条纹进行测量的系统。第 15 章论述了 PSI 分析在全息和光斑干涉仪中的应用（Hariharan，Oreb and Brown，1982a、b、1983；Creath，1985；Hariharan，1985；Nakadate and Saito，1985；Thalmann and Dändliker，1985）。16 章讨论了它与莫尔及条纹投影技术的一起应用（Indebetouw，1978；Moore and Truax，1979；Shagam，1983；Bell et al.，1984）。光学轮廓仪（第 17 章）和测距干涉仪（第 18 章）是相移技术应用取得巨大成功的另外两个测量领域。

目前也存在一些领域要求进一步改进该项技术。一个不完整的列表包括工作在深紫外波段使用准分子激光器的系统、适应性更强使用脉冲激光器的系统、通过光线跟踪干涉仪的像差提高的标校过程、分析程序和对准基准的整合及非球面和波前的检测。

即使存在可行的技术，非球面的检测仍然比较困难。需要一种可以描述为 walk-up 非球面干涉仪的装置。这样的系统可以在不需要准备任何专用参考面或零位光学元件的情况下实现非球面的检测；这就相当于我们现有的球面光学检测。如果这种扩展的技术如子奈奎斯特干涉仪，将为实现这个目标提供一条途径，那么让我们拭目以待。这种测量仪器的发展几乎必然结合干涉仪和光学设计程序的集成，以便实现实时光线跟踪和检测。

PSI 系统目前的一些发展趋势：固体电子学的发展对 PSI 技术有着持续的影响，意味着将来会有更大的探测器阵列出现，探测器阵列对于大范围波段都十分灵敏而且响应速度更快，估算更为完整；计算机界面将更为灵活和友好；干涉仪结合光学设计程序的使用也将对优化、对准和系统的检测变得重要；在加工上，计算机对干涉图的分析允许将制造过程和统计工艺管理结合起来以提高质量和产量；干涉测量法也将应用于更为广泛的非光学领域。

显然，在过去三十年内，移相干涉测量技术已经发展成为光学检测的主要手段。它的成功通过较为广泛的使用得到了证明，而且已经应用于越来越多的领域。

参考文献

Ai C. and J. C. Wyant, "Effect of Spurious Reflection on Phase Shift Interferometry," *Appl. Opt.*, **27**, 3039 (1988).

Angel J. R. P. and P. L. Wizinowich, "A Method of Phase Shifting in the Presence of Vibration," *European Southern Observatory Conf. Proc.*, **30**, 561 (1988).

Baldi A., "Two-Dimensional Phase Unwrapping by Quad-Tree Decomposition," *Appl. Opt.*, **40**, 1187–1194 (2001).

Barnes T. H., "Heterodyne Fizeau Interferometer for Testing Flat Surfaces," *Appl. Opt.*, **26**, 2804 (1987).

Bell B. W. and C. L. Koliopoulos, "Moire Topography, Sampling Theory Charged-coupled Devices," *Opt. Lett.*, **9**, 171 (1984).

Bi H., Y. Zhang, K. V. Link, and C. Wen, "Class of 4+1 Phase Algorithum with Error Compensation,"*Appl. Opt.*, **43**, 4199-4207 (2004).

Bone D. A., H. A. Bachor, and R. J. Sandeman, "Fringe Pattern Analysis Using a 2-D Fourier Transform," *Appl. Opt.*, **25**, 1653 (1986).

Brophy C. P., "Effect of Intensity Error Correlation on the Computed Phase of Phase-shifting Interferometry," *JOSA A*, **7**, 537 (1990).

Bruning, J.H. and D.R. Herriott, "A Versatile Laser Interferometer," *Appl. Opt.*, **9**, 2180 (1970).

Bruning J. H., D. R. Herriott, J. E. Gallagher, D. P. Rosenfeld, A. D. White, and D. J. Brangaccio, "Digital Wavefront Measuring Interferometer for Testing Optical Surfaces, Lenses," *Appl. Opt.*, **13**, 2693 (1974).

Bruning, J. H., "Fringe Scanning Interferometers," in Optical Shop Testing, D. Malacara Ed., 1st Edition, Wiley, New York, 1978.

Bryngdahl O., "Polarization-Type Interference Fringe Shifter," *JOSA*, **62**, 462 (1972a).

Bryngdahl O., "Image-Transfer Characteristics of Carrier-Frequency Photography," *JOSA*, **62**(6), 807 (1972b).

Bryngdahl O., "Heterodyne Shearing Interferometers Using Diffractive Filters with Rotational Symetry," *Opt. Comm.*, **17**, 43 (1976).

Burgwald G. M. and W. P. Kruger, " An Instant-on Laser for Distance Measurement," *Hewlett-Packard J.*, **21**,14 (1970).

Bushman T. W., M. A. Gennert, and R. J. Pryputniewicz, "Phase Unwrapping by Least Squares Error Minimization of Phase Curvature," *Proc. SPIE*, **2003**, 334 (1993).

Carré P. " Installation et utilisation du comparateur photoélectrigue et Interferentiel du Bureau International des Poids ek Measures," Metrologia, **1**, 13-23 (1966).

Chen J. and K. Murata, "Digital Phase Measuring Fizeau Interferometer for Testing of Flat and Spherical Surfaces," *Optik*, **81**, 28 (1988).

Chen J., Y. Ishii, and K. Murata, "Heterodyne Interferometry With a Frequency-Modulated Laser Diode," *Appl. Opt.*, **27**, 124 (1988).

Chen X., M. Gramaglia, and J. A. Yeazell, "Phase-Shifting Interferometry With Uncalibrated Phase Shifts," *Appl. Opt.*, **39**, 585–591 (2000).

Cheng Y. and J. C. Wyant, "Multiple-Wavelength Phase-Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **24**, 804 (1985a).

Cheng Y. and J. C. Wyant, "Phase Shifter Calibration in Phase-Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **24**, 3049 (1985b).

Cheng Y. and J. C. Wyant, "Two-Wavelength Phase Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **23**, 4539 (1984).

Ching N. H., D. Rosenfeld, and M. Braun, "Two Dimensional Phase Unwrapping Using a Miminum Spanning Tree Algorithm," *IEEE Transaction on Image Processing*, **1**, 355–365 (1992).

Cochran E. R. and J. C. Wyant, "Longscan Surface Profile Measurements Using a Phase-Modulated Mirau Interferometer," *Proc. SPIE,* **680,** 112 (1986).

Cochran E. R. and K. Creath, "A Method for Extending the Measurement Range of a Two-Dimensional Surface Profiling Instrument," *Proc. SPIE,* **818,** 353 (1987).

Cochran E. R. and K. Creath, "Combining Multiple-Subaperture, Two-Wavelength Techniques to Extend the Measurement Limits of an Optical Surface Profiler," *Appl. Opt.*, **27**(10), 1960 (1988).

Crane R., "Interference Phase Measurement," *Appl. Opt.*, **8**, 538 (1969).

Creath K., "Phase-Shifting Speckle Interferometry," *Appl. Opt.*, **24**, 3053 (1985).

Creath K., "A Comparison of Phase-Measurement Algorithms," *Proc. SPIE,* **680**, 19 (1986).

Creath K., "Step Height Measurement Using Two-Wavelength Phase-Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **26**, 2810 (1987a).

Creath K., "WYKO Systems for Optical Metrology," *Proc. SPIE,* **816**, 111 (1987b).

Creath K., "Phase-Measurement Interferometry Techniques," in: *Progress in Optics Vol. XXVI*, E. Wolf Ed., Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 349–393, (1988).

Creath K. and J. C. Wyant, "Direct Phase Measurement of Aspheric Surface Contours," *Proc. SPIE*, **645**, 101 (1986).

Creath K., Y.-Y. Cheng, and J. C. Wyant, "Contouting Aspheric Surfaces Using Two-Wavelength Phase-Shifting Interferometry," *Opt. Acta*, **32**, 1455 (1985).

Crosdale F. and R. Palum, "Wavelength Control of a Diode Laser for Distance Measuring Interferometry," *Proc. SPIE* **1219**, 490 (1990).

de Groot P. J., "Long-Wavelength Laser Diode Interferometer for Surface Flatness Measurements," *Proc. SPIE,* **2248**, 136–140, (1994).

de Groot P. J., "Vibration in Phase Shifting Interferometry," *JOSA A*, **12**, 354–365 (1995).

de Groot P. J., "101-Frame Algorithm for Phase-Shifting Interferometry," *Proc. SPIE,* **3098**, 283–292 (1997).

de Groot P.J., "Measurement of Transport Plates with Wavelength-Tuned Phase-Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **39**(16), 2658-2663 (2000).

de Groot P. J. and L. L. Deck, "Numerical Simulations of Vibration in Phase-Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **35**, 2172 (1996).

Deck L. L., "Multiple Surface Phase Shifting Interferometry," *Proc. SPIE,* **4451**, 424–431 (2001).

DeCou A. B., "Interferometric Star Tracking," *Appl. Opt.*, **13**, 414 (1974).

Dorsey A., R. Hocken, and M. Horowitz, "A Low Cost Laser Interferometer System for Machine Tool Applications," *Prec. Eng.* **5,** 29 (1983).

Duarte F. J., *Tunable Laser Optics*, Elsevier Acad. Press, London, 2003.

Dukes J. N. and G. B. Gordon, "A Two-Hundred Foot Yardstick With Graduations Every Microinch," *Hewlett-Packard J*, **21**, 2 (1970).

Dunn T. J., "Frequency-Scanning Interferometry Advances Precision Component Manufacturing, Assembly," *Photonics Spectra*, **39**, 96 (2005).

Elssner K.-E., R. Burow, J. Grzanna, and R. Spolaczyk, "Absolute Sphericity Measurement," *Appl. Opt.*, **28**, 4649 (1989).

Fercher A. F., H. Z. Hu, and U. Vry, "Rough Surface Interferometry With a Two-Wavelength Heterodyne Speckle Interferometer," *Appl. Opt.*, **24**, 2181 (1985).

Figoski J. W., T. E. Shrode, and G. F. Moore, "Computer-Aided Alignment of a Wide-Field, Three-mirror, Unobscured, High-Resolution Sensor," *Proc. SPIE* **1049**, 166 (1989).

Flynn T. J. "Consistent 2-D Phase Unwrapping Guided by a Quality Map," *Proceedings of the 1996 International Geoscience and Remote Sesning Symposium*, Lincoln NE, IEEE, 1996, pp. 2057–2059.

Freischlad K. R. and C. L. Koliopoulos, "Fourier Description of Digital Phase-Measuring Interferometry," *JOSA A*, **7**, 542 (1990).

Friedlander B. and J. Francos. "Model Based Phase Unwrapping of 2-d Signals," *EEE Transactions on Signal Processing*, **44**, 2999–3007 (1996).

Fritz B. S., "Absolute Calibration of an Optical Flat," *Opt. Eng.*, **23**, 379 (1984).

Fukano T. and I. Yamaguchi, "Separation of Measurement of the Refractive Index, the Geometrical Thickness by Use Of A Wavelength-Scanning Interferometer with A Confocal Microscope," *Appl. Opt.*, **38**, 4065–4073 (1999).

Gaskill J. D., "Linear Systems," *Fourier Transforms and Optics* Wiley, New York, 1978.

Ghiglia D. C. and P. H. Eichel, "High-Resolution Synthetic Aperture Radar Interferometry. Technology for Precise Terrain Elevation Mapping," *DSP and Multimedia Technology*, 10, 1994.

Ghiglia D. C. and L. A. Romero, "Minimum Lp-Norm Two-Dimensional Phase Unwrapping," *JOSA A*, 12, 1999–2013, (1996).

Ghiglia D. C. and M. D. Pritt, *Two Dimensional Phase Unwrapping*, Wiley, 1998.

Gierloff J. J., "Phase Unwrapping by Regions," *Proc., SPIE*, 818, 2–9 (1987).

Goldstein R. M., H. A. Zebker, and C. L. Werner, "Satellite Radar Interferometry: Synthetic Apertur Radar Observations," *Radio Science*, **23**, 713–720 (1988).

Goncalves A. A., Jr., R. Seara, and P. B. Uliana, "A New Amplitude Weighted Filtering Technique for Noise Reduction in Images With 2p Phase Jumps," *Proc. SPIE*, **2003**, 312–322 (1993).

Goodman J. W., *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, San Francisco, 1968.

Greivenkamp J. E., "Generalized Data Reduction for Heterodyne Interferometry," *Opt. Eng.*, **23**, 350 (1984).

Kinnstaetter K., A. W. Lohmann, J. Schwider, and N. Streibl, "Accuracy of Phase Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **27**, 5082 (1988).

Greivenkamp J. E., "Interferometric Measurement s at Eastman Kodak Company," *Proc. SPIE*, **816**, 212 (1987a).

Greivenkamp J. E., "Sub-Nyquist interferometry," *Appl. Opt.*, **26**, 5245 (1987b).

Greivenkamp J. E. and J. H. Bruning, "Phase Shifting Interferometery," in: *Optical Shop Testing*, D. Malacara, Ed., 2nd Edition, Wiley, New York, 1992.

Greivenkamp J. E., K. G. Sullivan, and R. J. Palum, "Resolving Interferometric Step Height Measurement Ambiguities using a Priori Information," *Proc. SPIE*, **1164**, 79 (1989).

Hall J. A., "Arrays and Charge Coupled Devices," *Applied Optics and Optical Engineering*, vol. VIII, R. R. Shannon and J. C. Wyant, Eds., Academic Press, New York, 1980.

Hardy J. W., J. E. Lefebvre, and C. L. Koliopoulos, "Real-Time Atmospheric Compensation," *JOSA*, **67**, 360 (1977).

Hardy J. W. and A. J. McGovern, "Shearing Interferometry: A Flexible Technique for Wavefront Measurement," *Proc. SPIE*, **816**, 180 (1987).

Hariharan P., *Optical Holography*, Cambridge, London, 1984, p. 232.

Hariharan P, "Quasi-Heterodyne Hologram Interferometry," *Opt. Eng*. **24**, 632 (1985).

Hariharan P., "Phase-Stepping Interferometry: Effects of Multiple Reflected Beams," *Appl. Opt.*, **26**, 2506 (1987).

Hariharan P., "Phase-Stepping Interferometry With Laser Diodes: Effects of Changes in Laser Power with Output Wavelength," *Appl. Opt.*, **28**, 27 (1989a).

Hariharan P., "Phase-Stepping Interferometry With Laser Diodes 2: Effects of Laser Wavelength Modulation," *Appl.*, **28**, 1749 (1989b).

Hariharan P., B. F. Oreb, and C. H. Freund, "Stroboscopic Holographic Interferometry: Measurements of Vector Components of a Vibration," *Appl. Opt.*, **26**, 3899 (1987a).

Hariharan P., B. F. Oreb, and T. Eiju, "Digital Phase-Shifting Interfeometry: A Simple Error-

Compensating Phase Calculation Algorithm," *Appl. Opt.* **26**, 2504 (1987b).

Hariharan P., B. F. Oreb, and N. Brown, "A Digital Phase-Measurement System for Realtime Holographic Interferometry," *Opt. Comm*, **41**, 393 (1982a).

Hariharan P., B. F. Oreb, and N. Brown, "A Digital System for Real-Time Holographic Stress Analysis," *Proc. SPIE*, **370**, 189 (1982b).

Hariharan P., B. F. Oreb, and N. Brown, "Real-Time Holographic Interferometry: A Microcomputer System for Measurements of Vector Displacements," *Appl. Opt.*, **22**, 876 (1983).

Hariharan P. B. F. Oreb, and Z. Wanzhi, "Measurement of Aspheric Surfaces Using a Microcomputer-Controlled Digital Radial-Shear Interferometer," *Opt. Acta*, **31**, 989 (1984).

Hayes J. B., *Linear Methods of Computer Controlled Optical Figuring*, Ph.D. Dissertation, Optical Sciences Center, University of Arizona, Tucson, AZ, 1984.

Hayes J. B., *Compact Micromotor Translator*, U.S. Patent 4.884.003 (1989).

Hayes J. and S. Lange, "A Heterodyne Interferometer for Testing Laser Diodes," *Proc. SPIE*, **429**, 22 (1983).

Henderson A. D., C. Hoffman, R. Culhane, and D. Viggiano III, "Kilohertz Scanning, All-Fiber Optical Delay Line Using Piezoelectric Actuation," *Proc. SPIE*, **5589**, 99–106 (2004).

Herráez M. A., D. R. Burton, M. J. Lalor, and D. B. Clegg, "Robust Unwrapper for Two-dimensional Images," *Proc. SPIE*, **2784**, 106 (1996).

Herráez M. A., D. R. Burton, M. J. Lalor, and M. A. Gdeisat, "Fast Two-dimensional Phase-unwrapping Algorithm Based on Sorting by Reliability Following a Noncontinuous Path," *Appl. Opt.*, **41**, 7437–7444 (2002).

Hettwer A., J. Kranz, and J. Schwider, "Three Channel Phase-Shifting Interferometer Using Polarization-Optics, a Diffraction Grating," *Opt. Eng.*, **39**, 960 (2000).

Hibino K., "Susceptibility of Systematic Error-Compensating Algorithms to Random Noise in Phase-Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **36**, 2084–2093 (1997).

Hibino K., B. F. Oreb, D. I. Farrant, and K. G. Larkin, "Phase Shifting for Nonsinusoidal Waveforms With Phase-Shift Errors," *J. Opt. Soc. Am. A*, **12**, 761 (1995).

Hibino K., B. F. Oreb, D. I. Farrant, and K. G. Larkin, "Phase-Shifting Algorithms for Nonlinear, Spatially Nonuniform Phase Shifts," *J. Opt. Soc. Am. A*, **14**, 918 (1997).

Hibino K., K. G. Larkin, B. F. Oreb, and D. I. Farrant, "Phase-Shifting Algorithms for Nonlinear, Spatially Nonuniform Phase Shifts: Reply to Comment," *J. Opt. Soc. Am. A*, **15**, 1234–1235 (1998).

Hibino K., R. Hanayama, J. Burke, and B. Oreb, "Tunable Phase-Extraction Formulae for Simultaneous Shape Measurement of Multiple Surfaces With Wavelength-Shifting Interferometry," *Opt. Express*, **12**, 5579–5594 (2004).

Hu H. Z., "Polarization Heterodyne Interferometry Using a Simple Rotating Analyzer. 1: Theory, Error Analysis," *Appl. Opt.*, **22**, 2052 (1983).

Huntley J. M., "Noise Immune Phase Unwrapping Algorithm," *Appl. Opt.*, **28**, 3268–3270 (1989).

Huntley J. M. and H. Saldner, "Temporal Phase Unwrapping Algorithm for Automated Interferogram Analysis," *Appl. Opt.* **32**, 3047–3052 (1993).

Huntley J. M. and J. R. Buckland, "Characterization of Sources of 2p Phase Discontinuities in Speckle Interferograms," *JOSA A*, **12**, 1990–1996 (1995).

Ichioka Y. and M. Inulyu, "Direct Phase Detecting System," *Appl. Opt.*, **11** (7), 1507 (1972).

Indebetouw G., P. Klysubun, T. Kim, and T. Poon, "Imaging Properties of Scanning Holographic Microscopy," *JOSA A*, **17**, 380–390 (2000).

Ishii Y., J. Chen, and K. Murata, "Digital Phase-Measuring Interferometry With a Tunable Laser Diode," *Opt. Lett.*, **12**, 233 (1987).

Itoh K., "Analysis of the Phase Unwrapping Problem," *Appl. Opt.*, **21**, 2470 (1982).

Janesick J. R., *Scientific Charge-Coupled Devices, SPIE Press*, Vol. PM83, 2001.

Jensen A. E., "Absolute Calibration Method for Laser Twyman–Green Wavefront Testing

Interferometers," *JOSA*, **63**, 1313 (1973).

Jensen S. C., W. W. Chow, and G. N. Lawrence, "Subaperture Testing Approaches: A Comparison," *Appl. Opt.*, **23**, 740 (1984).

Johnson, G. W., D. C. Leiner, and D. T. Moore, "Phase-locked interferometry," *Proc. SPIE*, **126**, 152 (1977).

Johnson, G. W., D. C. Leiner, and D. T. Moore, "Phase-Locked Interferometry," *Opt. Eng.*, **18**, 46 (1979).

Johnson, G. W. and D. T. Moore, "Design and Construction of a Phase-Locked Interference Microscope," *Proc. SPIE*, **103**, 76 (1977).

Kanoh, T., "Automated Interferometic System for Aspheric Surface Testing," Proc. SPIE, **680**, 71 (1986)

Kim C.-J., "Polynomial Fit of Interferograms," *Appl. Opt.*, **21**, 4521 (1982).

Kim, Shannon, 1987. Kim, C. J. and R.R. Shannon, "Catalog of Zernike Polynomials", in *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. x, R.R. Shannon and J.C. Wyant, Eds. Academic Pres., San Diego, 1987.

Kinnstaetter K., A. W. Lohmann, J. Schwider, and N. Streibl, "Accuracy of Phase Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **27**, 5082 (1988).

Koliopoulos C. L., *Interferometric Optical Phase Measurement*, Ph.D. Dissertation, University Arizona, Tucson, 1981.

Koliopoulos C. L., "Radial Grating Lateral Shear Heterodyne Interferometer," *Appl. Opt.*, **19**(9), 1523 (1980).

Kothiyal M. P. and C. Delisle, "Optical Frequency Shifter for Heterodyne Interferometry Using Counterrotating Wave Plates," *Opt. Lett.*, **9**, 319 (1984).

Kothiyal M. P. and C. Delisle, "Shearing Interferometer for Phase Shifting Interferometry with Polarization Phase Shifter," **24**, 4439 (1985a).

Kothiyal M. P. and C. Delisle, "Shearing Interferometer for Phase Shifting Interferometry with Polarization Phase Shifter,"*Appl. Opt.*, **24**, 4439 (1985b).

Kozlowski, L. J., K. Vural, V. H. Johnson, J. K. Chen, R. B. Bailey, D. Bui, M. J. Gubala, and J. R. Teague, "256 × 256 PACE-1 PV HgCdTe Focal Plane Arrays for Medium and Short Wavelength Infrared Applications," *Proc. SPIE*, **1308**, 202 (1990).

Kreis T., "Digital Holographic Interference-Phase Measurement Using the Fourier-Transform Method," *JOSA A*, **3**, 847 (1986).

Kuechel M. F. and W. Wiedmann, "In-Process Metrology for Large Astronomical Mirrors," *Proc. SPIE*, **1333**, 280 (1990).

Kuechel M. F., "Advances in Interferometric Wavefront-Measuring Technology Through the Direct Measuring Interferometry Method," *Proc. SPIE* **1573**, 159 (1992a).

Kuechel M. F., "Advanced Interferometry at Carl Zeiss (Summary Only)," *Proc. SPIE*, **1720**, 452 (1992b).

Kuwamura S. and I. Yamaguchi, "Wavelength Scanning Profilometry for Real-Time Surface Shape Measurement," *Appl. Opt.*, **36**, 4473–4482 (1997).

Kwon, O. Y., "Multichannel Phase-Shifted Interferometer," *Opt. Lett.*, **9**, 59 (1984).

Kwon, O. Y., "Advanced Wavefront Testing at Lockheed," *Proc. SPIE*, **816**, 196 (1987).

Kwon O. Y., D. M. Shough, and R. A. Williams, "Stroboscopic Phase-Shifting Interferometry," *Opt. Lett.*, **12**, 855 (1987).

Kwon O., J. C. Wyant, and C. R. Hayslett, "Rough Surface Interferometry at 10.6 Mum," *Appl. Opt.*, **19**(11), 1862 (1980).

Larkin K. G., and B. F. Oreb, "Design, Assessment of Symmetrical Phase-Shifting Algorithms," *J. Opt. Soc. Am. A*, **9**, 1740 (1992).

Li E., J. Yao, D. Yu, J. Xi, and J. Chicharo, "Optical Phase Shifting With Acousto-Optic Devices," *Opt. Lett.*, **30**, 189–191 (2005).

Liu Y. M., G. N. Lawrence, and C. L. Koliopoulos, "Subaperture Testing of Aspheres with

Annular Zones," *Appl. Opt.*, **27**, 4504 (1988).

Macy W. W., Jr., "Two-Dimensional Fringe-Pattern Analysis," *Appl. Opt.*, **22**, 3898 (1983).

Malacara D., M. Servín, and Z. Malacara, *Interferogram Analysis for Optical Testing*, 2nd Ed., CRC Press, Boca Raton, (2005).

Malacara D., Analysis of the Interferometric Ronchi Test," *Appl. Opt.*, **29**, 3633 (1990).

Malacara-Doblado D. and B. V. Dorrío, "Family of Detuning-Insensitive Phase-Shifting Algorithms: Erratum," *J. Opt. Soc. Am. A*, **18** , 721–721 (2001a).

Malacara-Doblado D. and B. V. Dorrío, "Family of Detuning-Insensitive Phase-Shifting Algorithms," *J. Opt. Soc. Am. A* 17, 1857–1863 (2000a).

Malacara-Doblado D., B. V. Dorrío, and D. Malacara-Hernandez, "Graphic Tool to Produce Tailored Symmetrical Phase-Shifting Algorithms," *Opt. Lett.*, **25**, 64–66 (2000b).

Malacara-Doblado, M. F. Kuechel, R. Rojas-Laguna, and E. Vargas-Rodrigez, "Wide-Range Detuning Insensitive Phase-Shifting Algorithms," *Proc. SPIE*, **4419**, 269 (2001).

Massie, N. A., "Digital Heterodyne Interferometry," *Proc. SPIE*, **816**, 40 (1987).

Massie N. A., "Real-Time Digital Heterodyne Interferometry: A System," *Appl. Opt.*, **19**, 154 (1980).

Massie N. A., J. Hartlove, D. Jungwirth, and J. Morris, "High Accuracy Interferometric Measurements of Electron-Beam Pumped Transverse-Flow Laser Media With 10-Musec Time Resolution," *Appl. Opt.*, **20**, 2372 (1981).

Massie N. A., M. Dunn, D. Swain, S. Muenter, and J. Morris, "Measuring Laser Flow Fields With a 64-Channel Heterodyne Interferometer," *Appl. Opt.*, **22**, 2141 (1983).

Massie N. A. and R. D. Nelson, "Beam Quality of Acousto-Optic Frequency Shifters," *Opt. Lett.*, **3**, 46 (1978).

Massie N. A., R. D. Nelson, and S. Holly, "High-Performance Real-Time Heterodyne Interferometry," *Appl. Opt.*, **18**, 1797 (1979).

Matthews H. J., D. K. Hamilton, and C. J. R. Sheppard, "Surface Profiling by Phase-Locked Interferometry," *Appl. Opt.*, **25**, 2372 (1986).

McLaughlin J. L. and B. A. Horwitz, "Real Time Snapshot Interferometer," *Proc. SPIE*, **680**, 35 (1986).

Mertz L. N., "Optical Homodyne Phase Metrology," *Appl. Opt.*, **28**, 1011 (1989).

Mertz L., "Complex Interferometry," *Appl. Opt.*, **22**, 1530 (1983).

Mertz L., "Real-Time Fringe-Pattern Analysis," *Appl. Opt.*, **22**, 1535 (1983).

Millerd J. E., N. J. Brock, J. B. Hayes, M. B. North-Morris, M. Novak, and J. C. Wyant, "Pixelated Phase-Mask Dynamic Interferometer," *Proc. SPIE*, **5531**, 304 (2004).

Millerd J. E., N. J. Brock, J. Hayes, B. Kimbrough, M. Novak, M. North-Morris, and J. C. Wyant, "Modern Approaches in Phase Measuring Metrology," *Proc. SPIE*, **5856**, 14 (2005).

Moore, D. T., *Gradient Index Optics Design and Tolerancing*, Ph.D. Dissertation, Institute of Optics, University of Rochester, Rochester, NY, (1973).

Moore D. T. and B. E. Truax, "Phase-Locked Moire Fringe Analysis for Automated Contouring of Diffuse Surfaces," *Appl. Opt.*, **18**, 91 (1979).

Moore D. T., R. P. Murray, and F. B. Neves, "Large Aperture ac Interferometer for Optical Testing," *Appl. Opt.*, **17**, 3959 (1978).

Moore R. C. and F. H. Slaymaker, "Direct Measurement of Phase in a Spherical-Wave Fizeau Interferometer," *Appl. Opt.*, **19**, 2196 (1980).

Morgan C. J., "Least-Squares Estimation in Phase-Measurement Interferometry," *Opt. Lett.*, **7**, 368 (1982).

Mottier, F. M., "Microprocessor Based Automatic Heterodyne Interferometer," Opt. Eng., **18**, 464 (1979).

Nakadate S. and H. Saito, "Fringe Scanning Speckle-Pattern Interferometry," *Appl. Opt.*, **24**,

2172 (1985).

Negro J. E., "Subaperture Optical System Testing," *Appl. Opt.*, **23**, 1921 (1984).

Nugent K. A., "Interferogram Analysis Using an Accurate Fully Automatic Algorithm," *Appl. Opt.*, **24**, 3101 (1985).

Ohyama N., S. Kinoshita, A. Cornejo-Rodriguez, T. Honda, and J. Tsujiuchi, "Accuracy of Phase Determination With Unequal Reference Phase Shift," *JOSA A*, **5**, 2019 (1988).

Okada K., H, Sakuta, T. Ose, and J. Tsujiuchi, "Separate Measurements of Surface Shapes, Refractive Index Inhomogeneity of an Optical Element Using Tunable-Source Phase Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **29**(22), 3280–3285 (1990).

Onodera R. and Y. Ishii, "Phase-Shift-Locked Interferometer With a Wavelength-Modulated Laser Diode," *Appl. Opt.*, **42**, 91–96 (2003).

Oppenheim A.V. and R.W. Schafer, *Digital Signal Processing*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall 1975.

Pez G. and M. Strojnik, "Fringe Analysis, Phase Reconstruction From Modulated Intensity Patterns," *Opt. Lett.*, **22**, 1669–1671 (1997).

Pfoertner A. and J. Schwider, "Dispersion Error in White-Light Linnik Interferometers, its Implications for Evaluation Procedures," *Appl. Opt.*, **40**, 6223–6228 (2001).

Phillion D. W., "General Methods for Generating Phase Shifting Interferometry Algorithms," *Appl. Opt.*, **36**, 8098–8115 (1997).

Powell R. L. and K. A. Stetson, "Interferometric Vibration Analysis by Wavefront Reconstruction," *JOSA*, **55**(12), 1593 (1965).

Prettyjohns, K.N., "Change-Coupled Device Image Acquisition for Digital phase Measurement Interferometry, *Opt. Eng.*, **23**, 371 (1984).

Prettyjohns K. N., S. DeVore, E. Dereniak, and J. C. Wyant, "Direct Phase Measurement Interferometer Working at 3.8 Mum," *Appl. Opt.*, **24**, 2211 (1985).

Pritt M. D., "Automated Subpixel Image Registration of Remotely Sensed Imagery," *IBM J. Res. Development*, **38**, 157–166 (1994).

Roddier C. and F. Roddier, "Interferogram Analysis Using Fourier Transform Techniques," *Appl. Opt.*, **26**, 1668 (1987).

Rosenbluth A. E. and N. Bobroff, "Optical Sources of Nonlinearity in Heterodyne Interferometers," *Prec. Eng.* **12**, 7 (1990).

Schmit J. and K. Creath, "Window Function Influence on Phase Error in Phase-Shifting Algorithms," *Appl. Opt.*, **35**, 5642–5649 (1996).

Schmit J. and K. Creath, "Extended Averaging Technique for Derivation of Error-Compensating Algorithms in Phase-Shifting Interferometry," *Appl. Opt.* **34**, 3610 (1995).

Schreiber H. and J. Schwider, "Lateral Shearing Interferometer Based on Two Ronchi Phase Gratings in Series," *Appl. Opt.* **36**, 5321–5324 (1997).

Schreiber H., P. G. Dewa, K. Hanfrod, R. Ligenza, L. R. Rich, and P. J. Tompkins, "157-nm System Test for High-NA Lithographic Lens Systems," *Proc. SPIE*, **4691**, 1675 (2002).

Schulz G. and J. Schwider, "Interferometric Testing of Smooth Surfaces," in: *Progress in Optics*, vol. XIII, E. Wolf, ed. North Holland, Amsterdam, 1976, pp. 93–167.

Schwider J., "Detection of Undersampling From Measured Phase-Shifting Data," *Opt. Lett.*, **19**, 231 (1994).

Schwider J., "Phase Shifting Interferometry: Reference Phase Error Reduction," *Appl. Opt.*, **28**, 3889 (1989).

Schwider J., O. R. Falkenstoerfer, H. Schreiber, A. Zoeller, and N. Streibl, "New Compensating Four-Phase Algorithm for Phase-Shift Interferometry," *Opt. Eng.*, **32**, 1883 (1993).

Schwider J., R. Burow, K.-E. Elssner, J. Grzanna, R. Spolaczyk, and K. Merkel, "Digital Wave-Front Measuring Interferometry: Some Systematic Error Sources," *Appl. Opt.*, **22**, 3421 (1983).

Seara R., A. A. Gonalves, and P. B. Uliana, "Filtering Algorithm for Noise Reduction in Phase-Map Images with 2 Phase Jumps," *Appl. Opt.* **37**, 2046–2050 (1998).

Selber, L. A., "Interferometer Accuracy and Precision," *Proc. SPIE*, **749**, 8 (1987).

Selber, L. A., "Interferometer Accuracy and Precision," *Proc. SPIE*, **1400**, 24 (1990a).

Seligson, J. L., C. A. Callari, J. E. Greivenkamp, and J. W. Ward, "Stability of a Lateral-Shearing Heterodyne Twyman–Green Interferometer," *Opt. Eng.*, **23**, 353 (1984).

Shagam, R. N., "AC Phase Measurement Technique for Moire Interferograms," *Proc/ SPIE* **429**, 35 (1983).

Shough D., Kwon O.Y., and Leary D. F., " High-Speed Interferometric Measurement of Aerodynamic Phenomena," *Proc. SPIE*, **1221**, 394 (1990).

Smythe R. A. and R. Moore, "Instantaneous Phase Measuring Interferometry," *Opt. Eng.* **23**, 361 (1984).

Smythe R.A., J. A. Soobitsky and, B. E. Truax, "Recent Advances in Interferometry at Zygo," *Proc. SPIE*, **816**, 95 (1987).

Sommargren G. E., "Up/down Frequency Shifter for Optical Heterodyne Interferometry," *J. Opt. Soc. Am.*, **65**, 960 (1975).

Sommargren G. E., "Optical Heterodyne Profilometry," *Appl. Opt.*, **20**, 610 (1981).

Soobitsky J. A., *Piezoelectric Micromotion Actuator*, U.S. Patent No. 4,577,131, 1986.

Stadelmaier A. and J. H. Massig, "Compensation of Lens Aberrations in Digital Holography," *Opt. Lett.*, **25**, 1630–1632 (2000).

Stahl H. P., Christ L. K., "Interferometric Phase Measurement Using Pyroelectric Vidicons," *Appl. Opt.*, **26**, 1127 (1987).

Stahl H. P., " IR Interferometry Using Pyroelectric Vidicons," *Lasers Optronics*, **57** (Sept. 1989).

Steinmetz C. R., "Sub-Micron Position Measurement and Control on Precision Machine Tools With Laser Interferometry," *Precision Eng.*, **12**, 12 (1990).

Steinmetz C. R., R. Burgoon, and J. Harris, "Accuracy Analysis and Improvements to the Hewlett-Packard Laser Interferometer System," *Proc. SPIE*, **816**, 79 (1987).

Stephenson D., "Forget Finding the Problem . . . Just Fix it," *Proc. SPIE*, **1049**, 187 (1989).

Stern A. and B. Javidi, "Three-Dimensional Image Sensing, Reconstruction With Time-Division Multiplexed Computational Integral Imaging," *Appl. Opt.*, **42**, 7036–7042 (2003).

Stevenson W. H., "Optical Frequency Shifting by Means of a Rotating Diffraction Grating," *Appl. Opt.*, **9**, 649 (1970).

Stuhlinger, T. W., "Subaperture Optical Testing: Experimental Verification," *Proc. SPIE*, **656**, 118 (1986).

Stump K. D., "Real-Time Interferometer," *Opt. Eng.* **18**, 648 (1979).

Surrel Y., "Phase-Shifting Algorithms for Nonlinear, Spatially Nonuniform Phase Shifts: Comment," *J. Opt. Soc. Am. A*, **15**, 1227–1233 (1998).

Surrel Y., "Additive Noise Effect in Digital Phase Detection," *Appl. Opt.*, **36**, 271–276 (1997a).

Surrel Y., "Design of Algorithms for Phase Measurements by the Use of Phase Stepping," *Appl. Opt.*, **35**, 51 (1996).

Surrel Y., "Design of Phase-Detection Algorithms Insensitive to Bias Modulation," *Appl. Opt.* **36**, 805–807 (1997b).

Surrel Y., "Phase Stepping: A New Self-Calibrating Alogrithm," *Appl. Opt.*, **32**, 3598 (1993).

Suzuki T., X. Zhao, and O. Sasaki, "Phase-Locked Phase-Shifting Laser Diode Interferometer With Photothermal Modulation," *Appl. Opt.* **40**, 2126–2131 (2001).

Suzuki T., O. Sasaki, and T. Maruyama, "Phase Locked Laser Diode Interferometry for Surface Profile Measurement," *Appl. Opt.*, **28**, 4407 (1989).

Suzuki, T. and R. Hioki, "Translation of Light Frequency by a Moving Grating," *J. Opt. Soc. Am.*, **57**, 1551 (1967).

Synborski C. E., "The Interferometric Analysis of Flatness by Eye and Computer," *Proc. SPIE*, **135**, 104 (1978).

Takeda M., H. Ina, and S. Kobayashi, "Fourier-Transform Method of Fringe-Pattern Analysis for Computer-Based Topography, Interferometry," *JOSA*, **72**, 156 (1982).

Takeda M., Q. Gu, M. Kinoshita, H. Takai, and Y. Takahashi, "Frequency-Multiplex Fourier-Transform Profilometry: A Single-Shot 3-Dimensional Shape Measurement of Objects With Large Height Discontinuities," *Appl. Opt.*, **36**, 5347–5354 (1997).

Tarbeyev Y. V., *Proceedings of 3rd IMEKO TC-8-Symposium, Theor. Metrology*, Berlin GDR, 1986, p. 5.

Tatsuno K. and Y. Tsunoda, "Diode Laser Direct Modulation Heterodyne Interferometer," *Appl. Opt.*, **26**, 37 (1987).

Thalmann R. and R. Dändliker, "Holographic Contouring Using Electronic Phase Measurement," *Opt. Eng.* **24**, 930 (1985).

Thunen J. G. and O. Y. Kwon, "Full Aperture Testing With Subaperture Test Optics," *Proc. SPIE*, **351**, 19 (1982).

Towers D. P., T. R. Judge, and P. J. Bryanston-Cross, "A Quasi-Heterodyne Holograph Technique and Automatic Algorithms for Phase Unwrapping," *Proc. SPIE* 1163, 95 (1989).

Toyooka S. and M. Tominaga, "Spatial Fringe Scanning for Optical Phase Measurement," *Opt. Comm.* **51**, 68 (1984).

Tricard M., P. Dumas, G. Forbes, and M. DeMarco, "Recent Advances in Sub-Aperture Approaches to Finishing and Metrology," *Proc. SPIE*, **6149**, 614903 (2006).

Truax B. E., "Programmable Interferometry," *Proc. SPIE*, **680**, 10 (1986).

Truax B. E., "Absolute Interferometric Testing of Spherical Surfaces," *Proc. SPIE*, **966**, 130 (1988).

Watkins L. R., S. M. Tan, and T. H. Barnes, "Determination of Interferometerphase Distributions by Use of Wavelets," *Opt. Lett.*, **24**, 905–907 (1999).

Willey G. and R. Patchin, "Optical Design Analysis Incorporating Actual System Interferometric Data, *Proc. SPIE* **1168**, 176 (1989).

van Wingerden J., H. J. Frankena, and C. Smorenburg, "Linear Approximation for Measurement Errors in Phase Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **30**, 2718 (1991).

Wizinowich, P. L., "System for Phase Shifting Interferometry in the Presence of Vibration," *Proc. SPIE* 1164, **25** (1989).

Wizinowich P. L., "Phase Shifting Interferometry in the Presence of Vibration: A New Algorithm, System," *Appl. Opt.*, **29**, 3271 (1990).

Womack K. H., "Interferometric Phase Measurement Using Spatial Synchronous Detection," *Opt. Eng.* **23**, 391 (1984a).

Womack K. H., "Fourier Domain Description of Interferogram Analysis," *Opt. Eng.* **23**, 396 (1984b).

Wyant J. C., "Interferometric Testing of Aspheric Surfaces," *Proc. SPIE*, **816**, 19 (1987).

Wyant J. C., "Double Frequency Grating Lateral Shear Interferometer," *Appl. Opt.*, **12**, 2057 (1973).

Wyant J. C., "Use of an ac Heterodyne Lateral Shear Interferometer with Real-Time Wavefront Correction Systems," *Appl. Opt.*, **14**, 2622 (1975).

Wyant J. C., B. F. Oreb, and P. Hariharan, "Testing Aspherics Using Two-Wavelength Holography: Use of Digital Electronic Techniques," *Appl. Opt.*, **23**, 4020 (1984a).

Wyant J. C., C. L. Koliopoulos, B. Bhushan, and O. E. George, "An Optical Profilometer for Surface Characterization of Magnetic Media," *ASLE Trans.* **27**, 101 (1984b).

Wyant J. C. and K. Creath, "*Two-Wavelength Phase-Shifting Interferometer and Method*," U.S. Patent No. 4,832,489 (1989).

Wyant J. C. and K. N. Prettyjohns, *Optical Profiler Using Improved Phase-Shifting Interferometry*," U.S. Patent No. 4,639,139 (1987).

Wyant J. C. and R. N. Shagam, "Use of Electronic Phase Measurement Techniques in Optical Testing," *Proceedings of ICO-11*, International Congress of Optics Madrid, 1978, p. 659.

Zanio K., "HgCdTe on Si for Hybrid and Monolithic FPAs," *Proc. SPIE*, **1308**, 180 (1990).

Zhao B. and Y. Surrel, "Effect of Quantization Error on the Computed Phase of Phase-Shifting

Measurements," *Appl. Opt.*, **36**, 2070–2075 (1997).

Zhu Y. and T. Gemma, "Method for Designing Error-Compensating Phase-Calculation Algorithms for Phase-Shifting Interferometry," *Appl. Opt.* **40**, 4540–4546 (2001).

Zvyagin A. V. and D. D. Sampson, "Achromatic Optical Phase Shiftermodulator," *Opt. Lett.*, **26**(4), 187–189 (2001).

第15章 表面轮廓仪、多波长及白光干涉测量

J·施密特（J. Schmit） K·格雷斯（K. Creath） C·怀杨特（C. Wyant）

15.1 表面轮廓仪介绍

近二十五年来，以高速计算机和固体器件为代表的新技术得以发展，同时针对越来越小的工程表面进行精确检测的需求也日渐增加，在这些因素的推动下，表面测量技术无论在技术成熟方面还是应用范围方面都得到了极大的发展。先进的照明光源，例如激光，以及通常使用的固体探测器和光电器件也对这一技术的发展起到了推动作用，使之不但能够用于描述表面形貌，而且能够用来确定诸如位移、散射等的一些其他特性。一些创新性的技巧和技术使得测量对象的范围得到了很大的扩展，因此针对那些高陡度、大台阶及深窄沟道的难度很大的面形也可以进行测量了。这些表面轮廓技术很多是由距离测量或焦距测定技术发展而来的，同时它们也往往需要进行扫描来获得面形轮廓。本章将介绍探针轮廓仪、扫描探针显微镜、共焦显微镜及干涉光学轮廓仪。这些仪器都被广泛应用于表面面形的测定，而且既适用于极小的典型工程表面，也适用于非球面和玻璃平板这样的光滑大面形检测。

本章的第一部分介绍了扫描探针显微镜和探针轮廓仪，然后围绕着近十五年来发展起来的、在商业和工业上得到应用的光学技术进行了详细的介绍。这部分内容包括单色光及白光照明干涉显微镜，另外还对近年来被广泛应用于工程表面测量的共焦显微镜进行了介绍。第二部分回顾了多波长干涉测量技术方面的工作，也就是双波长和多波长、波长扫描、光谱分析、白光干涉测量技术。白光和多波长技术也常常应用于其他测量方法，比如散斑、全息及条纹和结构光投影过程。最后还针对光学测距技术和偏振干涉仪作了简短的评述。

15.1.1 接触式轮廓仪

探针轮廓仪和扫描探针显微镜，通常都称为接触式轮廓仪或者触摸式传感器，因为它们都是使用一个探针来对测量对象的表面进行扫描。现在，施加在探针尖上的力已经非常小了，以至于很难再将其称为接触式仪器。这类仪器的测量速度很低，横向分辨率则相当高，不过一般来说低于光学显微镜。作为最早得到发展的探针轮廓仪，其制造成本不高，也便于使用，因此在许多机械和光学车间中作为标准配备。扫描探针显微镜的发展要相对晚一些，但是由于其具有亚纳米量级的纵向和横向分辨率，现在该设备在实验室和半导体及微机电系统（MEMS）工业中已经被普遍使用。测量大口径元件的剖面可以使用较大探针坐标测量仪，该仪器能够在扫描模式下工作。

15.1.2 光学轮廓仪

（1）光学聚焦传感器 一大类称为光学轮廓仪的设备取代了使用机械探针的接触式轮廓测量仪，这种设备利用光学聚焦传感器来实现轮廓测量。本章将会详细介绍少数已经发展成为商用轮廓仪的光学聚焦传感技术。

（2）共焦显微镜　共焦显微镜是商用化最成功的一个光学聚焦传感系统，该系统最早用来进行生物样品的检测，近来在工程表面的测量上也得到了应用。

15.1.3　干涉型光学轮廓仪

（1）双波长和多波长干涉测量　最早的干涉型光学轮廓仪使用的是单色光照明，同时使用了相移技术。使用相移技术可以获得最高测量精度，但是单色光照明却限制了测量的范围。为了能够扩大测量范围，进一步发展了双波长和多波长技术。如今双波长和多波长干涉测量原理还在全息和散斑技术中使用，用来测量大口径元件，其间用到了条纹投影和结构光技术（参见第16章内容）。

（2）白光干涉测量　白光干涉测量系统早已被确立为用于工程表面测量的主导光学轮廓仪。白光干涉测量可以看做一种光学聚焦传感器，干涉信号的位置确定了最佳焦点。这类设备的典型结构是由一个传统的显微镜配备一个干涉物镜组成。这种干涉测量技术相比其他光学和探针轮廓技术而言，其优势在于是进行全场扫描而非点到点的扫描。由于整个面积的成像是同时完成的，横向扫描变得不再必要，这也极大地提高了测量速度。

（3）光谱干涉仪　另一种干涉技术是基于观测由很多波长光束所形成的干涉条纹，这种条纹称为光谱干涉条纹。光谱干涉可以通过在干涉仪中使用一个波长可调谐光源来获得，或者在干涉仪的出射端放置一个色散元件来实现。不同的系统则分别称为波长扫描干涉仪或光谱分辨白光干涉仪。这种测量技术不再是探测每一个点的最佳焦点，而是对携带测量对象位置信息的条纹周期进行测量。这一技术避免了轴向机械扫描。

（4）光学测距传感器　在干涉光学轮廓仪中使用的技术常常建立在干涉光学测距传感器技术之上，或者说是基于该传感技术独立发展而成，这种传感技术主要用在基于单个点的绝对距离或长度的测量上。要进行单点探测，就要使用更快速的探测器和光电器件，也就是特殊任务的信号处理技术。

（5）偏振干涉仪　一些干涉仪则利用了光的偏振特性，从而使得两个光束在干涉仪中几乎以相同的路径进行传输，就像在微分干涉显微镜中一样。偏振干涉仪利用偏振来实现相移，这样通常能够降低对振动的敏感性。光的偏振特性在评估一些亚微结构特性时是很有效的。

15.1.4　确定系统性能的术语和问题

所有的轮廓仪都需要进行仔细的标校，尤其是在测量诸如MEMS系统这样的微小对象时。不同外形的系统，其性能都是利用一些典型对象来进行标定，这些典型对象都可以在一些最基本的标准下给出了确切的测量值。最为常用的一个典型对象是台阶，例如一个台阶对象用来进行垂直方向扫描的校准，同时一个刻蚀的二元光栅元件常用于标定横向放大率。其他的典型对象，如正弦型光栅或者不同粗糙度的表面也用于系统性能的校验。理想情况下，测试应该从相同的单元出发进行。标准协会，如美国国家标准和技术协会（National Institute of Standards and Technology，NIST）德国物理技术联合会（Physikalisch-Technische Bundesanstalt，PTB）或加拿大国家研究委员会（National Research Council，NRC）等都不断地推出典型检测对象和参数，为系统提供准确的校对和查证标准。那些典型对象如果使用标准探针轮廓仪进行测量后便成为检测标准。

制造商一般会给出（也是用户所需要的）纵向分辨率作为系统性能参数，然而很少有

信息表明制造商是用哪一种典型对象进行测量和计算的。在不知道特定参数的值是如何确定的情况下，对不同制造商或系统提供的参考值进行比较是没有意义的。

在确定系统性能的同时，测量中还有两个非常重要的问题，分别是重复性和再现性。一般而言，重复性定义为在不改变系统的前提下，短时间内对测量对象的一个参数进行多次测量得到的 1σ 标准偏差。再现性是指在不同的测量条件下在一段较长时间内多次测量的结果分布。对一个系统的评价其实就是针对一个测量对象确定参数的重复性和再现性。检测的程序和给出的评价值应该给出清楚的说明，并为使用者和厂商认可，这也是很重要的。

在表面检测中有两个容易混淆的术语：准确度和精度。准确度是指测量值与真值之间的接近程度（如一个典型对象的测量值）。精度则指测量的分布状态，也可以用重复性和再现性来表述。

15.2　接触式轮廓仪

探针轮廓仪和扫描探针显微镜是两种主要的接触式轮廓测量仪，它们都用一个可接触的探针去测量表面轮廓。二者的区别在于横向和纵向的测量范围及它们的分辨率，因此，它们有不同的应用范围。另外，扫描探针显微镜可以测量样品和针尖间的相互作用，这使得其可以测量材料的不同性质。

15.2.1　探针轮廓仪

探针轮廓仪利用一个在表面移动的小针尖，通过感知针的高度起伏来确定表面的轮廓。探针轮廓仪能够测量的高度达 1mm。这种轮廓仪工作的时候很像留声机，通常情况下，被测表面在探针下移动，但也有可能是探针在表面移动。探针的垂直运动由一个线性变化的差动变压器（LVDT）测量，然后把测量的信号转换为高度数据。探针是由坚硬的物质，例如金刚石制作的，针尖的曲率半径在 0.05～50μm 之间，这决定了仪器的横向分辨率。为保证被测表面不在测量过程中损坏，施加在表面的载荷在 0.1～50mg 之间。为了使探针在表面移动时不会对表面带来形变，需要选择一个最小载荷。图 15.1 所示为带有 LVDT 的探针轮廓仪的结构图。其他的探针引导和运动监测方案也是可行的（Whitehouse，1997）。

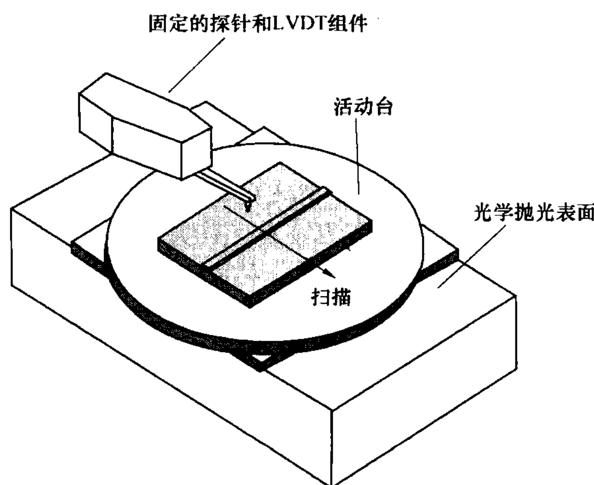


图 15.1　带有 LVDT 的探针轮廓仪的结构图（Veeco Instruments 公司提供）

图 15.2 中的锥角 45°的针尖，当然也有其他形状和锥角的探针。形状和锥角决定了针尖渗入测试表面的深度。这种轮廓仪的输出是针尖的大小及形状与表面轮廓的卷积。选择针尖的形状是非常重要的，这样确保针尖能够刺入陡峭的沟道底部，同时避免在测量表面突峰位置时产生偏差。图 15.3 所示为用带有锥角的针尖测量时实际的表面和测得的表面。

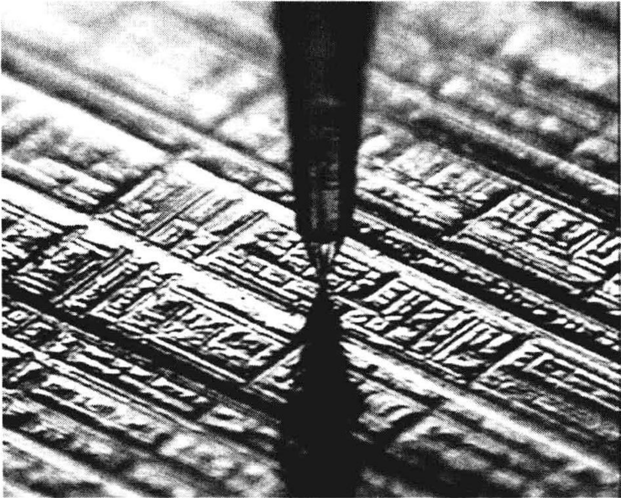


图 15.2　半径 0.2μm、锥角 45°的针尖测量粗糙度比较带（与探针轮廓仪连接的摄像头观察物体与针尖之间的位置。Veeco Instruments 公司供图）

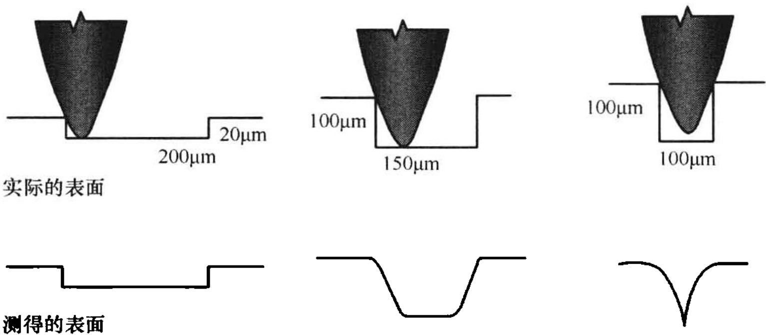


图 15.3　半径 25μm 的针尖轨迹和表面轮廓的卷积

针尖半径越小越尖，那么针尖就能够越容易地跟踪表面形状，但是针尖太尖，针尖施加给予表面的压力就越大，有可能使表面产生局部形变。如果表面产生的是弹性形变，虽然这不会损坏样品，但是会导致表面轮廓测量不准确。如果产生的是塑性形变，会导致表面轮廓测量不准确，并且可能永久损坏样品。新型的低压力技术（针尖载荷小于 1mg 的）允许测量柔软的物质，例如光刻胶。另外，当用小半径的探针时，扫描速度会明显降低，同时，必须降低针尖载荷来得到更准确的测量。对于最精确的探针轮廓仪，针尖半径约为几十微米或更小，针尖载荷为几毫克或更少。这些轮廓仪需要密封和振动隔离系统，需要很多分钟去完成几千个点的扫描。

探针轮廓仪的横向分辨力由针尖半径、表面形状和数据点之间的采样间隔决定。对于一个球形针尖的探针来说，在测量一个正弦形的表面轮廓时，最小可测量的正弦波的波长（周期）d 不仅取决于探针半径 r，还取决于正弦波的振幅 a（Bennett and Dancy，1981），最短可测量周期公式为

$$d = 2\pi\sqrt{ar} \tag{15.1}$$

因为每个正弦周期需要两次采样来重构一个正弦波，这样横向分辨力就是 $d/2$。也就是说，当用半径 10μm 的针尖测量 1nm 高度起伏的表面时，横向分辨力约为 0.6μm。为了确保足够的分辨力，最好是进行多次采样，即在每个横向分辨力范围内至少采样 4 次（Bennett and Mattson，1989）。对于更加复杂的表面，横向分辨力和传递函数也能够被确定（Al Jumaily et al.，1987；Bennett and Dancy，1981）。探针针尖的轮廓（及曲率半径）可以用扫描电子显微镜观察，或者用刀口法扫描（Vorburger and Raja，1990）。市场上最小的针尖半径约为 50nm，通常用聚焦离子束刻蚀方法制造，如图 15.4 所示。这种针尖极大地改善了轮廓仪的横向分辨力。

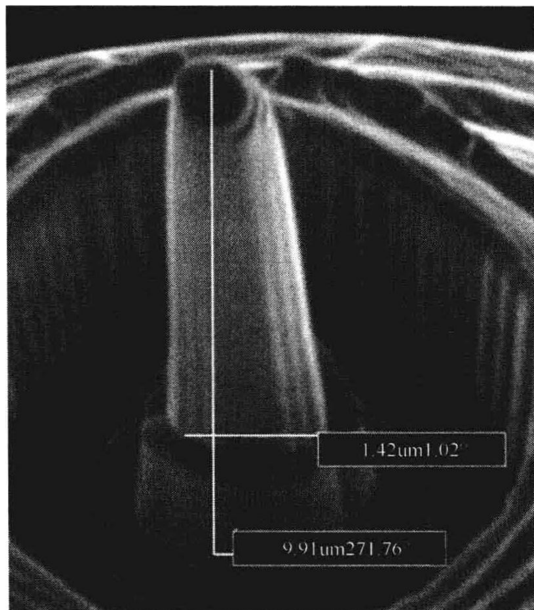


图 15.4　50nm 半径针尖的扫描电子显微图（Veeco Instruments 公司供图）

针尖的锥角决定了测得的沟道的高宽比，对于一个 60°锥角的针尖来说其可测的高宽比的典型值是 1:1。应测量像 MEMS 系统这样大高宽比的结构的需要，人们发展了尖锐的针尖来测量高宽比达 10:1 的沟道。现在技术制造可以做出几何形状如“凿形”的针尖，它能够用来测量更具挑战性复杂的样品，例如集成电路封装中的焊料凸点。

大多数探针轮廓仪都需要某种形式的参考面来保证测量的精度（Vorburger and Raja，1990）。参考面可以是一个滑块，它随着探针一起移过待测表面；或者也可以使用一个分离的参考面，这时使另外一个大半径的探针在其上面移动，移动方式与测量探针之间具有固定的关系。参考信息也可以由一个曲面产生（Vorburger and Raja，1990）。在探针旁使用一个大曲率半径的滑块是最简单的生成参考信息的方法，但这种技术会导致出错，丢失形状和图形信息。使用分离参考面是最准确的，但这会限制扫描的长度和可测的高度起伏。平面度为 $\lambda/20$ 的光学平板是一种很稳定的参考面。

探针轮廓仪通常都用已知的高度和粗糙度标准进行校准；这些标准可以从 VSLI 标准组织或者德国 PTB 购买。最常用的标准是熔融玻璃上制作的铬台阶或者是蚀刻在硅片上台阶。轮廓仪对台阶进行周期性的测量，以保证校准和比例因子能够计算得出，提供轮廓数据。有些探针轮廓仪在整个高度测量范围内不是线性的，用一个在高度上与测试样品接近的台阶来

对探针轮廓仪进行校准是很重要的步骤。当需要确定一个表面的粗糙度时，最好使用一个粗糙度标准件而不是台阶高度标准件对仪器进行校准，因为需要同时考虑横向分辨力和表面高度起伏。标准有很多不同的类型。最常见的是给定了幅度，但具有不同空间波长的正弦波标准。粗糙度标准也使用了方波光栅形状。由于探针不可能不会完全深入波谷或者在测量波峰时会跑偏，所以正弦波标准件能够在单一的空间频率上对仪器性能作更精确的评价。

探针轮廓仪能够测量的表面粗糙度的均方根值（RMS）最小达到0.5Å（$1Å=10^{-10}m$），横向分辨力0.1～0.2μm。在对表面进行扫描期间，只对单点测量时，仪器噪声的均方根值（RMS）能达到0.5Å。探针轮廓仪测量100nm台阶高度时重复性达到6Å；测量60μm台阶高度时，重复性达到7nm。由于探针轮廓仪是接触式仪器，为了测量薄膜的厚度，需要在薄膜与基底之间形成台阶。

由于探针轮廓仪具有大的横向和纵向扫描范围，所以其在普通计量和半导体工业中有广泛的应用。当被测表面长度超过200mm时，也常会用到探针轮廓仪。这种情况下，获得表面轮廓的典型方法是先进行单向扫描，然后把扫描的结果拼接在一起。在低压力下进行多次扫描能够减少损坏样品的可能性。其他典型的应用包括划痕实验法测量保护层的厚度和硬度、晶片平整度、晶片蚀刻深度、测试晶片上薄膜的应力、RGB颜色滤波器在平板显示器上的应力、芯片的凸点及监控MEMS的湿法蚀刻过程等。图15.5所示为探针轮廓仪的几种应用的结果。有些轮廓仪是专门为测量非球面和它们的粗糙度设计的。这些系统能够测量宽12mm，高38mm，口径超过200mm的非球面。最近斯科特还在使用探针轮廓仪对非球面进行测量方面取得了一些进展（Scott，2002）。

对于表面测量技术的概述，包括探针轮廓仪、表面特征和所使用的光学方法的评述可以在很多参考文献中找到。（Stoutand Blunt，1994；Thomas，1999；Lehmann，2003；Whitehouse，1997、2003）。

15.2.2 扫描探针显微镜

扫描探针显微镜（scanning probe microscopes，SPM）通过移动非常靠近待测表面的细小探针，可以达到原子量级的分辨力。针尖扫描时离表面的距离在几十个埃（Å）之内，而针尖也可以直接接触表面，此时压力小于nN。第一个这种类型的显微镜是扫描隧道显微镜（scanning tunneling microscope，STM），由贝宁（Binnig）和罗克（Rohrer）设计（Binnig and Rohrer，1982、1985），他们也因此获得了1986年的诺贝尔物理奖。最常用的扫描探针显微镜是原子力显微镜（atomic force microscpes，AFM），也叫做扫描力显微镜（scanning force microscopes，SFM）。

原子力显微镜有相当多的工作模式，包括磁力显微镜（magnetic force microscopy，MFM）和电子力显微镜（electric force microscopy，EFM）。扫描探针显微镜的发展很快，新的探针也不断被发明以满足不断变化的应用需求。由于有如此众多不同类型的探针结构，无论测量对象是集成电路还是生物个体，要从其中选出一个合适的来对待测表面进行检测并不困难。汉瑟姆和特索夫（Hansma and Tersoff，1987）、如格尔和汉瑟姆（Ruger and Hansma，1990）、塞瑞德（Sarid，1991）、维克罗曼-辛（Wickrama-singhe，1989）、布赫莱特等人（Bhushanetal et al.，2004）、邦内尔（Bonnell，2001）、科汉和莱特伯德（Cohen and Lightbody，1999）及马格诺伍（Magnov，1996）都撰写了很多关于扫描探针显微镜的介绍。本节主要关注两种类型的扫描探针显微镜：扫描隧道显微镜（STM）和原子力显微镜（AFM）。

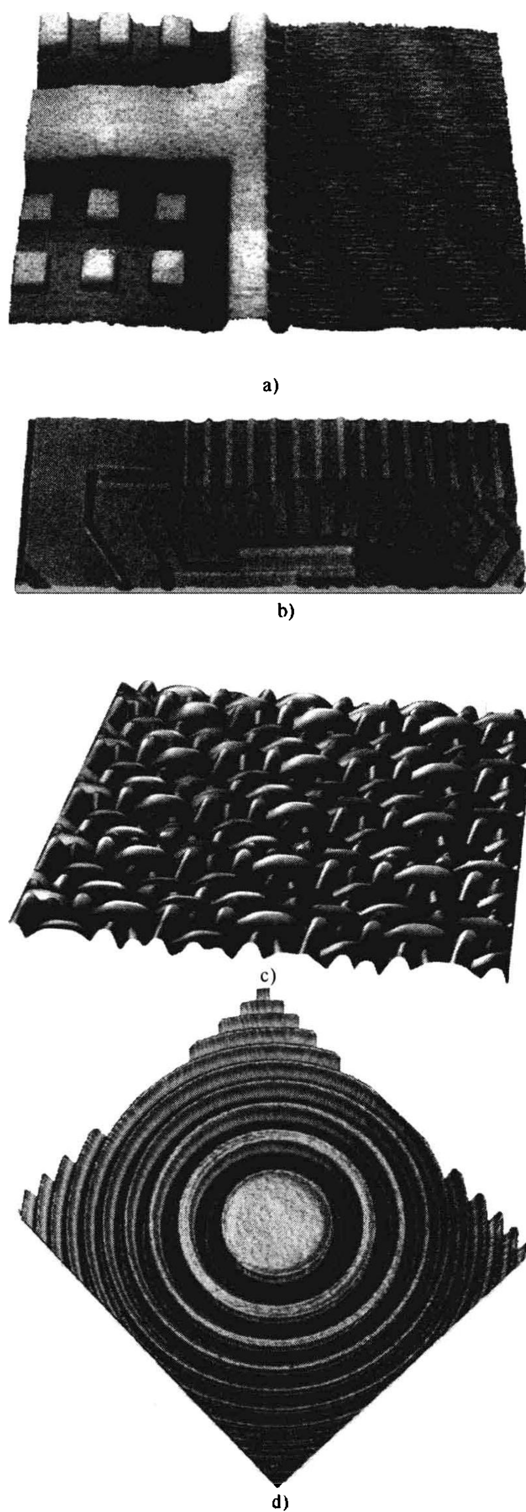


图 15.5　探针轮廓仪测量的几个实例（图 a 和图 b 由 KLA-Tencor 公司提供，图 c 和图 d 由 Veeco Instruments 公司提供）

a）24μm×45μm 铜连接线　b）汽车传感器（扫描范围 40mm×15mm）　c）涤纶网（扫描范围 14mm×14mm）　d）二元光学元件（扫描范围 240μm×240μm）

1. 扫描隧道显微镜

在扫描隧道显微镜（STM）中，金属的针尖向待测导体或半导体表面靠近，直到能够在针尖和待测表面之间检测到隧道电流。为了“感知”隧道电流，必须在针尖和待测表面施加电压。为了达到原子量级的分辨力，针尖仅有一个原子和测试表面产生相互作用。只有当针尖到表面的距离小于 1nm 时，才能成功感知到隧道电流。探针离表面的距离越近，隧道电流就会呈现指数规律增长。0.1nm 的距离变化，就会使隧道电流变化达到 10 个数量级，这也使 STM 具有了原子量级的测量灵敏度。利用压电陶瓷（PZT）可以将探针控制在待测表面上方几十埃（Å）的空间范围内，并呈光栅模式扫描。STM 只能检测导体的表面，这限制了它的应用，其图像的分辨力很大程度上依赖于针尖的几何形状（van Loenen et al.，1990）。

图 15.6 为 STM 的结构示意图，它由一个固定在 x、y、z 方向 PZT 移动平台上的细针尖构成。STM 可工作于恒电流或者恒高度模式。恒电流工作模式在扫描过程中利用电子反馈线路来改变探针或者样品的高度，同时控制隧道电流的恒定。恒高度工作模式则是保持针尖（或样品）的高度不变，测量隧道电流与相对位置之间的函数关系。由于恒电流模式可以测量更大的高度起伏，因此是常用的模式。而恒高度模式的特点是速度快，但如果待测表面比较粗糙，针尖很容易陷入表面，损坏待测表面和针尖。

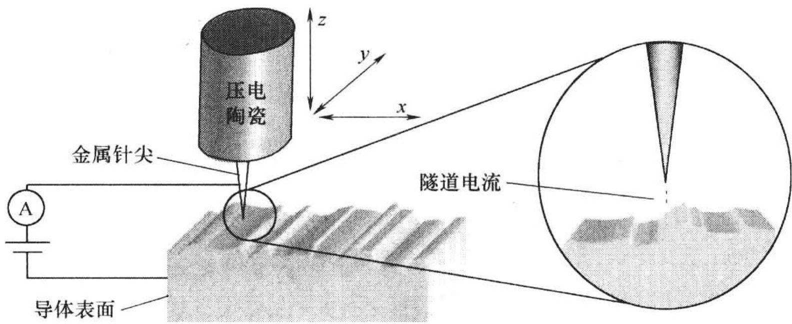
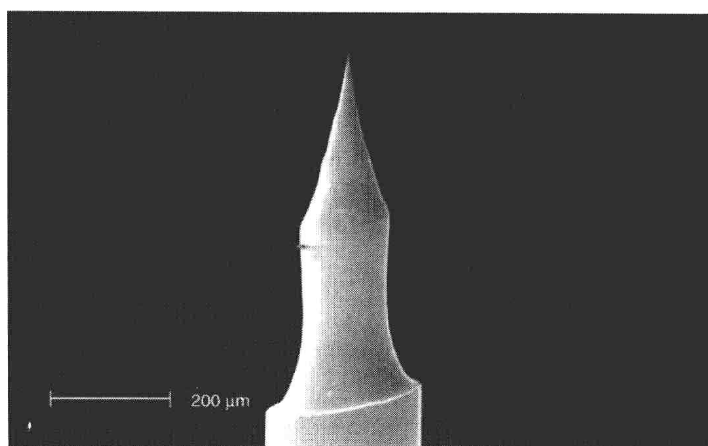
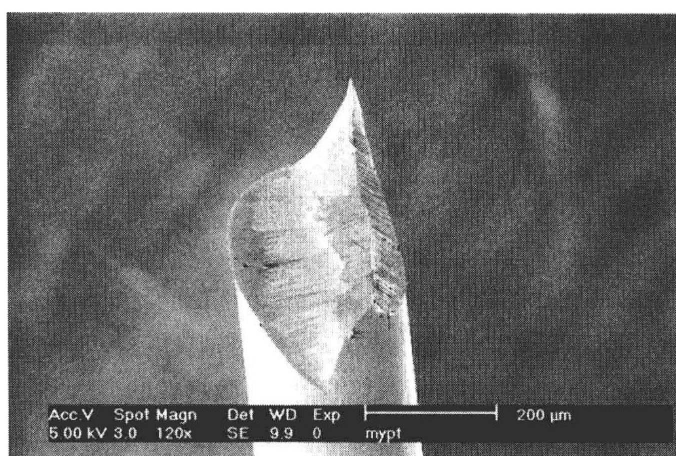


图 15.6 STM 的结构示意图（它能测量导体的表面形貌，横向和纵向分辨力可达到次原子量级）

STM 最初是在真空中原子量级分辨的相关领域中使用的（Bining and rohrer，1982），现在它已经可以在空气中使用，而且扫描范围大于 100μm。扫描范围由 PZT 决定，PZT 的运动范围越大，则分辨力就越低小，两者只能折中考虑。就像光学显微镜在不同分辨力和不同视场情况下测量需要不同的放大倍数一样，STM 在使用时，为了改变横向、纵向分辨力和扫描范围，需要对扫描头使用的探针大小和扫描范围进行选择，如图 15.7 所示。较大的 STM 扫描范围与高倍光学轮廓仪及高分辨力的探针轮廓仪的测量范围相互有交叉。由于 STM 需要能导电的待测表面来产生隧道电流，像玻璃这种物质就不能被测量。尽管有这些限制，STM 仍用于评估光学表面（Dragoset et al.，1986；Dragoset and Vorburger，1987；Schneir et al，1989）。图 15.8 所示为 STM 测量的导电石墨溶液上的液晶薄膜的单层分子图案的阴影图。STM 的理论、相关的扫描探针技术及应用可参见文献格如斯德特和威森丹吉尔（Güntherodt and Wiesendanger，1994）和威森丹吉尔和格如斯德特（Wiesendanger and Güntherodt，1995，1996）发表的论文。



a)



b)

图 15.7　STM 针尖的制作方法（Veeco Instruments 公司提供）

a）计算机控制蚀刻钨丝　b）机械切割钨丝或铂丝/铱丝（建议用于原子成像）

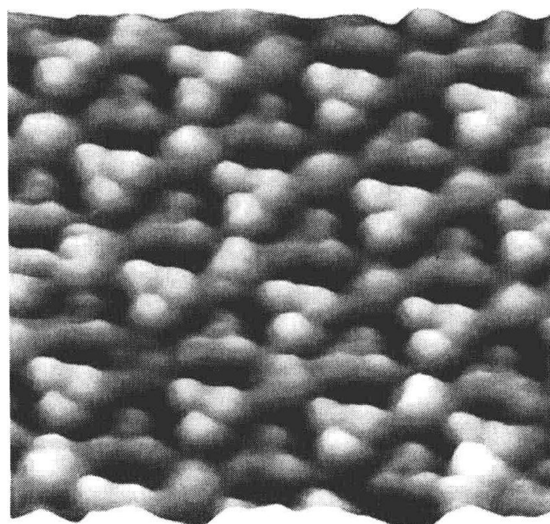


图15.8　混有石墨溶液的液晶单层图像界面（扫描面积36nm×36nm）(Veeco Instruments 公司提供)

2. 原子力显微镜

原子力显微镜（AFM）是扫描隧道显微镜的扩展（Binnig et al.，1986）。除了导电表面之外，利用针尖与样品表面的相互作用力代替隧道电流作为控制参数，AFM 还可以测绘非导电样品的表面。AFM 应用的是两种类型的原子间作用力，一种是排斥力，另一种是吸引力。这两种力对应两种基本的操作模式：接触模式和非接触模式。针尖与样品间的空隙与受力及工作模式的关系如图 15.9 所示。

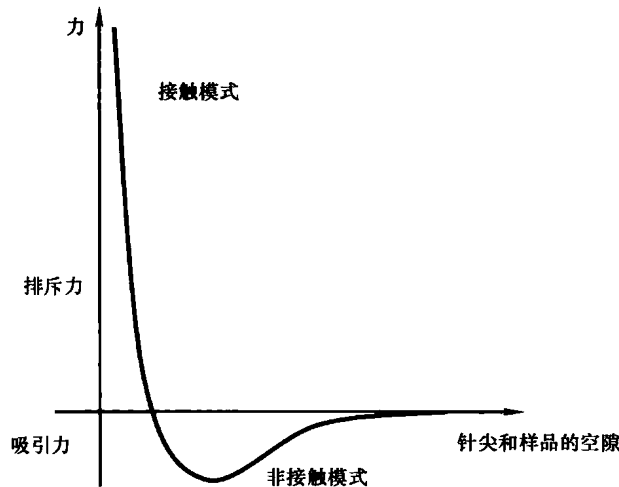
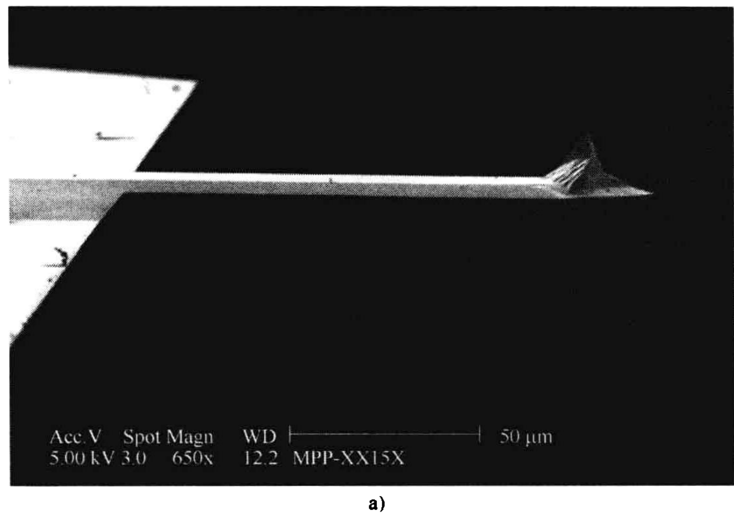


图 15.9 针尖与样品间的空隙与受力及工作模式的关系

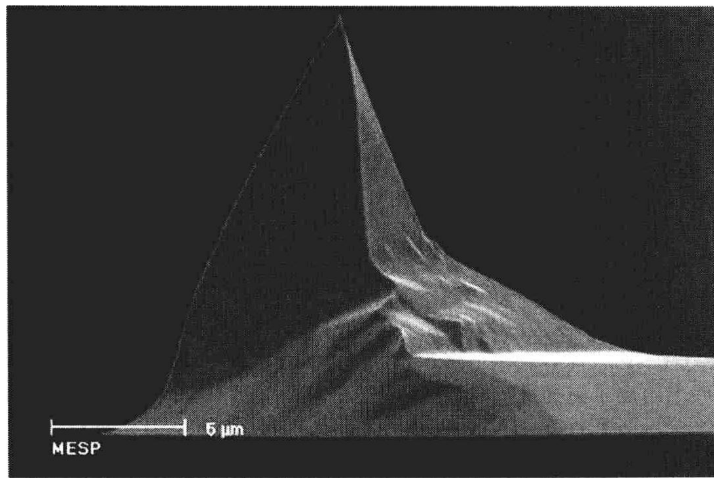
在排斥力（接触）工作模式下，探针就像留声机的唱针一样直接在样品表面移动。针尖的典型长度小于 10μm，半径 2～10nm。针尖固定在微悬臂的自由端（微悬臂通常由弹性较大的材料如单晶硅或氮化硅制成），悬臂长 100～500μm，厚 2～10μm。硅微悬臂和它的针尖如图 15.10 所示。当 AFM 对样品表面进行扫描时，针尖与样品表面的相互作用力会导致悬臂弯曲（悬臂挠曲）。测量悬臂的挠曲可以确定表面形貌。通常，悬臂的柔韧性非常好，因此针尖与样品间的接触力要小于很多固体原子间的结合力。



a)

图 15.10 扫描电子显微镜下的图像（Veeco Instruments 公司提供）

a）硅微悬臂和针尖的



b)

图 15.10　扫描电子显微镜下的图像（Veeco Instruments 公司提供）(续)
b) AFM 中使用的针尖

测量挠曲有多种方法。亚历山大（Alexander et al.，1989）发明了一个数据采集系统，它通过观察固定在悬臂一端的镜子反射回来的激光束的变化来测量挠曲。这基于光学三角测量原理。塞瑞德发明了另外一种数据采集技术（Sarid et al.，1988），它利用的是微悬臂末端反馈回二极管激光器的信息，这种微悬臂用压阻材料制作，以便于使用电学测试方式。图 15.11 为两种类型的光学数据采集系统。图 15.12 为由 AFM 测量得到的 Si/SiN 和金属玻璃形貌，使用的系统为激光挠曲数据采集系统。

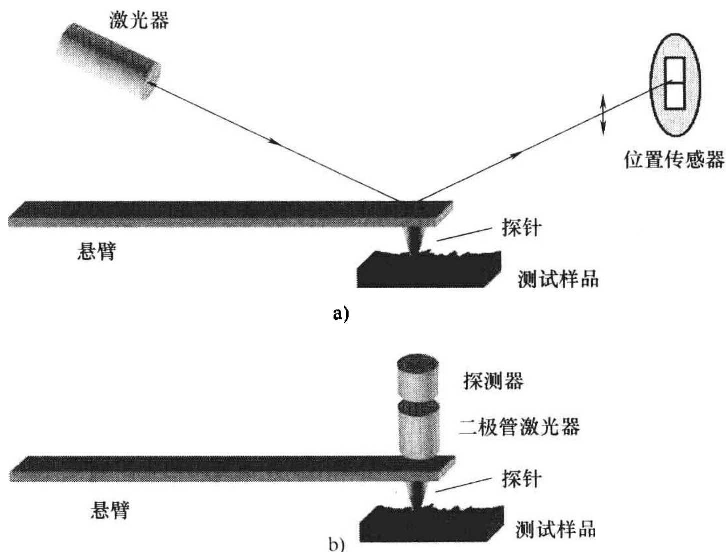


图 15.11　AFM 悬臂的数据采集系统原理图
a) 光学杠杆数据采集系统　b) 二极管激光器数据采集系统

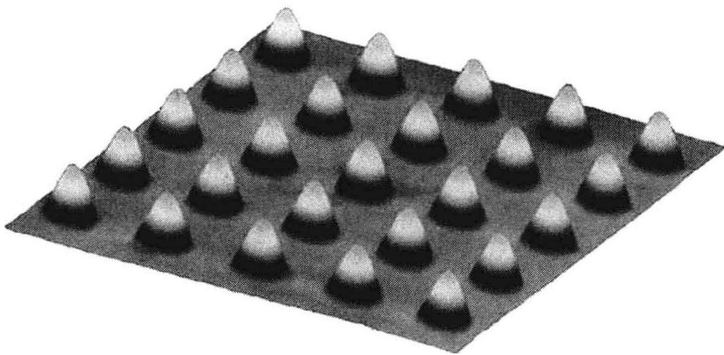


图 15.12　AFM 接触模式下得到的高 80nm 的图像（图像以 Si/SiN 为基底，在基底上由离子束穿过掩模板而得到，图像直径为 1μm，图像间隔为 1μm，扫描面积 10um × 10um）(Veeco Instruments 公司提供)

在非接触模式下，针尖与样品之间的作用力为吸引力，由于没有接触，所以不会损坏样品。由于吸引力很小，针尖振动频率很高，系统检测到的信号是振动过程中幅度和相位的变化，这种变化是由针尖样品相互作用时动能的损失和增加导致的。

还有一种有效的间歇式接触模式，称为轻敲模式（Zhong et al.，1993；Cleveland et al.，1998），这是目前最常用的模式。这项专利技术（Virgil and Gurley，2000）利用针尖轻敲样品表面来测绘形貌，针尖的振动频率接近微悬臂的谐振频率。图 15.13 为 AFM 轻敲模式的信号检测原理图。针尖的振动幅度为几十纳米。这种大幅度的振动确保针尖不会粘在被测物体表面的液态层中，而这在非接触模式 AFM 测试中是可能发生的。轻敲模式克服了接触模式和非接触模式的一些局限，因为它消除了剪切力，这种力会损坏柔软样品，降低成像分辨力。图 15.14 所示为在轻敲模式下测量得到的 DNA 链图像。轻敲模式也可以用于测量高度起伏为几微米的表面。

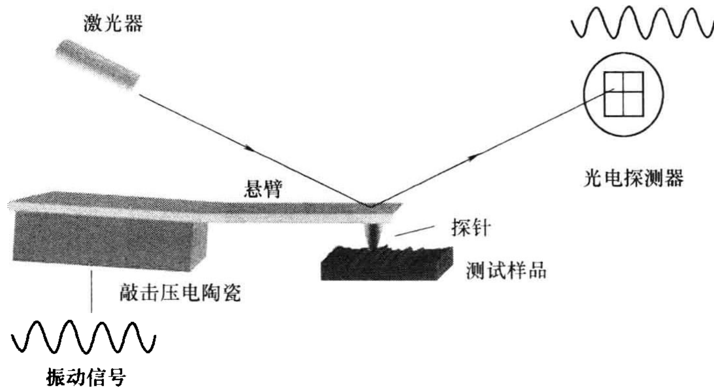


图 15.13　AFM 轻敲模式的信号检测原理图（探针在样品之上，与样品保持水平，这样产生振幅恒定的信号。信号振幅的变化反映了微悬臂和物体之间距离的变化。）

AFM 不仅可以测量样品的形貌，通过提供变化的运动和信号来驱动探针，还可以对被测样品的其他性质进行测试。例如，材料成分的变化、附着性、摩擦系数、粘弹性及电磁材料性质。图 15.15 和图 15.16 所示为被测样品的表面形貌及电磁特性。

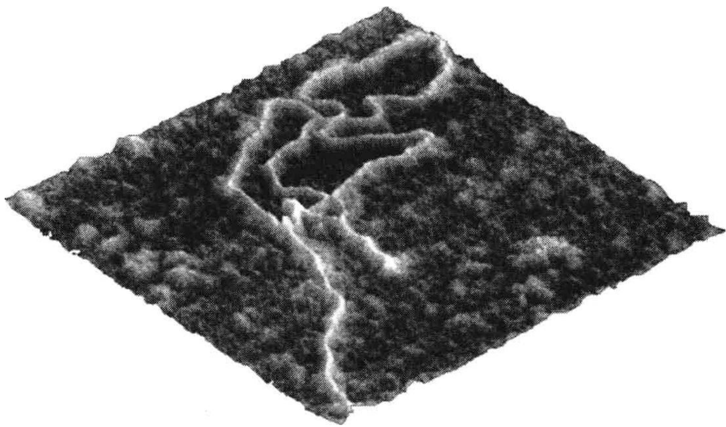


图15.14　AFM轻敲模式得到的一个云母上清晰且可重复分辨的λ噬菌体的DNA链图像（扫描范围1μm）(Veeco Instruments公司提供)

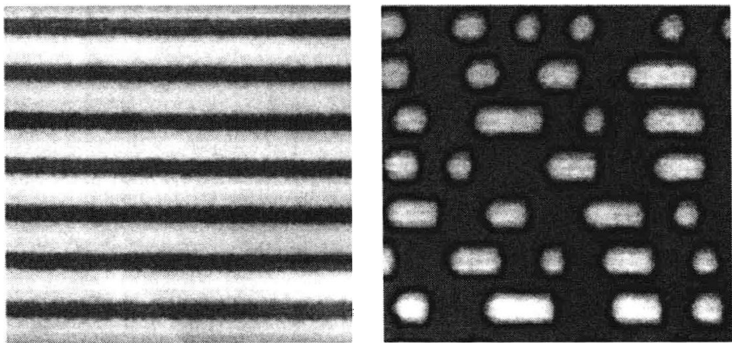


图15.15　DVD-RW的表面形貌（左）和电学性能（右）
（利用AFM的电子力显微镜功能测到的电学性质表明结晶区相位变化形成的非晶位。扫描面积5μm×5μm）(Veeco Instruments公司提供)

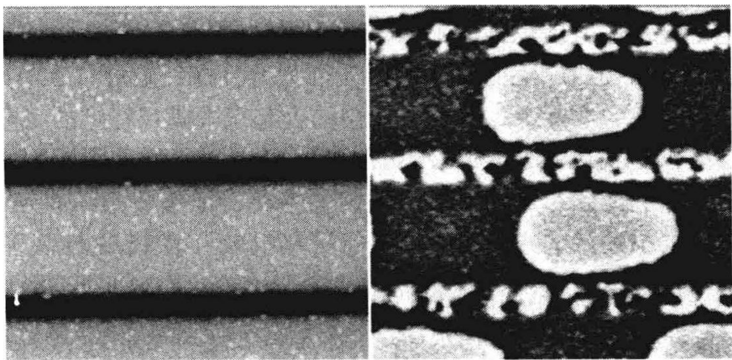


图15.16　磁光盘上的探针检测图（左边是表面形貌图，可看出槽型轨道。右边的磁力梯度图显示了位边缘粗糙度和槽内空白区的结构。图像大小为50nm。扫描面积5μm×5μm）
(Veeco Instruments公司提供)

AFM通过测量驱动针尖的周期信号和针尖振动之间的相位延迟，还可以确定样品表面性质的变化。最近发明的一种技术叫做转矩谐振模式（TRmode™）(Su et al.，2003)，它可

以测量和控制针尖与样品表面间的动态侧力。悬臂在转矩谐振模式下的扭曲摆动特性可以用来对样品的面内各向异性实现纳米级检测。不同的 AFM 模式及其在 MEMS 系统测量中的应用参见赛瑞和施密特的文献（Serry and Schmit，2007）。

很多作者针对 AFM 在生物和医学中的应用（Morris et al.，1999；Jena et al.，2002；Braga and Ricci，2004）进行了讨论。AFM 为观察生物样本提供了重要方法，例如它可以对细胞结构及功能进行分析。细胞测量的实例如图 15.17 所示。

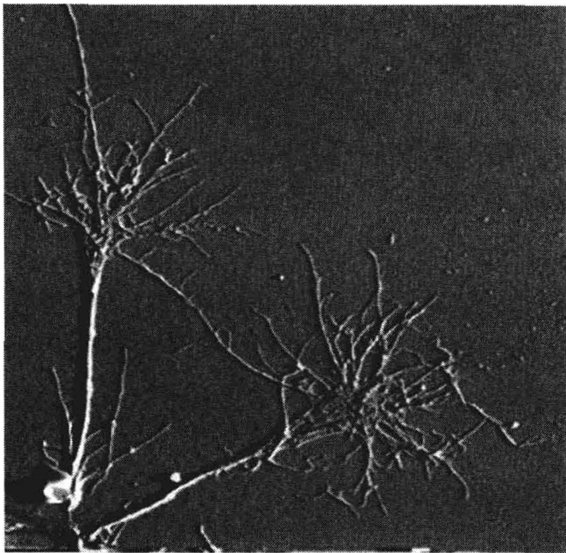


图 15.17 AFM 成像的维甲酸诱导人体 SH-SY5Y 神经母细胞瘤细胞分化图（100μm 扫描）（Veeco Instruments 公司提供）

15.2.3 AFM 和探针轮廓仪的比较

探针轮廓仪和后来发展的 AFM 都是以很小的力直接接触被测表面然后进行扫描的。最近的纳米技术和电子技术的发展也推动了 AFM 的发展，它已不再是一个简单的表面形貌分析仪器，现在它已可以对相当广泛的表面特征进行测量。探针轮廓仪和 AFM 在三维表面计量中能够互补彼此的不足，实际上，有时它们会结合起来去满足特定的工业需求，例如测量半导体硅片。用这些仪器获得的表面形貌不受被测表面光学性质的影响，这两种仪器都非常适合于测量由不同材料和薄膜组成的样品。它们的主要特征参数归纳在表 15.1 中，表中同时将其与本章后面将要描述到的光学轮廓仪进行了相比较。表 15.1 反映了本书出版时的典型值。图 15.18 给出了三类轮廓仪的测量范围。

表 15.1 扫描探针显微镜、探针轮廓仪、白光干涉光学轮廓仪和共焦显微镜的主要特征参数

	原子力/扫描隧道显微镜	探针轮廓仪	白光干涉光学轮廓仪	共焦显微镜
X、*Y* 分辨力	AFM 2～10nm STM 0.1nm	50nm（由探针半径确定）	0.5μm（由物镜的数值孔径确定）	0.5μm（由物镜的数值孔径及横向采样确定）
Z 分辨力	AFM 0.1nm STM 0.01nm	0.25nm	0.3nm	1～20nm（由物镜放大率确定）

（续）

	原子力/扫描隧道显微镜	探针轮廓仪	白光干涉光学轮廓仪	共焦显微镜
视场	典型值为 120 mm × 120mm 以上	200mm 以上	100μm × 100μm 10mm × 10mm（可通过拼接来扩展）	100μm × 100μm 10mm × 10mm（可以通过增加横向采样透镜阵列来扩展）
可测高度范围	20μm 以上	1mm	8mm（或用物镜的工作距离限制）	物镜的工作距离限制
样品制备	很少或不用	不用	不用	不用
接触方式	可选	需要	不需要	不需要
特殊表面需求	STM 导电表面	强力可能导致表面损坏	需要对不同材料和薄膜涂层进行修正	需要对不同材料和薄膜涂层进行修正
扫描方式	点扫描	点扫描	视场扫描	点扫描
样品动态测量	不用	不用	用	不用
穿透玻璃测量	不可能	不可能	可能	可能
薄膜厚度	只用于台阶薄膜	只用于台阶薄膜	最小 0.1μm	最小 0.1μm
表面或薄膜的光学特性测量	间接测量，比如通过与表面貌形的相互关系	不能测量	可以测量	可以测量
其他材料特性测量	胶粘剂、电磁材料、粘弹性材料、弹性材料等	无	无	无

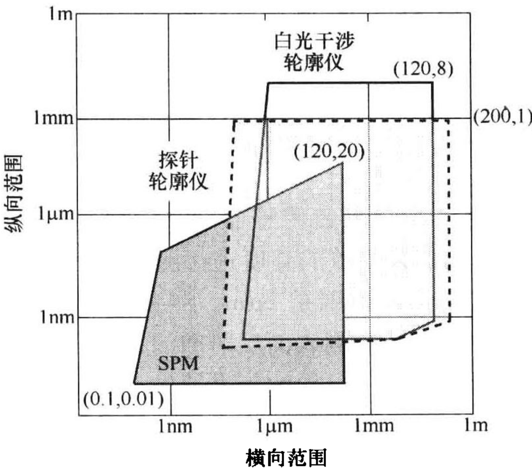


图 15.18　SPM、探针轮廓仪和白光干涉轮廓仪的测量范围

黑尔姆斯（Hellmuith，2003）对各领域的显微技术做了一个总结，包括光学显微镜技术、电子显微镜技术和扫描探针显微镜技术。探针轮廓仪与 AFM 在光学表面的测量中的比较可参见贝内特等人（Bennett et al.，1991）的相关工作。

15.3 光学轮廓仪

在构建目标物体的表面貌形时，常用的是不与测试表面接触的光学探针，而不是机械式探针。光学探针通过检测被测物体上的最佳聚焦位置来确定其形状。光学轮廓仪实现测量的方式是：在被测表面的一个点上感知焦点，通过调整聚焦透镜的高度直到焦点被找到为止。信号是在扫描焦点的过程中收集和处理的。镜头移动的数值可以反映测试点的表面高度。无论是通过光学探头的扫描或是移动被测表面，都能产生二维或三维的高度轮廓图。在感知焦点信号时，需要有特殊的硬件设备。利用不同的方法，如传统的显微镜或立体显微镜来产生表面轮廓图的方法，都是基于通过集中扫描目标物，以获得每个点的最佳焦点，然后对采集来的图像进行处理的过程。

光学轮廓仪感知的信号通常被误称为辐强度。帕默（Palmer）(Palmer，1993）对辐强度和辐照度作了详细的论述。辐强度代表从光源发出的辐射能量，单位是 W/Sr，而辐照度表示探测器接收到的信号，用 W/单位面积表示。使用辐照度这个术语来表示探测器探测到的辐射量。

15.3.1 光学聚焦传感器

布罗德曼和斯迈达（Brodman and Smilga，1987)、布瑞米勒和阿勒斯（Breitmeier and Ahlers，1987）提出了一种简单轮廓仪确定焦点的方法。当激光光源发出的一束光被聚焦到被测表面时，反射光在光轴上被棱镜分成两束。然后，用两个探测器分别检测这两束光的信号，并对其差值信号进行监控。当聚焦透镜太高时，反射光束会聚焦在探测器的前方，导致内侧探测器的信号变大；而聚焦镜头太低时，外侧探测器的信号会变大。信号差值情况可以决定测试表面在哪一面被聚焦，以及利用产生的误差信号调整聚焦透镜直至正确位置。当内侧探测器和外侧探测器的信号相等时，差值信号为零，聚焦镜头就处在正确的位置上。这两个探测器用来估计目标物体表面的倾斜变化，图 15.19 所示为带有光学聚焦传感器的轮廓仪结构示意图（Brodman and Smilga，1987)。由于在对样品的每个采样点进行采样时，需要对焦点进行调节以保证零差值信号，所以这种类型的轮廓仪需要花几分钟时间来生成被测面形的三维轮廓图。

被测表面焦斑的大小限制了光学聚焦传感器的横向分辨力，焦斑的直径通常在 1.0～1.5μm。在对被测表面上一个确定采样点的高度进行测试时，实际得到的高度是光斑大小范围内的平均高度。这意味着最小测试范围是 2μm。测量面积取决于采样间隔和采样点的数量。这类型轮廓仪的另一个限制是从被测表面反射回的光束必须能够到达传感器。如果被测表面有陡坡，光线将会被散射出轮廓仪，导致信号缺失，当只检测差值信号时将输出错误结果。这类轮廓仪的高度分辨力与聚焦范围和获得采样点的时间有关。当测量的高度范围很大时，为了保持采样每个数据所花的时间相等，聚焦镜头的移动会比较粗略。因为采用精确聚焦的方式会大大地增加测量时间。光学聚焦传感器的校准方式与探针式轮廓仪和 SPM 轮廓仪的校准方式类似。测量一个高度和粗糙度与被测表面大致相同的已知标准，然后确定一个

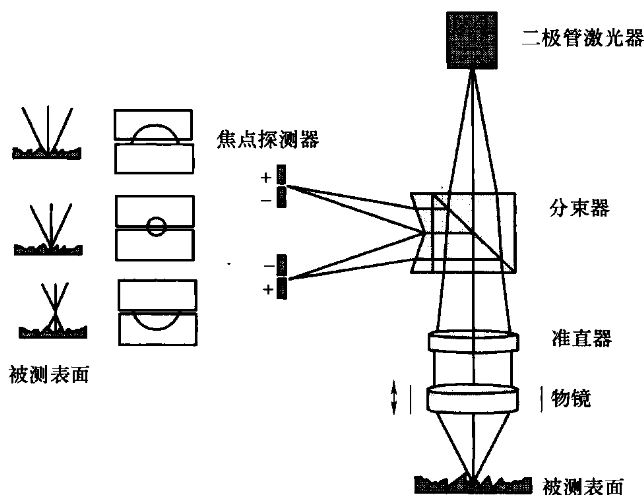


图 15.19 带有光学聚焦传感器的轮廓仪结构示意图

比例因子来应用到表面轮廓数据上。

从高密度存储到监视摄像系统，光学聚焦技术已应用于许多领域。不同的光学装置都可以用来测定焦点位置。散光透镜（Cohen et al.，1984）和双元菲涅耳微透镜（Shiono and Setsune，1989）是两个例子。一些用于 CD 播放器（Zhang and Cai，1997；Bartoli et al.，2001）的基于聚焦机制的轮廓技术也发展起来。两种常用的、基于聚焦原理的光学轮廓仪是共焦显微镜和白光干涉仪，这两种仪器将分别在 15.3.2 小节和 15.5 节进行介绍。

当显微镜扫描过焦点，并对采集到的图像进行后处理后（注意，不是对单独点进行处理），那些没有特殊硬件支撑的常规显微镜和立体显微镜也能够描述表面形貌。处理方法是数字解卷积和立体成像。

（1）常规图像数字解卷积 用常规显微镜通过扫描焦点记录下来的图像，是通过利用一个理论上的或者测量到的点扩散函数的解卷积得到的，也可以直接通过盲解卷积获得。此种方法已经用于医学上的 CT 和 MRI（核磁共振）扫描的三维图像重构。其他还有基于图像的局部锐化测量结果（Nahm et al.，1998）。这些方法可以很好地应用于具有明显横向特征的物体，但是难以分辨那些没有明显横向特征的光滑表面。

（2）立体成像 利用立体显微镜记录的图像，是通过识别两幅图像中的相同特征和测量特征点之间的距离来进行分析的。已知两个立体图像间的夹角，就可以确定测量对象上不同特征的相对轴向距离。与解卷积相同，这种方法在处理具有明显的横向特征的测量对象时很有效，但是针对表面光滑或者具有周期性结构的测量对象时则并不好用。立体成像方法只要是从两个不同的观察点出发来获取图像，无论大型物体还是小型测量对象都能够使用。

15.3.2 共焦显微镜

像许多干涉方法一样，随着图像处理软件、高功率激光器和计算机的发展，共焦显微镜也取得了很大的进展。早在 1961 年，明斯基（Minsky）的专利改进了生物显微镜，从而减少了系统的杂散光，提高了成像质量。然而，仅仅到了 20 世纪 80 年代中期，能够获得非倒像、三维生物样本数据的共焦显微镜就出现了。从此，共聚焦系统成为一种重要的测量工具，应用于细胞生物学、生理学、细胞遗传学、发生生物学（Pawley，1995；Gu，1996）

及检眼学等领域。20 世纪 90 年代末，双光子显微镜的引入（Diaspro，2002），使通过减少光损伤和提高组织渗透的方式来提高成像质量变为现实。近年来，共焦显微镜已经用于微系统和材料测量领域（Aguilar and Mendez，1995；Schneider et al.，1997；Smith et al.，2000；Tiziani et al.，2000）。

共焦显微镜系统本身不是标准的光学显微镜，因为它通过使用共焦孔径（针孔）确保了被测表面上只有在焦点处的光线才能够进入探测器。这样就消除了离焦和杂散光，从而具备高分辨力和高信噪比，这也是推荐使用共焦显微镜的主要优点。典型的共焦显微镜装置在被测对象焦平面的共轭面上放置了两个小孔，其中一个放在光源前面，另一个放在探测器前面，如图 15.20 所示。

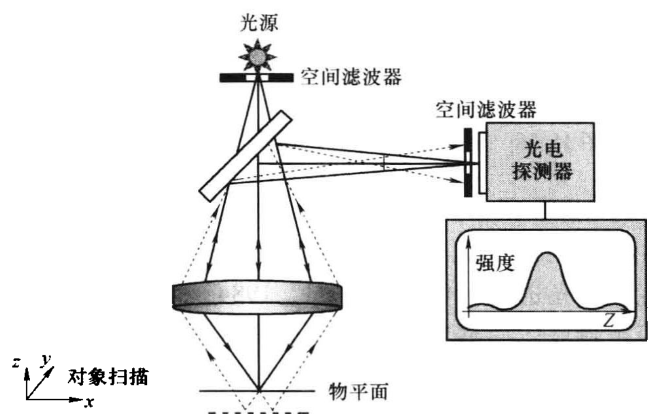


图 15.20 经过共焦孔径（针孔）消除离焦光线的反射共焦显微镜中的深度识别

在有些系统中，使用空间相干光源，也就是激光，就可以不用在光源处放置针孔。但是，这样的系统中散斑可能会成为一个问题。由于共焦显微镜是基于单点测量的原理，所以对光源和探测点的同步横向扫描是必要的。

1. 图像的生成

典型情况下照明和探测针孔沿 *X-Y* 方向栅状的逐点扫描，可以对给定焦平面上的样品生成一个二维辐射图像（单一光学断面）。要生成三维辐射图像（沿 *Z* 轴的多重光学断面）样品或者物镜或探测器就必须进行垂直扫描，这样样品表面的每个采样点才能穿过显微镜的焦平面。

样品上每一个通过了显微镜焦平面的点将被采集到一个辐射（共焦）信号，也称为轴向点扩散函数（PSF），其会随着与焦平面间距离的增加而下降。对于一个没有像差、$NA<0.5$ 的物镜而言，针对一个点物，其轴向点扩散函数的宽度，可以简单地表示为（Corle et al.，1986；Kino et al.，1988；Ho and Shao，1991；Corle and Kino，1996）。

$$FWHM=\frac{0.9\lambda}{NA^2} \tag{15.2}$$

轴向 PSF 的宽度由物镜的数值孔径（*NA*）和波长决定。实际情况下，轴向响应的宽度也由测量对象的倾斜度和形状决定，也就是无论测量对象是一个点还是板状物，空间滤波器的宽度和探测器的尺寸都会影响轴向响应。谢泼德（Sheppard，2003）对共焦成像系统进行了评述。

通过垂直扫描，从被测对象上一个采样点获得的信号可以进行最大辐射估计，最大辐射

对应于焦点处的像点。这样，用于表面轮廓检测的共聚焦系统的工作方式相当于一个在待测表面上进行扫描的焦点探测系统。在一些情况下，比如使用信号的重心或者用多项式拟合取代简单的最大辐射位置来确定信号的位置，信号轴向点扩散函数的位置通常可以确定下来。轴向点扩散函数的宽度和样品等级也会对确定信号位置的一致性产生影响，进而影响到垂直分辨力。轴向信号越窄，垂直分辨力就越好，这是因为最佳垂直分辨力依赖于物镜的 *NA* 及放大率。表面轮廓的垂直分辨力通常定义为差值测量的 RMS 值。垂直分辨力还决定了被测样品上能够测量到的最小高度。对于光滑表面而言，垂直分辨力在几个纳米量级，但只针对高倍率物镜。对于低放大倍率的物镜，垂直分辨力大概在 10 ~ 15nm 至微米量级。这种垂直分辨力通常也称为方法灵敏度。

共焦显微镜通常用来测量透明膜层的厚度，其处理方法称为光学限幅。光线透过物体，在膜层界面发生反射，从而产生额外的轴向响应。共焦显微系统的光学限幅技术常常用来对诸如生物细胞、半导体工业中的透明涂层进行测量。在这些情况下，垂直分辨力也有了不同的定义，其定义要适用于可测量的光学厚度（Sheppard and Gu，1992；Sheppard et al.，1994）。轴向垂直分辨力的定义基于信号的垂直两点的分辨力，而轴向信号的宽度又决定了这个分辨力，这种情况下，轴向垂直分辨力也就是最小可测量的光学厚度。对于大 *NA* 的物镜，光学限幅的垂直分辨力可达到 1.5μm，这比与测量台阶高度相关的垂直分辨力要大得多。图 15.21 所示为透明膜层的轴向响应。

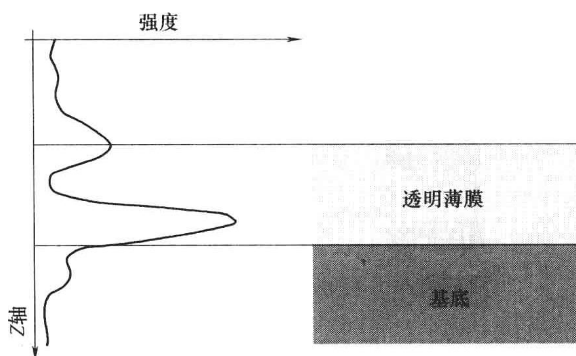


图 15.21　共焦显微镜中透明膜层的轴向响应
（界面对应的峰值位置取决于材料的折射率，比界面位置的深度要浅，这将降低测量更薄的膜层的能力。轴向响应的宽度由膜层引起的轴向像差和球差决定。峰值幅度取决于界面两侧折射率的比值、膜层的厚度和色散。）

为了提高垂直分辨力，科学家们已经作了很多研究，主要是在光瞳处应用一个环形滤波器来压缩两个方向的 PSF 宽度，相当于用有限尺寸的探测器进行记录（Sheppard and Gu，1991；Martinez-Corral et al.，1995）。为了增强光学断层能力，有的方法还应用了点源和点的对称离焦（Sheppard and Hamilton，1984；Ho and Shao，1991；Kimura and Wilson，1993）。轴向切趾法和破坏性干扰切趾器也用来提高垂直分辨力，它可以提供焦点上零辐射的轴向响应（Martinez-Corral et al.，1998）。有人还建议使用相位共轭镜来提高垂直分辨力（Uhlendorf et al.，1999）。但是，提高分辨力的实用方法仍然有待发展。

2. 共聚焦系统改进

多年来，人们提出了许多提高数据获取速度的方法，大多数采用改变共焦孔径的方法。

1967 年，艾格尔（Egger）和彼得兰（Petran）及后来的（Petran et al.，1968；Xiao et al.，1988）提出了用一个转盘上的针孔阵列形成很多亮斑，然后同步辐照到样品上的方法。保罗·尼普科夫（Paul Nipkow）于 1984 年发明的尼普科夫（Nipkow）盘，能通过在扩展光源前旋转的有多针孔径的一个盘来生成图像。具有匹配针孔阵列的另一个盘置于探测器前面。不过，这个方法存在重大的缺陷，即它会减少了每个采样点的光通量。

1996 年，里奇哈拉（Lchihara）等人表示系统中的光通量可以增大 10 倍，通过在照明光束前面的针孔盘前再放置一个微透镜盘。针孔可能会有很多不同的式样，而且一个盘上大概有两万多个针孔，通过其中 1000 个针孔同时照射测试对象。使用这种方法，测量速度可达到 1 帧/ms（Tanaami et al.，2002）。2000 年，提兹安林等人（Tiziani et al.，2000）提出了简化系统，使用微透镜代替尼普科夫盘上的针孔，但是该系统横向分辨力比较低。该系统结构如图 15.22 所示。

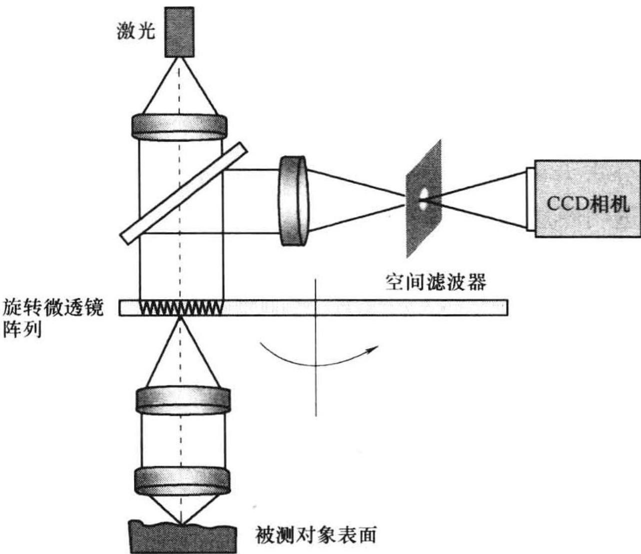


图 15.22　Nipkow 盘上置有微透镜阵列的共焦显微镜

有些系统使用扫描狭缝（Wilson，1990）代替了针孔。一个狭缝可以替代针孔阵列。在狭缝扫描系统中，沿着狭缝的方向要设置多个探测器，只需要在与狭缝正交的方向上进行横置多个探测器，这样增加了图像采集的速度（Neil et al.，1997）。但是，相比单点扫描系统，狭缝扫描的轴向响应的宽度要宽一些，在物镜数值孔径给定的情况下垂直分辨力要低。

然而，另一种加快测量速度的方法是同时投影一个等周期的多缝或栅格图案。对于这种投影图案，离焦的轴向信号的宽度不仅由物镜的数值孔径决定，还取决于成像图案的空间频率。这种方法的问题主要是在图像中残留不必要的栅格图案。如果以用同步于相机帧速率的简单锯齿波形方式来移动投影图形，那么连续的三幅相机图像就相当于栅格投影像位置上三分之一个周期的空间移动。由于栅格存在周期性，故格栅图案的像可以在傅里叶频域下进行处理。

第一个栅格图形投影的系统是将图形刻在玻璃板上，并用 PZT 移动器进行横向移动。用一个数字微镜阵列（德州仪器公司制造）反射照明光束然后构造出一个栅格图形案（Hanley et al.，2000），或者，用一块铁电液晶（FLC）将一束偏振照明光束（Smith et al.，

2000）反射到样品表面，构造出栅格图案。每个系统设置都必须要保证微显示器线和 CCD 像素行之间的匹配。图形的横向扫描是通过在微显示器上显示一连串的图形来实现的，并不使用 PZT。

如果共焦轮廓仪要求很好的垂直分辨力，就必须用到高数值孔径的物镜。但是高数值孔径物镜的缺点是视场小。提兹安林和乌德（Tiziani and Uhde，1994）提出用微透镜阵列来取代物镜，如图 15.23 所示。这个阵列能够实现大视场的检测，当每一个独立的微观透镜保持较大的 *NA* 时，视场由阵列的大小决定。单个透镜的焦距可以进行调节来适应被测对象的形状，减少扫描范围和加快测量速度（Tiziani et al.，2000）。用微镜头代替物镜的系统与典型的共焦显微镜有一点不同，因为光被微透镜焦平面上的每一个物点反射，然后通过透镜聚焦在一个针孔上，该针孔相当于一个空间滤波器。微透镜的光瞳将在相机上成像，而不是像典型的共焦装置的像点。对于这个系统，当物镜 *NA* 等于 0.3 时，垂直分辨力能达到 50nm。

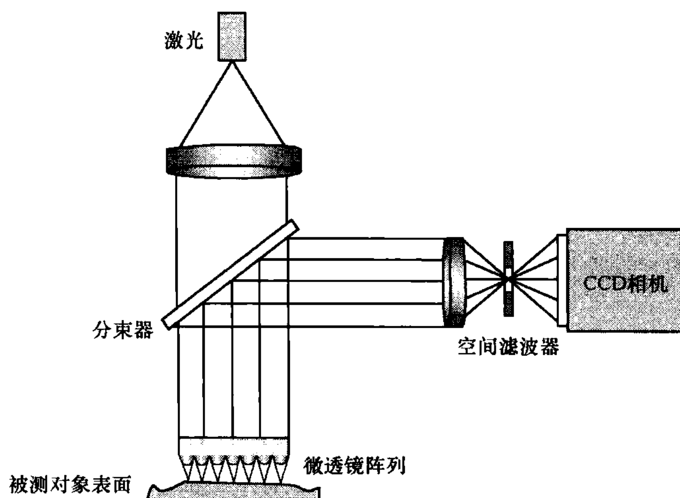


图 15.23　用微透镜阵列替代物镜的宽视场共焦显微镜

3. 彩色共焦显微镜

彩色共焦显微镜是为了满足共焦系统通过垂直扫描来确定相对物体高度的位置这一需求发展起来的。其相对于纵向扫描强的优点在于彩色共焦显微镜采用了一个有纵向色差的物镜，不同的波长通过这种物镜具有不同的焦点位置。这个想法最初是由莫莱斯宁于 1984 年提出的（Molesini et al.，1984），然后在 1992 年由布朗（Browne）等人引入到共焦显微镜中，后来还有一些后续研究（Tiziani and Uhde，1994；Dobson et al.，1997；Cha et al.，2000；Lin et al.，1998；Ruprecht et al.，2004）。只有满足焦点位置与物体位置重合的波长才能反射回系统。因此，这类系统也称为波长-深度的编码装置。这里用光谱仪代替 CCD 相机来探测波长值。通过测量功率谱来对焦点位置进行及时测量，取代了所有的扫描机制，从而加快了测量速度。图 15.24 为彩色共焦显微镜的示意图。

这些系统通常使用频谱较宽的（也就是白光）光源和光谱仪，但是有些系统采用波长可调光源和 CCD 相机（Metha et al.，2002），或白光光源和彩色 CCD 相机（Tiziani et al.，2000）。测量得到最大功率对应的波长反映了被测对象的深度。这种技术的缺点是可测的最大深度取决于镜头的色差和光源频谱。在共焦系统中使用衍射透镜（Dobson et al.，1997）可以提供更强的纵向色散，这和材料无关，同时与使用反射透镜形成对比，它可以进行解析

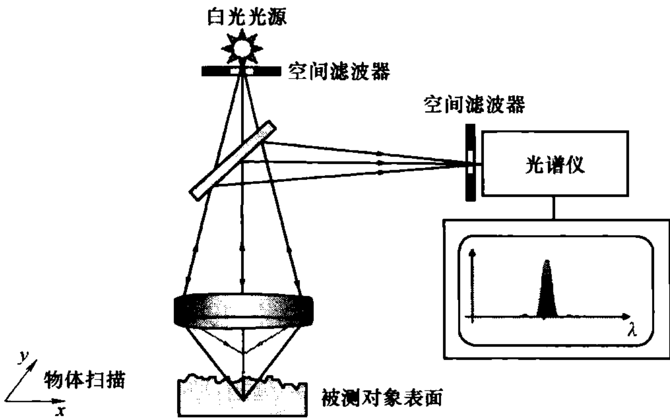


图 15.24 彩色共焦显微镜的示意图

分析。对于给定的波长 λ，衍射透镜的焦距遵从线性色散

$$f(\lambda) \approx 2f(\lambda_d) - f(\lambda_d)/\lambda_d \tag{15.3}$$

限制条件是 $\lambda - \lambda_d$ 远小于设计波长 λ_d。对于小 NA 情况，焦距在 2～3mm 范围内，对于大 NA（如 $NA=0.75$）情况，能达到 10μm 量级。斯（Shi，2004）提出使用具有高空间相干性和极宽频谱的超连续光光源，这有助于扩宽测量深度范围及消除散斑噪声。超连续光可能是解决共焦系统的光效率问题的一种方法。使用扩展探测针孔也可能提高光效率（Ruprecht，2004）。

与传统共焦系统相似，为了避免移动样品或物镜实现横向机械扫描，狭缝（Lin et al.，1998）、微透镜阵列（或者是衍射元件）(Tiziani et al.，2000）都可以使用。像数字微镜器件（DMD）(Cha et al.，2000）那样的动态微镜器件，液晶显示器也可以应用，这些都可以用做扫描点源（图形）和探测针孔。

15.4 干涉光学轮廓仪

干涉型光学轮廓仪在标准显微镜上使用内置干涉仪的物镜取代了标准物镜。通过分析这些物镜获得的干涉信号，可以获得检测对象的定量数据。干涉光学轮廓仪通常通过记录很多帧数据，来估算每一个探测点上的表面高度。在测量过程中，干涉信号会随测量光束与参考光束的光路变化而变化，用压电传感器或电动扫描来驱动物镜使其相对测试表面发生运动得到相移或者垂直扫描技术可以实现这种变化。一些利用光源光谱特性的方法可以避免机械扫描、如波长扫描、波长分散等。这些方法的细节与被检测对象的类型有关。

四种比较典型的干涉物镜装置是以迈克尔逊（Michelson)、米劳（Mirau)、林尼克（Llinnik)、菲佐（Fizeau）干涉仪为基础的。这些干涉物镜结构如图 15.25 所示。在为某一特定测量确定合适的物镜时，要考虑到很多因素。这些因素包括放大倍数、更精确的数值孔径用以分辨样本特征、测量样本上的斜率和高度。同时，需要选择能够测量样本上完整有用区域的放大率。本节首先介绍各种的干涉物镜，然后深入分析不同物镜装置的特性，以便在特定的应用中选择最佳装置。

干涉物镜的设计受到系统的机械限制。四种典型物镜的区别在于光束被分成参考光束和测量光束的方式。其中，除了菲佐物镜外，参考镜都被放置在物镜的最佳聚焦点上，以便当

样本被放置在焦点上时能够获得最佳条纹对比度。为了得到最佳聚焦位置，必须首先把测量对象放置在焦点上，然后移动参考镜直到获得最佳条纹对比度的位置，这个位置就相当于最佳聚焦位置。最佳条纹对比度正好对应着干涉仪内两个臂上物体的位置与参考镜之间的光程差（OPD）为零。

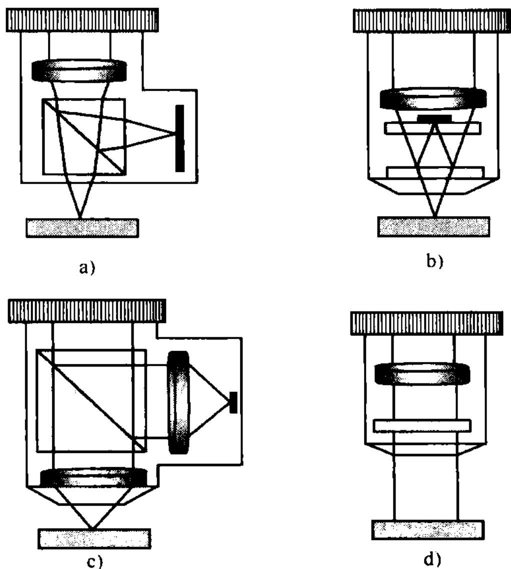


图 15.25　干涉物镜结构

a）迈克耳逊干涉仪　b）米劳干涉仪　c）林尼克干涉仪　d）菲佐干涉仪

迈克耳逊干涉仪如图 15.25a 所示，由一个物镜、一个分光镜和一个独立的参考平面组成。为了能够在物镜和测试表面之间放入分束器，显微镜物镜必须有一个足够长的工作距离。正因如此，迈克耳逊干涉仪只能与放大倍数低、数值孔径小且工作距离长的物镜一起使用。

米劳干涉仪如图 15.25b 所示，在物镜和被测表面中间有两个小玻璃板。一个板上有一个小的反射点用作参考面，另一个在其一侧镀膜作为分束镜。包含反射点的小玻璃板还可以作为一个补偿板。这种干涉仪结构是在物镜的放大率中等、没有足够的空间插入分束棱镜来构成迈克耳逊干涉仪时采用。米劳干涉仪对于放大倍数低于 10 倍的物镜来说并不实用，因为在低放大倍数时参考点过分遮挡了孔径。参考点必须要大于物镜的视场，因为它是一个与被测对象最佳焦平面共轭的面。当放大倍数在 50 倍左右时，物镜的工作距离就会太短而不能在其下方放置分束器或者平板。

林尼克干涉仪如图 15.25c 所示，通过两个相同的明场物镜，可以用任意放大倍率的物镜来装配干涉仪。尽管如此，这类干涉仪调整起来也很困难，所以其商业用途有限。林尼克干涉仪通常与一个具有高放大倍数、短工作距离的物镜一起配套使用。一个林尼克干涉仪由一个分束器、两个相匹配的显微镜物镜和一个参考镜组成。整个参考臂提供合适的路径长度以便获得干涉条纹。为了获得最大条纹对比度和最小波前畸变，两个物镜必须与分束镜相匹配。

以上讨论的三种物镜都是通过迈克耳逊干涉仪演变而来的，都属于等光程干涉仪。

菲佐干涉仪如图 15.25d 所示，是一种非等光程干涉仪，它需要一个相干长度很长的光源，这种装置能很好地用于单色光源或光谱相干测量，不适用于白光干涉测量。由物镜提供

一束准直光束到测试表面同时对其成像。当使用长相干长度光源时，干涉条纹会在一个很深的视场内才被观察到，因此主要集中关注测试表面。在分析条纹时，必须找出那些由菲佐腔产生的假条纹。菲佐物镜的放大倍数范围很大，但是，在物镜和测试平面之间必须要有足够的空间用来放置参考平面。

除菲佐干涉仪之外的所有干涉仪，都会有一个光锥入射到测试表面，而且除了菲佐物镜外，其余都可以通过校正获得白光条纹。

依据被测对象类型的不同，要选取不同的照明方案。在单色光照明下基于相位探测的典型仪器可用于测量光学光滑表面。对于单色条纹的分析将在相移干涉测量那一章探讨。对于间断点多、粗糙程度高、高度大的测量对象要采用交替的照明方案和条纹分析。本章主要探讨单色照明系统下扩展测量范围的技术，不过首先我们要描述一下干涉物镜的性质和给定物镜条件下可测样本的属性。

（1）干涉物镜与测量对象参数的匹配 在使用光学轮廓仪时，要为某一特定测量选择干涉物镜，首先需要确定样本的一些参数，并对其特性进行分解。要确定最小横向特征、最大高度范围、测量的最大斜率及将要测量的区域。物镜（加上中间的光学元件）的放大倍数和 CCD 的尺寸决定了可测量区域的大小，物镜的 NA 和照明类型决定了测量对象的哪些特征可以被测到。下面讨论的一些物镜特性也适用于共焦轮廓仪中使用的物镜。

（2）横向分辨力 为了确定样本的哪些横向特征可以分辨，首先要知道系统的横向分辨力。基于显微镜系统的横向分辨力主要取决于显微镜物镜的光学分辨力。只有在使用低放大倍数物镜的系统中，才会受限于探测器的采样。光学分辨率依赖于波长和显微镜物镜的数值孔径。斯帕罗（Sparrow）和瑞利（Rayleigh）分别给出准则，二者有细微差别（Born and Wolf，1999）。

$$\text{斯帕罗光学分辨力准则} = 0.5\lambda/NA \tag{15.4}$$

$$\text{瑞利光学分辨力准则} = 0.6\lambda/NA \tag{15.5}$$

这两个准则都用于非相干系统对作为物的两个辐射点的成像，都是很好的经验法则。但是，一个显微镜（至多）算一个部分相干系统且测量对象也可能有不同的形式。改进准则确实要考虑系统的相干状况和测试样本的类型，在实际中，斯帕罗准则对光学显微镜而言是一个比较好的近似。值得记住的是为了对两个点组成的图像进行分辨，CCD 记录一幅图像至少需要三个像素。一个典型干涉显微镜的光学分辨力和横向采样如表 15.2 所示。

表 15.2 物镜特性（设波长为 600nm，斯帕罗准则计算光学分辨力，相机采样间距 6.8μm，相机任一方向像素数为 1024）

干涉仪类型	迈克耳逊干涉仪		米劳干涉仪		林尼克干涉仪	
放大倍数 ×	2.5	5	10	20	50	100
数值孔径	0.075	0.13	0.3	0.4	0.55	0.9
光学分辨力/μm	4.00	2.31	1.00	0.75	0.55	0.33
场深/μm	106	35	6	3.5	1.6	0.35
横向采样间距/μm	2.72	1.36	0.68	0.34	0.17	0.068
视场范围/μm	2785	1393	696	348	174	70

（3）可测高度范围 一个测试表面只有条纹在其表面上显现时才能被测量。如果测量对象实际处在一个焦点位置上，当使用单色、多波长或者光谱技术时，条纹在测量对象的整

个高度范围都是可见的。测试表面的这个高度范围必须在干涉物镜的场深之内。进一步讲，当照明光源有一定的波长带宽 $\Delta\lambda$ 时，测试表面也必须在光源的相干长度之内。

物镜的场深取决于其数值孔径和照明波长，其定义是（Benford，1966）

$$\text{物镜场深} = \lambda \frac{\sqrt{1-(NA)^2}}{(NA)^2} \tag{15.6}$$

光源的相干长度（近似值）可由光源的中心波长 λ 和其带宽 $\Delta\lambda$ 确定

$$\text{光源相干长度} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{15.7}$$

被测对象的可测量高度取决于这两个值中较小的一个，也就是光源的相干长度和干涉物镜的场深。其他一些与使用的测量方式相关的标准可能会进一步限制可测高度范围。

对于一些像共焦或者白光干涉轮廓仪那样利用焦斑对测量对象进行扫描的方法，其可测高度范围还受限于扫描范围和物镜的工作距离。

（4）可测斜率 样本的最大可测斜率同样取决于物镜的数值孔径。如果光从一个大倾斜度样本上反射，就不能由物镜汇聚，这个斜率就不可测。一个共同的假设认为在能够生成足够稳定的条纹时，最大倾斜度不超过 $0.75NA$，才能有足够的光返回以供测量。对于一些表面粗糙的大倾斜表面，由于散射表面使得一些光线能够传回物镜，因此也可以测量。

表15.2给出了在光源波长为600nm时利用斯帕罗准则估算的光学分辨力和物平面上单一像的深度（相干长度和场深中较小的一个）、测试表面上的横向采样间隔及测试表面的视场。概括地说，数值孔径较小的物镜可以测量高度变化较大且视场较大的样品，但是不可以测量倾斜度较高、横向特征细微的样本。为了获得需要的测量结果，需要更好地了解被测对象的特征，而不是物镜和测量技术的性能。

（5）干涉条纹 所有干涉物镜产生的干涉图形都能够用CCD观察到。现在认为干涉信号可以用一个点（x，y）来进行记录，不过，为了简化，在所有公式中这些坐标都将被省略掉。对于轴上一个单波长点光源（空间和时间上都相干的光源），单一的光束入射角，干涉信号可以由下面的一般表达式描述

$$I(k,z,\theta) = I_R(k) + I_O(k) + 2\sqrt{I_R(k)I_O(k)}\cos(2k(h-z)\cos(\theta) + \phi(k)) \tag{5.8}$$

式中，$k=2\pi/\lambda$，是波长为 λ 的光源的波数。I_R 和 I_O 分别是检测到的参考镜和被测对象的反射光辐照度。I_R 和 I_O 取决于被测对象和参考镜的反射率、光学系统的透过率、相机的灵敏度及光源的光谱。

（6）相位差 根据式（15.8），干涉光束的相位差可以描述为一个余弦形式的光学相位，如式（15.9）所示

$$\varphi = 2k(h-z)\cos\theta + \phi(k) \tag{15.9}$$

式中，$h-z$ 为测量对象上的一个点和与之对应的参考镜上的点之间的几何路径差，h 是测量对象的高度，$\cos\theta$ 为到达测量对象光束入射角的方向余弦。剩下的相位项 $\phi(k)$ 是测量对象材料反射产生的相位变化，该相位项也应该包括由散斑产生的统计相位和仪器散射导致的相位偏移，这些通常被假设为零。

当 $h-z=0$ 时，测量光束和参考光束传输所经过的光程相同。因此，这个点上两个光束之间光程差为零（$OPD=0$）。典型的物镜放置是要让零光程差位置正好对应着测量对象和参考镜位于焦点上。

一般说来，每个点的条纹所表示的光程差随两个参数变化，即几何路径差 $h-z$ 和波

数 k。这两个参数可以用于控制 OPD 的变化，而且还是区分产生和分析条纹的不同方式的关键变量，即相移、白光、波长扫描、光谱分辨白光。其他改变 OPD 的方法都基于改变方向余弦（Duan et al.，2006）和光路上的折射率（Zelenka and Varner，1969），这里不进行讨论。

（7）**条纹可见度** 根据式（15.8）可知，由每一个探测器像素观察到的干涉条纹可以简单地描述为

$$I = I'(1 + \gamma\cos(\varphi)) \tag{15.10}$$

式中，I'为直流辐照度；γ 为条纹可见度（也叫调制、对比或者振幅）。较佳的条纹可见度是测量所需的。为了获得好的条纹可见度，需要辐照度 I_R 和 I_O 尽可能相等（见式(15.8)）。正因如此，物镜应该配有多种反射率的参考镜，以便与测试样本的反射率相匹配。实际的条纹可见度是一个相当复杂的函数，它随着光程差的增大而减小，而且受光源时间相干和空间相干的影响（Born and Wolf，1999；Hariharan，2005），也就是受光源的波长带宽和尺寸的影响。光源的表面尺寸又取决于物镜的数值孔径。于是，条纹可见度可能随测量对象的高度变化范围不同而不同，该条纹可见度也就决定了最大可测范围。

（8）**物镜数值孔径对条纹的影响** 物镜的数值孔径除了影响可测高度范围外，观察到条纹的波长也与源波长有细微差异。对于高 NA 的物镜，光线入射到测量对象上的入射角范围会对干涉信号有影响。于是，需要针对光源的中心波长（中心波数 k_c）引入一个修正因子，以便得到精确的高度信息（Bruce and Thornton，1956；Gates，1956；Tolomon，1956；Ingelstam，1960；Biegen and Smythe，1988；Creath，1989；Schulz and Elssner，1991；Sheppard and Larkin，1995；Dubois et al.，2000；Wan et al.，2004）。而对于低 NA 的物镜，比如 $NA=0.1$，波长的修正因子约为 1.0025，是可以忽略的，如果物镜 $NA=0.5$，修正因子上升到 1.07；$NA=0.9$ 时，修正因子就会大于 1.3。由于这些干涉显微镜系统要比模型复杂，大多数修正是通过一个已知台阶高度的标准来校准和修正比例系数。

（9）**单一波长干涉光学轮廓仪的局限性** 首先，用于对测量对象形状进行全场测量的干涉光学轮廓仪是基于单波长相移干涉测量（PSI）的（详见相移干涉测量一章内容）。这类轮廓仪在实用中具有低噪声，对光学光滑表面的测量能够达到埃（10^{-10}m）量级的高精度，虽然这些是所搜集的一小部分数据资料的结果。尽管如此，PSI 技术还是有其局限性，它只能用于测量光滑（光学粗糙程度大约 $\lambda/30$）且高度间断少于 $\lambda/4$ 的对象。在 PSI 测量过程中，通过 PZT 移动参考镜或者被测对象来实现相移，每步相移量只有四分之一个条纹(90°或者 $\pi/2$)。有很多成熟的算法都可以用来分析测量对象上每个点的干涉信号。为了很好地补偿 PZT 的非线性运动，使用的算法应用了八帧数据（Schmit and Creath，1996）来估算所测量区域内两束光之间的相差

$$\varphi = \arctan\left(\frac{5I_2 - 15I_4 + 11I_6 - 2I_8}{I_1 - 11I_3 + 15I_5 - 5I_7}\right) \tag{15.11}$$

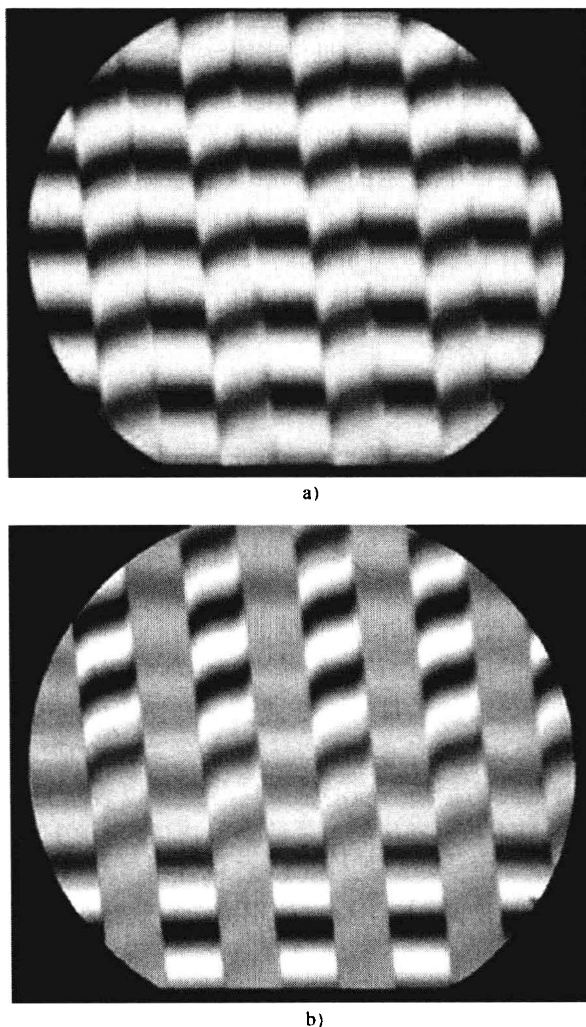
其中，辐照度 I_1、I_2、…、I_8 是从连续的图像数据中抽选的单个点。

因为 PSI 算法中使用了反正切函数（确切地说是 arctan2(N, D)），所以它只能测定模在 2π 之内的相位，这意味着，只有少量的条纹级次是可测的（少量的干涉量），相应的条纹级次能够在空间解包程序中指定。空间解包程序假定条纹级次不能在点与点之间有超过半个级次的改变（相位上不能超过 π）。展开相位必须经过一个简单的关系实现弧度单位向高度单位的转换。对于被测对象，垂直入射反射角 2π 相当于 $\lambda/2$。

$$h = \frac{\lambda}{2} \times \frac{\varphi}{2\pi} \tag{15.12}$$

因此，如果测量对象的高度锐变大于 $\lambda/4$，那么条纹级次就不能正确指定，对象就不能够被精确地测量。这称为 2π 模糊问题。

图 15.26a 所示为为了制作一个反射型二元光栅而由单色光照明形成的干涉条纹。可以看到，在这幅图中，光栅间断点两侧的相关条纹级次不可能确定。图 15.26b 显示了针对同一对象利用白光照明获得的干涉条纹。从这幅图中，可以看出光栅间断点两侧的零级条纹很容易确定，解决了 2π 模糊问题。



a)

b)

图 15.26　三维二元光栅的干涉条纹
a）准单色照明　b）白光照明

接下来将讨论解决 2π 模糊问题的干涉测量方法。这类方法可用于测量阶跃在几个毫米左右的光滑和粗糙的对象。有时，光滑且无间断的对象甚至不能被精确测量，同样在测量对象的斜率太大，使得连续点之间的高度差大于 $\lambda/4$ 时也无法测量，因为这会导致条纹的采样范围小于 4 个像素。过大的倾斜度还可能导致探测器无法接收到信号。

15.5 双波长和多波长技术

如上所述，在对具有高斜率的对象进行检测时单波长干涉检测很难得到精确的结果。这种困难是因为条纹太密集导致探测器无法分辨而产生的。双波长技术给出了一种拓展单波长干涉能力的方法，它的条纹是通过较长的合成波长来形成的，相当于是使用长波光源（即红外光源）来形成条纹。在第 12 章的图 12.56 给出了使用单个短波长时获取的空间上无法分辨的条纹（图 a）及使用不同合成（有效）波长（图 b ~ 图 e）情形下的条纹。对合成波长形成的条纹进行分析要强于分析构成合成波长的两个独立波长所形成的条纹。单个合成波长是同时使用两个短可见波长形成的，而且这种情形下得到的干涉图样与使用单波长长波光源所得到的图形是一致的。这项技术能够清晰和精确地对很大范围的表面进行测量，而且不需要使用昂贵的长波光源和探测器。这些所观察到的长有效波段形成的条纹主要是在 16 章中介绍的莫尔条纹。在过去的 110 年里，很多作者都对双波长或是多波长干涉测量技术进行了介绍（Hildebrand and Haines，1967；Heflinger and Wuerker，1969；Wyant，1971；Polhemus，1973；Benoit，1898）。有效长波长条纹通常会在利用双波长全息进行非球面测量中使用（Wyant，1971），也能用于粗糙表面的测量。

15.5.1 双波长相位测量

只要每一个波段产生的条纹能被探测系统探测到，利用了相移技术后就可以使用两个测量波长（Cheng and Wyan，1984；Wyant et al.，1984；Creath et al.，1985；Fercher et al.，1985；Creath and Wyant，1986a；Creath and Wyant，1986b；Wyant and Creath，1989）。这些技术用来测量那些不连续高度达 $\lambda/4$ 的物体，λ 是两个波长中的任意一个。通过使用第二波段所提供的信息，测量的高度范围能够得到明显的增加。

双波长相位测量首先通过对一个波长进行适当的相移来获取数据，计算出第一个波长的 2π 相位模余数。然后改变入射波长，对第二个波长进行适当的相移后提取数据，随后计算第二个波长的 2π 相位模余数。这两个模余数测量值能够被组合成一个对应于长合成波长的 2π 相位模余数，即两个测量波的拍频。新的合成波相位可以表示为

$$\varphi_e = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi OPD\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}\right) = \frac{2\pi OPD}{\lambda_e} \tag{15.13}$$

其中，φ_1 和 φ_2 是对应波长 λ_1 和 $\lambda_2(\lambda_2 > \lambda_1)$ 的相位，有效波长可以表示为

$$\lambda_e = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{15.14}$$

一旦有效波长形成的少量条纹被确定，其分数阶就可以利用与单波长技术相同的空间相位解包程序来确定。新的条纹级数对应有效波长，而且能够完成针对大高度间断的正确测量。图 15.27 所示为双波长干涉中的有效波长原理示意图。

计算有效波长相位还有一种变通的方法，就是提取两个波长的所有帧数据来计算单个波长间的相位差，以此来取代先计算每个波长的相位，然后做差的方法。用这种方法可以直接利用辐照数据计算出有效波长相位。计算公式可以写为

$$\phi_e = \arctan\left[\frac{\sin(\phi_1 - \phi_2)}{\cos(\phi_1 - \phi_2)}\right] = \arctan\left[\frac{\sin\phi_1\cos\phi_2 - \cos\phi_1\sin\phi_2}{\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2}\right] \tag{15.15}$$

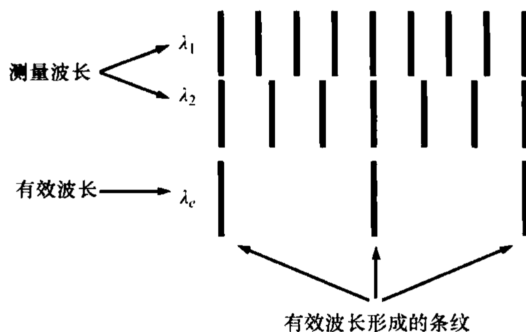


图 15.27　双波长干涉中的有效波长原理示意图

通常任何一种相移算法都可以用在双波长干涉技术中。如果将一个相移算法中的分子写为 N，分母写为 D，那相位就可以表示为

$$\phi_i = \arctan \frac{\sin\phi_i}{\cos\phi_i} = \arctan \frac{N_i}{D_i} \tag{15.16}$$

这样有效波长相位可以由式（15.17）计算得到

$$\phi_e = \arctan \frac{\sin(\phi_1 - \phi_2)}{\cos(\phi_1 - \phi_2)} = \arctan \frac{N_1 D_1 - D_1 N_2}{D_1 D_2 + N_1 N_2} \tag{15.17}$$

通常要求每一帧数据之间的相移量通常要求是90°。当使用 PZT 移相器时，为了对每一个波长形成90°的相移，PZT 需要针对每一个使用的波长移动不同的距离。然而，如果使用偏振干涉仪，那么对于选定的波长使用消色差移相器（Hariharan，1996）来提供90°相移（参见15.9.2节内容）。当系统使用的 PZT 移相器仅针对了一个波长进行校准，此时，帧与帧之间的相移不是90°，这样相位的计算可以基于最小二乘法来进行（Kim et al.，1997）。在相位计算中一个更好的解决方法是采用一种对未校准大相移不敏感的算法（Carré，1996；Schmit and Havihoran，2006）。这种相移也能由激光二极管的频率变换来产生（Ishii and Onodera，1991）。

第12章中的表12.6列出了利用氩离子和氦氖激光的不同波长获得的 λ_e 的值。使用染料激光器能够在很大范围内获得等效波长（Schmidt and Fercher，1971）。可调谐氦氖激光器还可产生从绿到红之间的4～5种不同波长（Wyant，1971）。在需要考虑波长稳定性的情况下，紧凑的可调谐激光二极管能够产生一系列不同波长（de Groot and Kishner，1991）。在干涉显微镜中使用的是一个配有典型的基于不同激光线的窄带空间滤波器（Creath，1986）的白光光源。

德·格如特（de Groot，1994）指出，如果已知单一或者有效波长的局部相位，那么双波长干涉的动态范围没必要由有效波长来限制；相反，通过解析处理，波长能够扩展到有效波长的数倍，倍数 N 等于

$$N = \left| \operatorname{int}\left[\frac{1}{\lambda_e/\lambda_1 - \operatorname{int}(\lambda_e/\lambda_1)} \right] \right| \tag{15.18}$$

例如，当绿色和红色频谱发射且红光波长为644nm时，有效波长等于2.42μm，但利用计算得到的放大倍数，有效波长能够扩大到10μm。然而，这项技术受限于计算时间过长以及测量噪声。关于测量噪声，下一部分将会描述一种改进方法，它使用第二个波长测量来对单波长测量进行修正。

单波长测量的修正。双波长测量噪声与使用的波长是成比例的。例如，如果在 $\lambda=0.5\mu m$ 处测量噪声的均方根为 $0.01\mu m$，那么在有效波长 $\lambda_e=5\mu m$ 处均方根噪声为 $0.1\mu m$。双波长测量可以用来修正单波长测量存在的 2π 相位模糊，从而提供一个可见波长精度和大高度范围的测量（Creath，1986）。这一精度的获得是通过将一个可调整比例的长有效波长相位与单个波长相位之间进行比较而得到的。加在单一波长数据上的 2π 数量是根据可调比例有效相位上的高度变化来确定的。这种修正对相对平滑数据很有效。如果在单一波长相邻两个像素间，可调比例的有效相位的噪声大于 $\pm\lambda/4$，那么在修正数据中就会存在不希望有的 2π 跳变。

15.5.2 多波长相位测量

为了对单波长数据进行修正，可以将双波长技术扩展到多波长（Cheng and Wyant，1985；Dandliker et al.，1992；de Groot，1991；Decker et al.，2003；Towers et al.，2003）。确定若干波长以生成一系列的有效波长，这些有效波长按比例从单波长到检测被测对象需要的波长间隔开来。要得到理想的测量最根本的原则是要保证长波波长和被修正的波长之间的比例系数保持在 5～10 之间，而且这个比例系数受到测量中相位噪声的程度的限制。为了得到低相位噪声，比例系数可以大一些，而且需要减少波长的数量，从而能够涵盖从最短测量波长到所期望的测量范围之间的那一段。

图 15.28 所示为使用单波长、双波长和多波长技术测量 13μm 高台阶的实例。这些测量使用的都是具有相移功能的干涉光学显微镜。图 15.28a 所示为在波长为 657nm 时测得的台阶。图 15.28b 所示为在波长 657nm 和 651nm，有效波长 64nm 的双波长测量结果。使用双波长连续两次测量值之间的差别如图 15.28c 所示，此时 RMS 值为 7.13nm。这意味着测量的重复性为 $\lambda_e/9000$，λ_e 是有效波长。用在 651nm 测量得到的数据来修正用 657nm 测量得到的相位数据，结果如图 15.28d 所示，从图中可看出由单波长测量噪声所导致的 2π 不确定性。如果使用三个测量波长（657nm，657nm 和 601nm），修正后的 657nm 测量结果如图 15.28e 所示，该图显示此时噪声要小得多。图 15.28f 显示了如图 15.28e 所示的三波长测量的重复性（两连续测量的差别）。测量差异的 RMS 值为 0.67nm，由此产生了一个约为 20 000 的动态测量范围。因此，多波长的使用能够使动态测量范围增大 10 倍。托尔斯等人（Towers，Towers and Jones，2003；2004a，2004b，2005）介绍了如何选择一个最佳的多波长序列，从而生成一个成等比级数的有效波长序列，这会使得随后的每一个有效波长的动态范围能够有最大程度的增长。上面测量实例中给出的三波长序列就是一个最佳序列的例子。

单波长测量的修正。多波长干涉测量与双波长干涉测量相同（参见 15.5.1 节内容），为了正确地分辨出大高度的间断点，必须确定条纹的级次。较长的测量波长能够测量出较大高度的间断点，但是测量噪声也会相应地增加。长测量波长形成的条纹其级次能够用来确定短波长形成的条纹级次，一旦在这个较短波长形成的条纹级次被确定，带有相对较低噪声水平的相位值便能够通过解包求得。这样在双波长和多波长干涉检测中的有效波长对扩大可分辨的高度范围就显得很重要了。在多波长干涉测量中使用时间相位解包程序（Huntley and Saldner，1993，1997；Saldner and Huntley，1997a，1997b），而非典型的空间程序是一种很有效的确定条级次的技术。这种针对每一个像素的时间相位解包步骤是对一个多波长序列进行的，这些波长的值必须构成一个递减的等比级数。

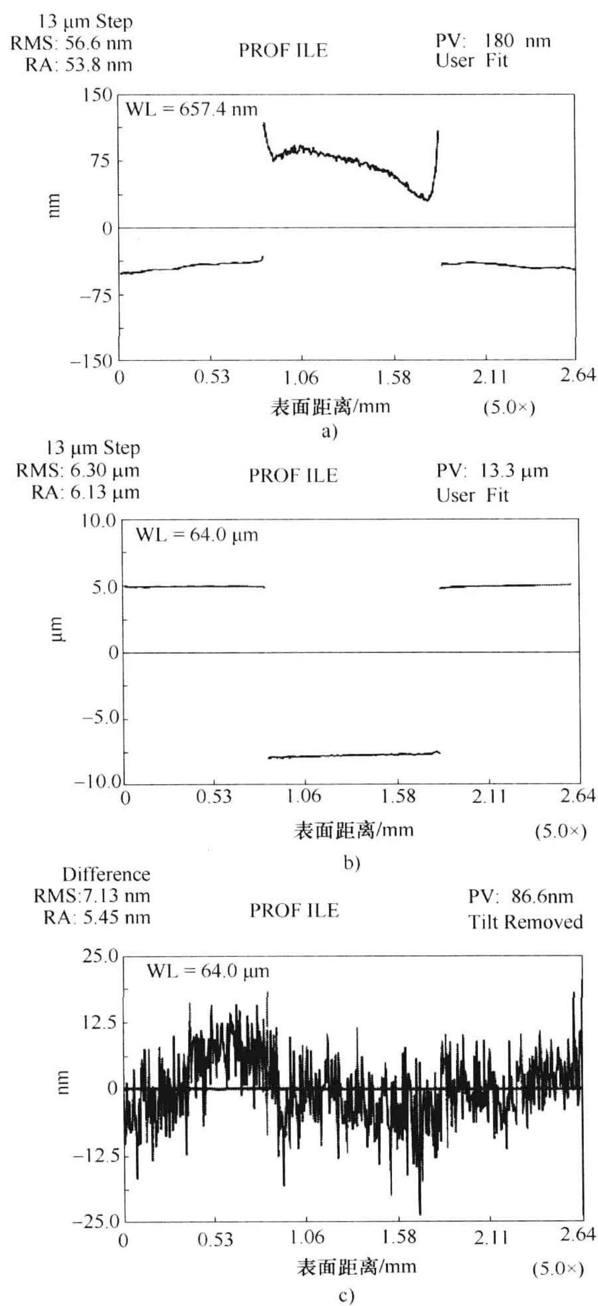


图 15.28　使用单波长、双波长和多波长干涉对 13μm 台阶的测量

a）657nm　b）双波长测量（使用波长 657nm、651nm，有效波长 $\lambda_e=64\mu m$）　c）双波长连续测量的差异

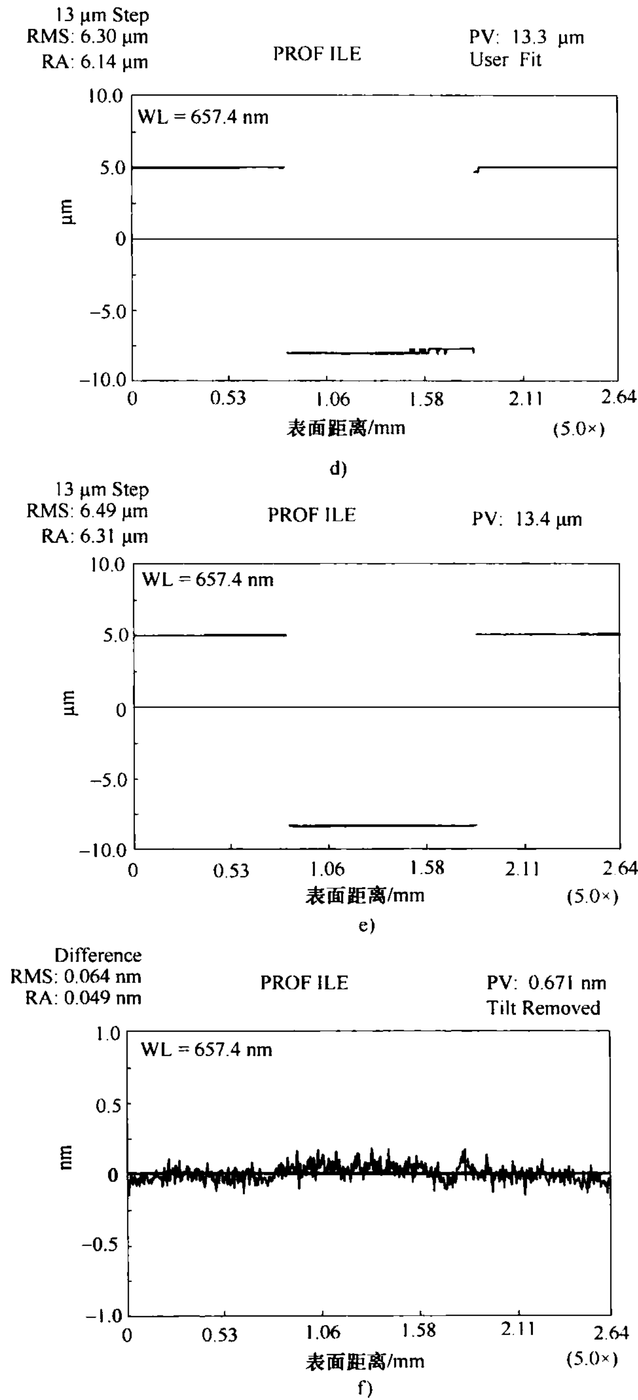


图 15.28 使用单波长、双波长和多波长干涉对 13μm 台阶的测量（续）

d）使用双波测量修正的 657nm 时的测量数据 e）三波长测量（使用波长 657、651 及 601nm）

f）三波长连续测量的差异

15.5.3　减少测量时间

使用双波长或多波长技术来进行测量，所花的时间至少是单波长相移干涉技术的两倍。为了减少测量时间，可以在一帧图像中获取双波长或多波长的重叠干涉图。如果条纹带有载波频率，则可以进行分析（Onodera，1997）。这种情形下观察到的是针对有效波长的类似于莫尔条纹的干涉条纹，但如果应用傅里叶变换，对应不同波长所形成的干涉条纹的主频能够被分离，而且每个独立波长的局部相位也可以计算出来。

普弗特勒和施温德使用彩色 CCD 相机在一幅快照中获取了三帧条纹图像，形成这些条纹的波长正好对应了相机的 RGB 色彩的三个激光光源（Pförtner and Schwider，2001）。这一技术称为 RGB 干涉技术，可以产生大的波长分离（633nm、532nm、473nm）。此外，为了减小误差，在没有做任何附加测量的情况下消去了轴向色散。如果使用的是带有载频的条纹，就仅需一帧数据。然而，加载方法是有其局限性的。

可以使用不同的方法利用一个或多个相机同时获得在空间上分开的少量相移干涉图。针对双波长或多波长两组或多组干涉图只需要 100μs 就可以完全被记录。最近出现了一种利用一个专门设计的散点分布相位掩模来分离干涉图的技术（North-Morris et al.，2004），这个相位掩模可以对每一个像素引入独特的相移。这种方法不要求条纹带有载频。

多波长方法也用于干涉计量的其他领域，如散斑或是数字全息。多波长方法还可以用在条纹投影技术中应用，它通过投射类似于多波长条纹的多频率条纹来增加测量的动态范围（参见第 16 章内容）。

在干涉显微镜中，多波长技术的适用性因决定测量高度的干涉物镜的场深而受到限制（参见 15.4 节内容），限制因素并非有效波长。基于这个原因一般更常使用白光干涉，此时可测高度受限于物镜的工作距离。

15.6　白光干涉光学轮廓仪

白光干涉（WLI）光学轮廓仪使用宽带光源照明，其工作形式类似于一个光学聚焦传感器阵列，每个传感器上接收到的干涉信号的位置决定了最佳的聚焦位置。使用宽带照明克服了在单波长甚至是多波长技术中存在的局限性。WLI 方法由于在 MEMS 元件、二元光学元件及机械加工表面等工程表面测量中的应用，早已确立了它在光学轮廓仪中的领先地位。WLI 的垂直分辨力依赖于对信号的分析，它和单波长 PSI 方法（0.3nm）几乎一样好，但是通常情况下在 3nm 附近。这里垂直分辨力的定义是在光滑样品上测量差值的均方根（RMS）。

15.6.1　白光干涉

在干涉光学轮廓仪中使用的白光光源具有宽带可见光谱，波长从 380～750nm（紫外光到红外光）。由于波长带宽很大这种光源的时间相干性低，并且不能将其看做点光源，也就意味着它的空间相干性也很低。光源很低的时间和空间相干性使得所产生的干涉条纹局限于空间上。

为了在最佳聚焦位置获得干涉条纹，参考镜的位置也需要设置在物镜的最佳聚焦点。这可以分三个步骤：首先，将参考镜从焦点处移开几个或者几十个微米；其次，将物镜聚焦在具有一些特征的检测对象上，比如说锐利而不太高的台阶上（此时还看不见条纹）；然后第

三步，将参考镜向焦点处调整，直到条纹对比度最好时停止调整。干涉物镜的参考镜要放在物镜的最佳聚焦位置，其目的是获得零光程差（*OPD*）。

由于相对于低空间相干性而言，低时间相干性对条纹的定位影响更大，所以时间相干性的影响将是讨论的重点。光源光谱中不同的波长之间是互不相干的，且不同波长的条纹叠加成了白光条纹，如图15.29所示。一个单色探测器探测到的是所有条纹光强的总和。因为光源每一波长对应条纹的间距是不同的，条纹的最大值仅在一个点上出现，在这一点上对于所有波长来说 *OPD* 为零，如图15.29a 所示。当远离这个零光程差位置时，所观察到的总光强迅速减小，如图15.29b 所示。正因为如此，条纹被认为是局部化的。对比度最大的条纹，即 *OPD* 为零的条纹，称为零级条纹，在其两边相临排列的光强相对较小的条纹则依次称为 +1 级、-1 级条纹及 +2 级、-2 级条纹等。零级条纹的最大值随着条纹包络的最大值降低（参见15.6.5节内容）。

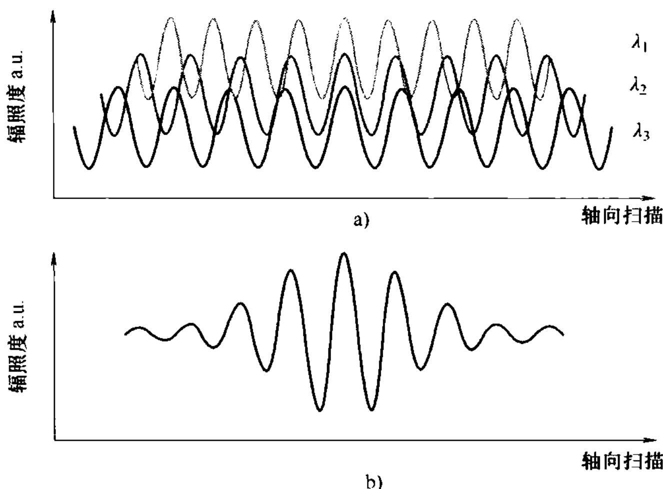


图15.29　白光条纹的构成

a）单一波长形成的条纹　b）单一波长条纹的合成（即白光条纹）

回到图15.26，从图中能够看到为构造二元光栅而生成的白光条纹，以及在白光光源后放一个窄带滤波器而得到的准单色光条纹。这两个干涉图说明，当观察白光光源生成的条纹时，很容易在物体上找出零级条纹，因此能够明确地确定出表面面形。消除条纹级次编号的模糊（2π 模糊），是 WLI 的主要优势，因为它可以用来测量具有大间断点及粗糙度表面的样品。

数学形式上，在轴向扫描过程中，一个像素观察到的白光干涉可以描述为所有波数 k 及不同入射角（de Groot and de Lega，2004；Abdulhalim，2001）的全部条纹的积分。所得到的条纹通常可以写成

$$I(z) = I'[1 + \gamma(z)\cos(k_0 z)] \tag{15.19}$$

其中，I'是背景光强，$\gamma(z)$ 是条纹可见度函数或者相干包络，$k_0 = 2\pi/\lambda_0$ 是在条纹包络下的中心波数。$\gamma(z)$ 与光源频谱傅里叶变换的模成正比。通常，如果光源有高斯谱，那么条纹的包络也可以用一个高斯函数 $\gamma(z)$ 来表示。光源谱宽越大，包络宽度越窄。条纹包络宽度可以由光源的相干长度确定（见式（15.7）），对于白光光源，谱宽大约为 1～2μm。条纹的包络也会随着其他因素而发生变化，比如照相机的灵敏度、被测物体及系统的色散等。

15.6.2　图像构成

对于表面形貌测量，白光条纹的重要特征是条纹是定域的，而且条纹仅在零光程差的几个或几十个微米范围内能够观察到，如图15.30所示。由于物镜（或者样品）沿轴向扫描通过焦点，每一个像素都会记录下辐照度；条纹包络的最高点确定了样品的最佳聚焦位置。

图 15.31 所示为 CCD 相机记录下的样品一步步扫描通过焦点的几幅干涉图。在单独的干涉图中，通过条纹显示出了样品上哪些部分在扫描中正好处于焦点对准的状态。

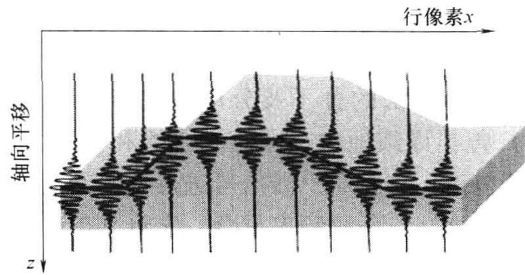


图 15.30　几个行像素观察到的置于白光干涉仪中物体的辐照信号

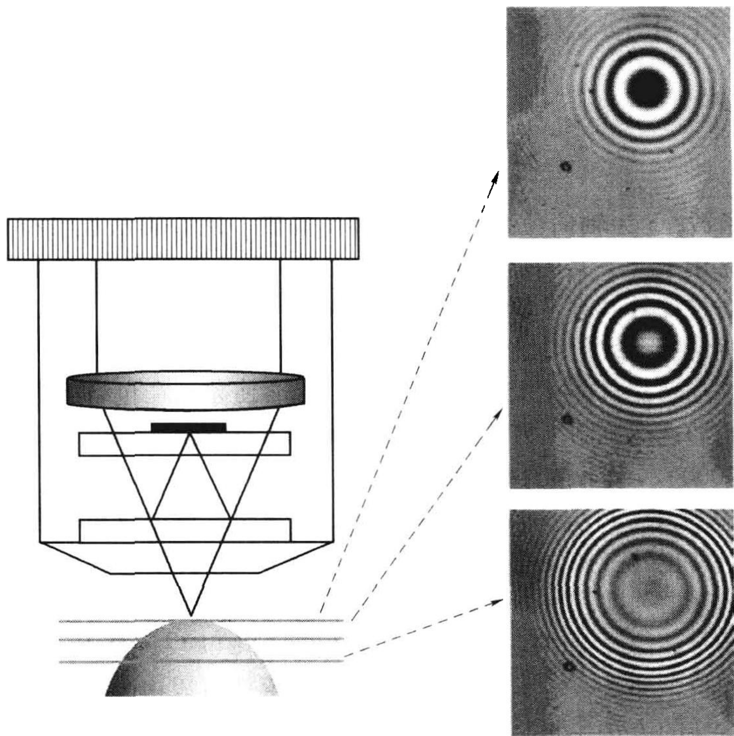


图 15.31　物镜在轴向扫描中几个位置处获得的球面物的白光干涉图

15.6.3　白光干涉图的信号处理

通过对轴向扫描过程中所记录的每一个空间点上的条纹进行定位，可以确定被测对象的形状。假设条纹信号在每一点上都是相同的，只是由于测试样品的形貌变化而导致轴向位置不同。自 20 世纪 80 年代（Balsubramanian，1982）以来，已经提出一些方法及算法来对白光干涉技术的应用进行描述。许多算法首先计算条纹的包络（调制）。条纹包络的计算方法与相移干涉技术中（PSI）确定条纹调制的方法是相同的。在轴向扫描过程中，在每两帧记录下的数据中，光程差（*OPD*）导致了 90°的相移量，但是相对于 PSI 而言，其扫描范围要长许多。这样，任何一种相移算法都可以用来确定轴向扫描中每一个点的条纹调制。

对于一个常用的五帧 PSI 算法（Schwider et al.，1983；Hariharan et al.，1987），调制可以用式（15.20）计算

$$\gamma(z) = \frac{\sqrt{(I_2 - I_4)^2 + (I_1 - 2I_3 + I_5)^2}}{\text{归一化}} = \frac{\sqrt{N^2 + D^2}}{\text{归一化}} \tag{15.20}$$

其中，N 和 D 分别表示任何 PSI 算法的分子及分母。关于可以用做调制计算的 PSI 算法特性，拉金（Larkin，1996b）曾很详细地进行介绍。吉挪和奇米（Kino and Chim，1990）建议用傅里叶变换技术来计算包络，首先对干涉信号进行傅里叶变换，计算后，会观察到三个旁瓣。其中有一个旁瓣的位置恰好与条纹频率重合，先将其单独分开，然后移至中心。接下来，通过逆傅里叶变换得到条纹包络。肯博（Caber，1993）证明可以用电子硬件（用硬件实现振幅调制）来获得条纹包络。

一旦包络被确定出来，其位置就可以用通过将用适当的该曲线与来勾画该包络拟合。包络的位置也可以用下面的公式计算包络的质心得到

$$h = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \gamma_{Zi} z_i}{\sum_{i=1}^{N-1} \gamma_{Zi}} \tag{15.21}$$

其中，γ 为包络函数；z 为轴向位置；h 是物体的高度。质心算法速度很快，而且很有效，在共焦系统中经常用来寻找共焦辐照信号的最大值。质心计算等效于计算包络位置的最大值，但是仅针对对称信号。对于非对称信号，给每个点都引入一个上下的移动，然而，这个移动不影响整个测量。条纹包络最精确的测量要用到一个消色差相移器。在每一个轴向扫描位置，一个消色差相移器（将在 15.8.9 节中介绍）会使条纹在包络下产生移动，这将导致条纹产生一个确定的连续调制。另外，也可以在包络最大值周围确定亮条纹和暗条纹的位置（Park and Kim，2000），而不是寻找包络的位置。

德・格如特和德克（de Groot and Deck，1995）提出，还可以在频域上确定条纹包络的位置。首先，通过傅里叶变换（与吉挪和奇米的方法类似），单独分出一个旁瓣。旁瓣的幅值代表给定波长的光谱强度，相位代表给定波长干涉信号的相位。因此，从这个旁瓣出发，白光信号的每一个干涉信号可以写为：$I(k) = I(k)\ \cos[\varphi(k)]$，其中 $\varphi = kz$。如果至少知道两个波长对应的相位，那么一个不存在 2π 含混的 z 值就可以由公式 $z = \Delta\varphi/\Delta z$ 确定。其他一些像小波分析这样的方法也可以使用（Yatagai，1994；Itoh et al.，1995；Sandoz，1997；Recknagel and Notni，1998）。这种方法的上升部分噪声减小，而下降部分需要更长的处理时间。

最初，白光干涉显微镜是用来测量光滑表面（Davidson et al.，1987；Kino andChim，1990；Lee and Strand，1990）的，后来也扩展到粗糙表面的测量（Häusler and Neumann，1992），此时需要考虑到散斑的存在（Häusler and Herrmann，1992；Pavlícek and Soubusta，2003）。分析信号不仅可以得到物体的形状，而且还可以给出一个物体的不同反射率的示意图，或者获得一个相当于利用一个景深无穷大的物镜对物体成的像（Sheppard and Roy，2003）。这里并没有给出描述 WLI 算法的所有文献。

1. 白光干涉信号的抽样

在 WLI 中测量时间随着所需的扫描长度而变化，因此白光条纹的抽样速度必须要仔细考虑，以便在最短的时间范围内获得最佳数据。为了确定条纹，只有在少数几个轴点上需要

知道包络光强值（Larkin，1996a，1996b；Creath，1997），而且在扫描过程中不是所有条纹都需要分辨出来。比如，在 15.6.3 小节中介绍的用 PSI 算法计算条纹调制，每个条纹需要四次抽样。然而，如果不是对每个条纹都进行四次抽样，而是对于奇数次的条纹进行四次抽样的话，那么可以得到更快但不太精确的 WLI 测量。在对每个奇数级次条纹进行四次抽样，相当于每 90°一次抽样，不是所以条纹都会被分辨，但是计算条纹的调制仍是可能的。用这种方法，测量速度可以增加 23 倍（Schmit，2003），使用一个帧速为每秒 60 帧的相机测量速度可以达到 100μm/s，那么抽样速率就等于 1.8 ~2μm，这与白光光源的相干长度在一个量级上。当抽样速率接近光源的相干长度时，数据就不能使用了。当这种情况发生时，需要减小光源的谱宽来延长条纹包络。在不同的 WLI 算法中，很多作者都讨论过不同的抽样情况（Deck and de Groot，1994；Larkin，1996a，1996b；Creath，1997；Hirabayashi et al.，2002；Schmit，2003）。在立体显微镜中使用的条纹投影生成的定域条纹类似于白光干涉条纹，但是有着更长的波长及包络。因此，抽样速率要比几个微米长很多（Kröner et al.，2001；Kröner et al.，2006）。

2. 高分辨力白光干涉测量

在测量条纹包络的位置时，PSI 方法的垂直分辨力比 WLI 方法要高 10 倍（0.3nm 比 3nm）。然而，如果能够确定包络下的条纹相位的话，WLI 方法可以得到相近的垂直分辨力。这种高分辨力 WLI 方法结合了包络位置（相关条纹级次）的低分辨力图形和零级条纹相位（位置）的高分辨力图形。这两种图形的计算及组合，可以用多种算法来完成（Cohen et al.，1992；Larkin，1996b；Windecker et al.，1999；Harasaki et al.，2000；de Groot et al.，2002）。这种高分辨力的 WLI 很适合用于确定那些具有大高度差的光滑表面的形状，比如二元衍射光学及微机电系统（MEMS）。这种方法的优点是可以在最佳焦点位置计算相位。使用白光干涉光学轮廓仪的测量实例如图 15.32 所示。

15.6.4　光源

不同的白光光源，如卤钨灯、白炽灯、弧光灯、发光二极管（LED）及超辐射发光二极管（SLDS），都可以用来照明。这些光源有不同的光谱，因此会生成不同的条纹包络。条纹包络宽度由光谱宽度决定。在图 15.33 中，可以看到卤钨灯和红色发光二极管（LED）这两种光源，它们的光谱带宽不同，从而产生了不同包络宽度的条纹。包络越窄，所确定的条纹位置越精确。半导体光源的光谱，比如发光二极管（LED）及超辐射发光二极管（SLDS），其形状与高斯函数图形相似。

15.6.5　白光条纹色散

在图 15.29 中，假设白光干涉对所有波长都进行了补偿，这意味着条纹的最大值位置与包络的最大值是相吻合的，即在条纹及包络最大值之间，有零相移 $\varphi_0=0$。如果在干涉仪的一个臂中介质表面经过了奇数次反射，而另一臂是偶数次反射，在相干包络下条纹将相移 $\varphi_0=180°$，条纹最小值将与相干包络的最大值对齐。

在实际的系统中，条纹可能会相对于包络移动任意量 φ_0，而这个移动可能归因于很多因素。这些因素包括非绝缘表面及透明薄膜的反射、系统的色散及横向像差，或者是干涉仪的一个臂上存在一个透明板。这些因素引起了随波数变化的相移，也叫做光谱位相。光谱位相将各种变化引入了白光干涉仪中，它改变了条纹的包络和位置及条纹频率。如果引入的光

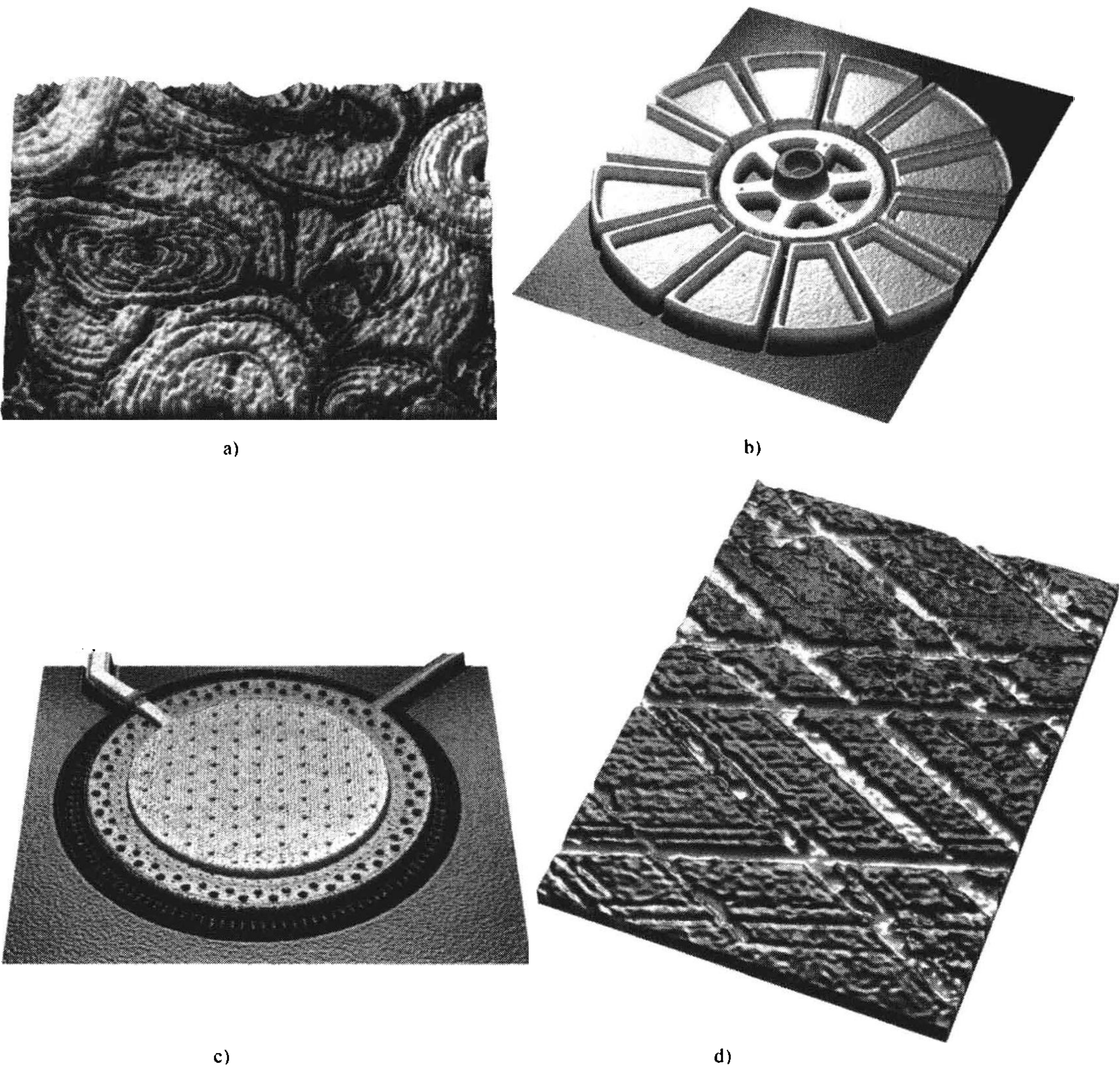


图 15.32 用白光干涉仪测量物体的实例（Veeco Instruments 公司提供）

a）法医骨头样品（460μm×612μm） b）突起型微型电动机（230μm×304μm）

c）便携式电话和其他应用中的无焊料微机电麦克风（0.9mm×1.2mm） d）磨光的汽缸壁（1.2mm×0.90mm）

谱位相与波数成线性关系，那么条纹的位置是变化的，但是条纹包络的形状仍保持不变。对于所有的波束而言，反射的固定相位变化只移动了相干包络下的条纹，就像一个消色差移相器那样（参见 15.9.2 小节内容）。光谱位相的高阶变化对包络的位置、形状、振幅及条纹频率产生影响。

1. 不同材料

只要物体的表面由单一材料构成，由于只引入了一个全场同一的变化，光谱位相就不会呈现出问题。然而，当表面并排出现两种不同的材料时，对于不同的波长材料在反射时将会引入不同的相移（除非它们都是折射率虚部 $k=0$ 的介质材料），而且在两种材料交接的边界上测量得到的高度差是错误的。通过就测量中所使用的波长了解不同材料对应的光学常数，可能校正这种差异（Bennett，1964；Church and Lange，1986；Biegen and Smythe，1988；Doi et al.，1997；Rogala and Barrett，1998；Harasaki et al.，2001；Park and Kim，

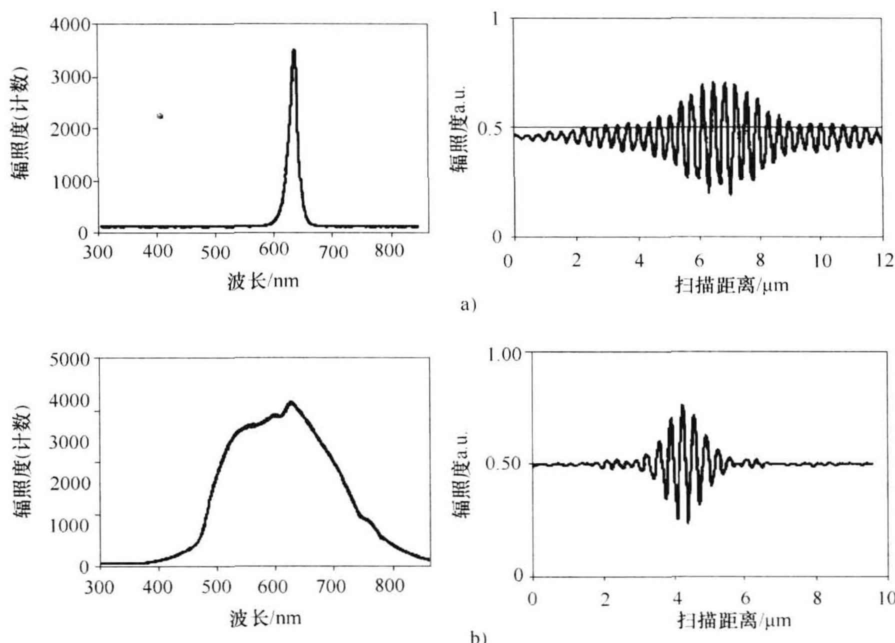


图15.33　光谱及干涉图

a）卤钨灯　b）红色LED

2001）。对于给定波数 k，正入射情况下，固体材料反射的相位变化为

$$\varphi_{\text{material}}(k)=\arctan\left(\frac{2k}{1-n^2-k^2}\right) \tag{15.22}$$

其中，n 和 k 分别为折射率的实部和虚部，针对测试物体时使用的波长范围，材料折射率 n 和 k 的具体取值，可以在帕里克（Palik）编写的《固体的光学常数手册》（The Handbook of Optical Constants of Solids）中查得（Palik，1991）。通常，当面临由合成材料，比如陶瓷，制作的测试物体时，更好的解决方案是给材料镀一层不透明材料（也就是金属）的膜层（典型的100nm就足够了），以便得到表面好的性能。另外，也可以制作一个被测物体的复制品，然后进行检测。

当使用宽谱光源的时候，需要考虑整个光谱上反射的相位变化。图15.34所示为以金及硅为例子的金属和半导体材料的光谱相位。在白光干涉检测中，由于物体不同材料引入的谱相会移动包络的峰值（多数情况下是金属），而且甚至可能改变包络的形状（金和一些半导体也有可能）。对于一些典型的材料这种移动不会大于40nm（Harasaki et al.，2001）。表15.3列出了白光条纹包络峰值及600nm波长的条纹相位的移动。

2. 厚膜测量

如果样品镀上好几微米厚的透明膜层，就会生成两组相互分离的定域条纹，每一个界面一组条纹。这样厚膜技术就可以用来测量膜层的厚度。对于第二个界面，也就是膜层的下端，单一波长形成的干涉图样之间会发生相移，该相移正比于几何路径与折射率之积 $d\times n(k)$，第二个界面的白光干涉条纹的辐照度为

$$I(z)=\int_{k_1}^{k_2}\langle 1+V(z)\cos\{kz-kd[n(k)]\}\rangle \mathrm{d}k \tag{15.23}$$

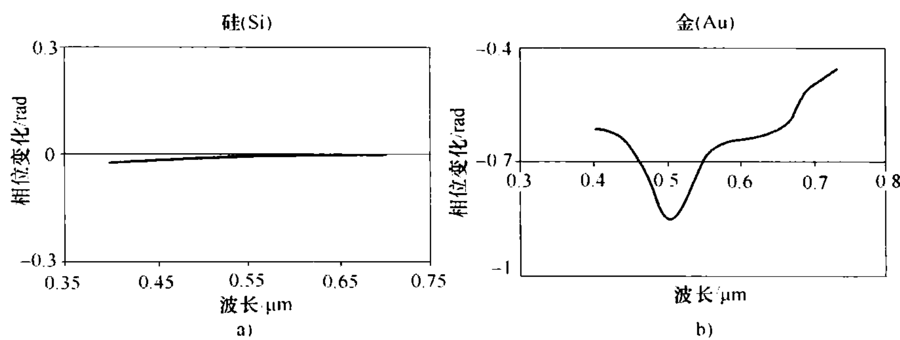


图 15.34 不同波长反射的相位变化

a）硅 b）金

表 15.3 不同金属材料反射相位变化引起的包络峰值位置移动及 600nm 波长单色条纹移动导致的测量高度偏移量

金　属	由于包络峰值移动导致的高度偏移量/nm	由于条纹移动导致的高度偏移量/nm
银	36	25.1
铝	13	12.7
金	0	33.4
钼	59	13.4
镍	15	20.8
铂	13	18.1

由波数 k 所确定的折射率可以写成一个近似的一阶线性展开式

$$n(k)=n(k_0)+\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}k}(k-k_0) \tag{15.24}$$

线性色散会移动包络，移动的程度取决于群折射率与色散元件厚度的乘积；包络下的条纹也会轻微地移动。

一种判定条纹包络峰值的相对位置的简单技术可以用来确定膜层的厚度。图 15.35 所示为两组清晰的分离条纹，分别在空气/膜层和膜层/基底的界面形成。可测量的膜层厚度典型范围是 3～150μm，具体取决于膜层的色散及物镜的 NA。

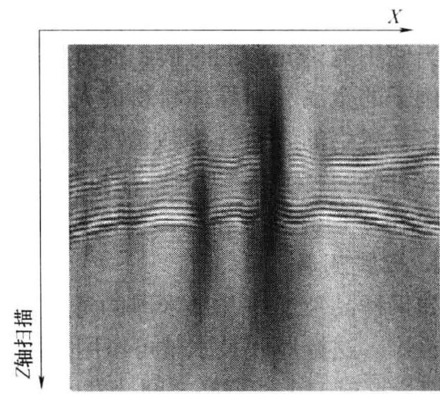


图 15.35 轴向扫描一个非共形膜层时通过一行像素观察到的白光条纹（其中上端条纹是在空气/膜层界面形成的，下端的条纹是在膜层/基底界面形成的，且位于界面之下。）

更厚的膜层或者插入的平板引入的更高阶色散将会产生很多影响，包络可能会变宽或者甚至变得不对称，包络下条纹的位置可能会移动，条纹对比度会降低，或者条纹周期可能随着 z 位置的变化而改变（Pavlícek and Soubusta，2004）。对有更宽光谱的光源及有更大数值孔径的物镜而言，色散的影响将变得更强。然而，对于不同的

光谱形状，所观察到的变化不一样。因此，为了测量更厚的膜层，最好是使用低数值孔径的物镜及较窄带通的白光光源。

3. 薄膜测量

当膜层的光学厚度小于白光光源的相干长度时，典型情况是小于 3μm，多次反射会给光谱位相引入一个额外的非线性项，这会使得条纹包络和条纹频率发生变化（Hariharan and Roy，1996；Roy et al.，2005）。由于两个界面上的定域条纹没有分开，所以再要取确定包络峰值的位置就是无效的了。必须采取其他的方式。一种方法是对测量信号进行傅里叶变换，然后在频域中计算第一个旁瓣下的光谱位相（Kim and Kim，1999）。图 15.36 所示为薄膜的条纹（图 a）、第一光谱旁瓣的振幅（图 b），以及对应频域的光谱相位（图 c）。一般说来，当用干涉技术来测量薄膜或者厚膜时，不但是其厚度，而且其顶部和底部的轮廓都能测量。薄膜干涉的光谱位相具有一个多项式形式，多项式与所选择膜的模型式（n 和 k）是相匹配的，使用回归分析可以确定最佳匹配及薄膜的厚度。为了得到更高的精度，需要知道系统色散引起的光谱相位，并将其去扣除。可以利用计算大小来替代，不是计算光谱位相和确定最佳匹配模拟光谱位相，而是可以利用计算幅度，并且这样通过获得最佳匹配的模拟幅度大小来确定膜层的厚度。这些方法适用于光学厚度从几个微米到 100nm 的膜层。针对光学厚度小于 100nm 的膜层，这种方法的灵敏度会明显减小。

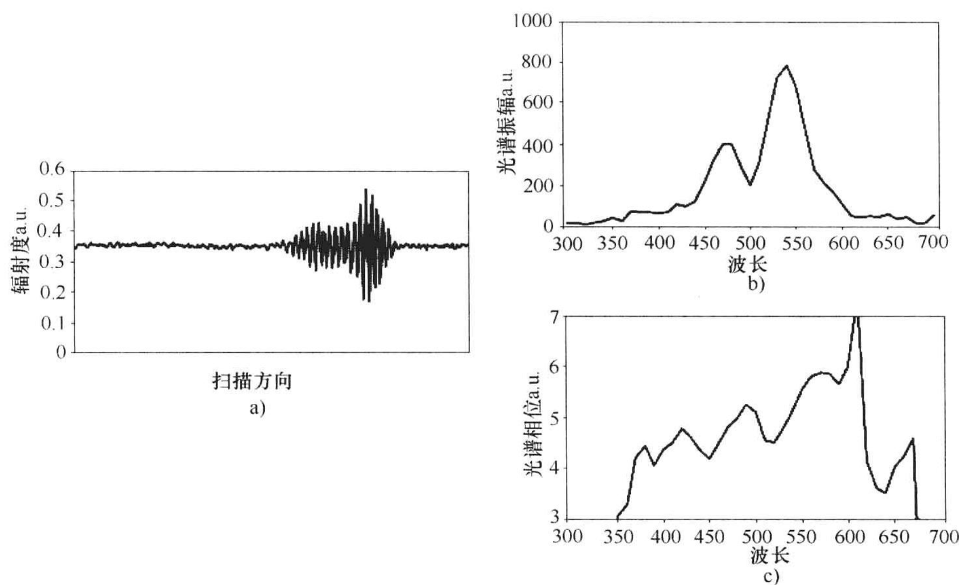


图 15.36　对测量信号进行傅里叶变换

a）薄膜的白光条纹　b）傅里叶变换的旁瓣　c）旁瓣下的光谱相位

除了需要对有不同材料及膜层的被测物体进行特殊分析外，有狭窄沟道（宽度为 10μm 或更窄）的物体也需要对条纹进行仔细的检查。对于一个狭窄的结构，会产生一些额外的不需要的条纹，这些条纹和被测物体的面形没有直接关系（Schmit et al.，2003；Montgomery et al.，2004；Tavrov et al.，2005）。

4. 通过玻璃板或流体介质的测量

一些工程对象，如 MEMS 系统，通常用防护玻璃罩进行保护，在环境舱中一些设备需要在不同的压强及温度下进行检测。这些对象的检测需要经过玻璃防护罩进行。生物样本通

常是泡在液体中的，对其测量则需要通过液体。因为液体层或玻璃保护罩的色散，白光条纹可能会全部消失。因此，需要在干涉仪的参考臂上引入一个补偿板。这种补偿方式对于迈克耳逊型的物镜是最容易实现的。此外，对于那些用在照明和成像光学系统中的数值孔径更高的物镜，条纹的对比度减小得更快。针对这些更高数值孔径的物镜引入补偿也很难。对于这种具有高的数值孔径物镜的系统，为了增加针对具有高数值孔径物镜系统的条纹对比度，降低照明的数值孔径可以通过直接将一束数值孔径很低的近准直照明光束（Han，2006）入射到物镜下方的干涉仪中而不经过物镜来实现，如图 15.37a 所示。图 15.37b 给出了利用 20 倍物镜通过 3mm 玻璃防护罩测量一个浸入液体中的光栅和一个倾斜标准件的结果。

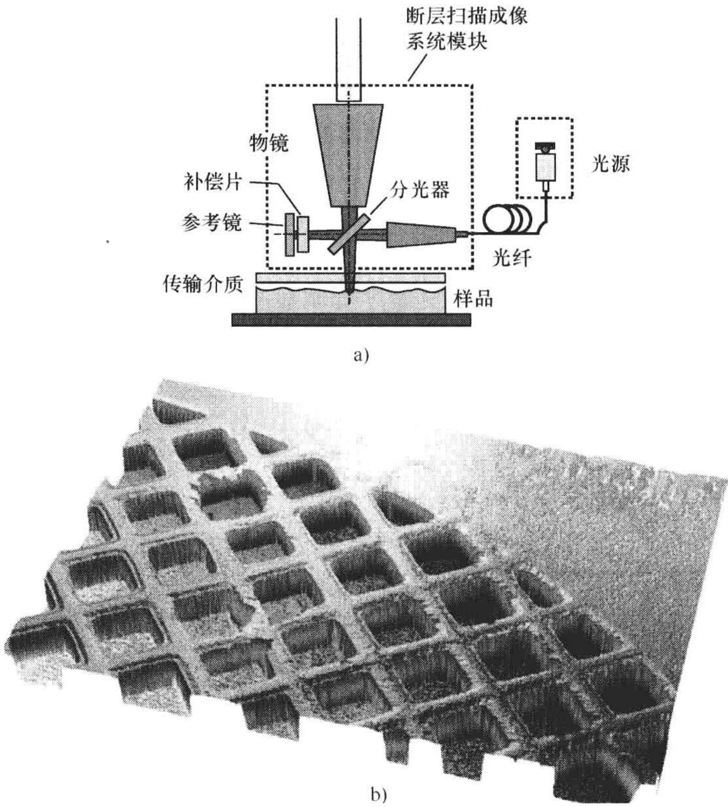


图 15.37 迈克耳逊型干涉物镜和交叉格状光栅（加州大学洛杉矶分校 Courtesy Reed 和 Gimzewski 提供）
a）通过玻璃防护罩来观察样品的迈克耳逊型干涉物镜（一束数值孔径非常小的光束不是通过物镜而是从干涉仪的一侧进行照明，由此来提高条纹的对比度） b）利用在干涉臂上引入补偿单元/片的介质物镜测量得到的浸在水中的交叉格状光栅（扫描范围 620mm × 460mm，光栅高度 30μm）

15.6.6 干涉光学轮廓仪的其他名称

用于工程表面测量，具有轴向扫描的白光干涉测量技术有不同的分类，而且还可以发现使用了以下一些名称：

白光干涉测量（WLI）

垂直扫描干涉测量（VSI）

低相干干涉测量（LCI）

相干探针

光学相干轮廓测量（OCP）
光学相干显微镜测量
扫描白光干涉测量（SWLI）
白光扫描干涉测量（WLSI）
相干探头显微镜测量（CPM）
相关显微镜测量
相位相关显微镜测量
干涉显微镜
显微干涉测量
宽带干涉测量
全域光学相干断层成像
宽域光学相干断层成像
相干雷达
条纹峰值扫描干涉测量

对于生物标本，同样的测量方法主要叫做光学相干断层成像（OCT），但也叫做时域光学相干断层成像（TD-OCT）、相干雷达或共焦干涉显微镜。

15.7 波长扫描干涉仪

可替代白光和多波长干涉仪的是光谱干涉仪，在较宽的波长范围内，光谱干涉仪利用了光谱干涉条纹。光谱干涉条纹可以通过光源波长的扫描或者利用分光计将白光条纹分散开来得到。

利用波长扫描的光谱干涉测量所使用的装置基于典型迈克耳逊干涉仪，所不同的是其光源是波长可调谐的，如图15.38所示。为了找到每一点对应的最佳的聚焦位置，这个系统不需要像在典型的共焦显微镜中进行的逐点轴向机械扫描，或者在白光干涉测量中的轴向场扫描那样。代替这些的是，对光源的波长进行扫描，从而观察到不同频率的条纹，这样被检物体相对于参考反射镜的高度就可以确定了。这种波长扫描轮廓仪给出了光滑和粗糙表面的形貌，且不存在2π相位含混问题。相对白光装置而言，波长扫描系统的一个优势在于即使在介质存在色散时，条纹的对比度也保持得很好。

15.7.1 波长可调谐光源

由于波长的调节范围决定了测量的分辨力，且波长的调节步幅决定了系统的测量深度（如15.7.2小节的介绍），因此不断发展照明系统以增加扫描范围、减少扫描步幅。最初，使用的是对于工业应用来说并不方便的大型昂贵的染料激光器和钛-蓝宝石激光器（Kuwamura and Yamaguchi，1997；Yamamoto et al.，2001）。同时，也使用了新型的、更为方便的可调谐固态激光器。在二极管激光器中改变波长的标准方法是改变注入电流或芯片的温度，但是，这些方法会导致跳模和模式形状的改变。为了避免跳模，提兹安林等人（Tiziani et al.，1997）使用了和染料激光器一样的外腔。后来，由像超辐射发光二极管与声光可调谐滤波器或者液晶法布里-珀罗干涉仪这样的波长可调谐装置相结合的宽带光源（Mehta et al.，2002）组成了更方便、更稳定的照明系统。

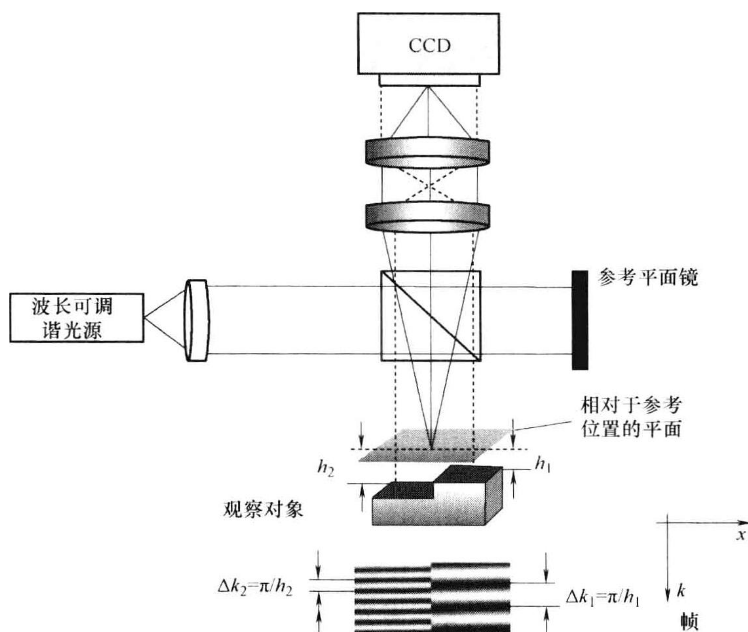


图 15.38 波长扫描光谱干涉仪

15.7.2 图像构成

在每一个 x、y 点处的干涉信号，可以利用式（15.8）描述为

$$I(k,h)=I_R(k)+I_0(k)+[2I_R(k)I_0(k)]^{1/2}\cos(2kh) \tag{15.25}$$

其中，h 为参考面和被测对象之间对应点的光程差。由于被测对象是不动的，因此可以假设 $z=0$。通过整个区域内 h 的变化确定了被测对象高度的变化。正如 15.6.1 节所提到的，相位差 $2kh$ 可以通过几种不同的方法来改变。在某一时刻，通过对被测物体进行轴向机械扫描 δh（以前记为 z）距离（像在扫描白光或者相移干涉检测中一样），对于给定的波数 k 被测对象上每一点的相位会改变相同的量 $\delta\varphi=2k\delta h$，这将引起每一点上相同频率的干涉条纹，如式（15.26）和图 15.39 所示。

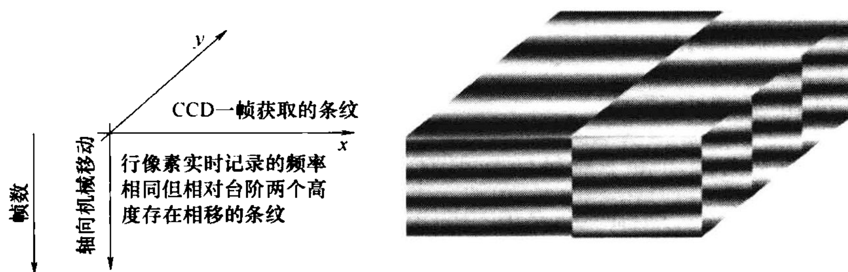


图 15.39 通过 PZT 扫描得到的台阶物体单色光照明的干涉条纹

$$I(k,h)=I_R(k)+I_0(k)+2[I_R(k)I_0(k)]^{1/2}\cos(2k(h+\delta h)) \tag{15.26}$$

在波长扫描干涉测量中，被测对象上每一点相位的改变都是由波长的改变 δk 引起的，相位的改变可以表述为 $\delta\varphi=2\delta kh$。在波长扫描过程中，每一点的辐照度可以由式（15.27）表述

$$I(k,h)=I_R(k)+I_0(k)+2[I_R(k)I_0(k)]^{1/2}\cos(2h(k+\delta k)) \tag{15.27}$$

这也称为光谱干涉。在波长扫描过程中，由于被测物体形状改变而引起光程差的改变，在物体各点上产生了不同频率的干涉条纹。图 15.39 和图 15.40 分别表示了由轴向机械扫描和波长扫描引起相位改变的情况下，获得的相对 x 轴倾斜的台阶物体的条纹。对于使用单色照明的机械扫描，在不同的台阶高度上形成的是有相同频率但初相位不同的条纹；而对于波长扫描，两个不同的台阶高度形成了两种完全不同频率的条纹。被测物体形状的微小改变导致了跨过物体的条纹频率的微小变化。

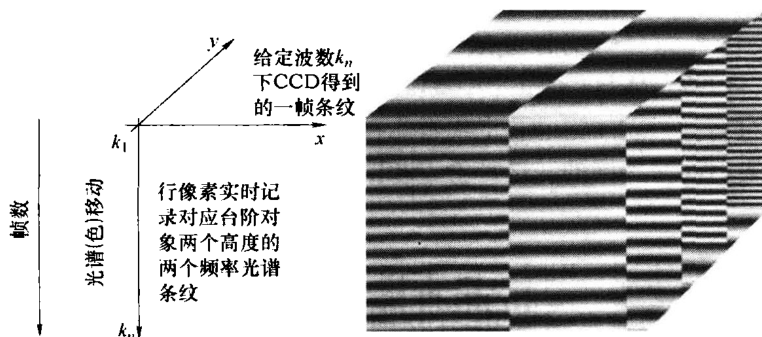


图 15.40　通过波长扫描得到的台阶物体的条纹

每一点相位的改变是波长改变的函数

$$\delta\varphi=2\delta kh=4\pi h=\frac{\delta\lambda}{\lambda^2} \tag{15.28}$$

每一个点上干涉条纹的周期可以表示为在波长移动为 Δk 时，相位的改变量 $\Delta\varphi$ 等于 2π

$$\Delta\varphi=2\Delta kh=2\pi \tag{15.29}$$

从检测到的条纹频率可以得到，对于测量对象上每一点的高度 h 可以由式（15.30）决定，

$$h=\pi/\Delta k=\Delta\varphi/2\Delta k \tag{15.30}$$

从干涉条纹的频率来得到高度和从每一点上相位的变化率来得到高度是等价的，称作相位倾斜或光谱位相。

扫描波长的范围可以从几个纳米到几十个纳米，波长的调节步长大约为几分之一个纳米量级，如图 15.41 所示。使用这种技术在几个毫米的高度测量范围内分辨率可以达到亚微米。最大的可测量高度取决于波长的调节步长

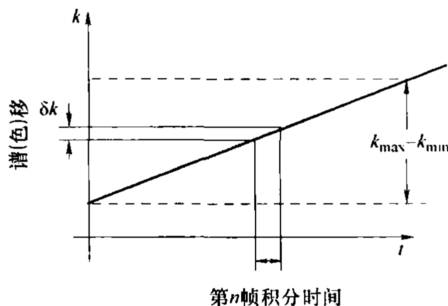


图 15.41　波长扫描干涉仪中的波长调谐

$$\Delta h_{max}=\pi/\delta k\,\frac{\lambda^2}{2\delta\lambda} \tag{15.31}$$

最小的可测量的高度差则取决于总的调节范围

$$\Delta h_{min}=\pi/(k_{max}-k_{min}) \tag{15.32}$$

但是其他的因素也会影响这些值，例如，物镜的场深可能限制被测对象的最大可测深度（参见 15.4.1 节内容）。

15.7.3 信号分析

正如前面章节中解释的那样，被测对象和参考平面之间的相对距离这一信息可以通过在给定点处找出干涉条纹变化频率或相位的变化率而重构出来。最早，条纹频率是通过每一个像素对零交叉信号的计数来确定。后来，发展了一种基于傅里叶变换的计算方法（Takeda and Yamamoto，1994；Barnes et al.，1996；Yamaguchi et al.，1998）。图 15.42 是三幅在波长扫描时同一波长处三个不同测量对象的干涉图。图中也显示了波长扫描过程中一个像素记录的信号，对峰值位置对应的信号进行傅里叶变换，可以确定测量对象的高度。为了进一步提高傅里叶变换技术的分辨力，可以计算光谱干涉的相位变化率（光谱相位的斜率）（Kinoshita et al.，1999；Mehta et al.，2003a；Mehta et al.，2003b）。波长扫描干涉测量需要在对光源波长进行扫描期间记录几十或者几百幅干涉图。对于浅表面和深表面来说，波长扫描干涉测量所需时间是相同的，这是由于和白光干涉测量一样，所需的帧数并不依赖于样品的深度。

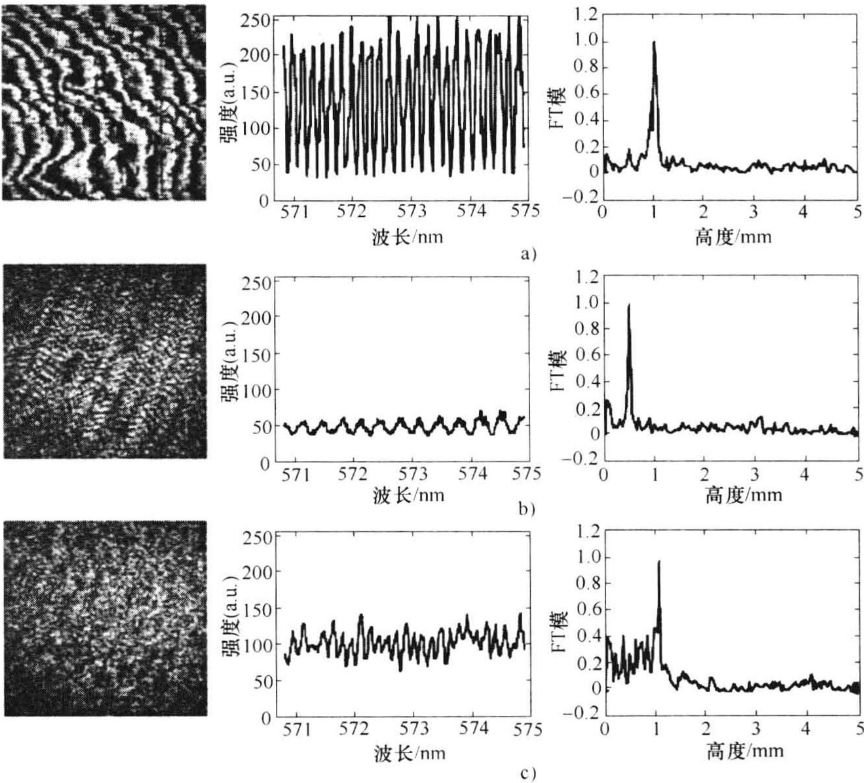


图 15.42 单一波长下的干涉图（波长扫描过程中干涉信号（光谱条纹）是通过单个像素实时观察到的）

a）抛光钢材 b）铝合金 c）氧化镁镀膜表面干涉信号的傅里叶变换

相对而言，在迈克耳逊干涉仪中对象的高度值在参考平面镜的两侧都是成立的。这是因为此处介绍的方法仅仅得出了从参考面到测量对象之间距离的大小，而没有确定其方向，这就存在一个高度上的模糊问题。图 15.43 证实了可能产生的高度上的模糊。在这样的情况下，对于波长扫描干涉测量，必须利用一种特殊的相位解包程序（Paulson et al.，2000），

或者使用称为时间相位解包的相位解包程序（Huntley and Saldner，1993，1997；Saldner and Huntley，1997a，1997b；Huntley and Coggrave，1998）。如果测量对象是在焦平面上下进行移动，这样解包程序就不是必须的，因为测量对象将明显的位于焦点的一边或者另一边。如图 15.44 所示，移动被测物体使其远离焦点，这样每一点处的条纹的频率会增加。但是，由于被测物体可能会被移动到聚焦范围以外或者条纹的频率过密而无法分辨（参见式(15.31)），这种移动可能会限制最大可测高度范围。除波长扫描范围之外，测量高度的分辨力也依赖于被测对象的粗糙度和其距最佳焦点的距离（Yamaguchi et al.，1998）。

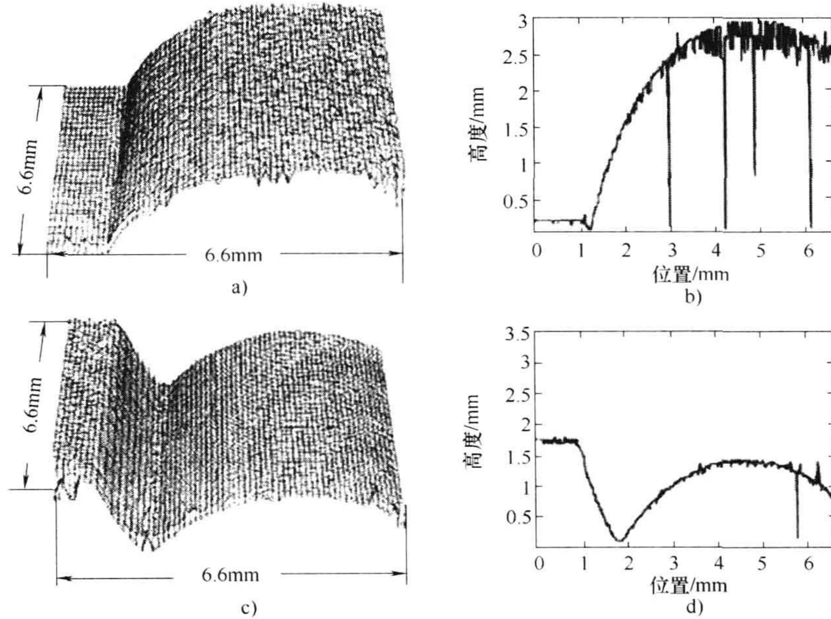


图 15.43　柱状表面位于远离参考镜虚焦点的位置时，波长扫面干涉法测量的结果（Yamaguchi et al.，2000）
a）表面　b）图形和结果显示（如果物体表面穿过参考镜的虚焦点位置，能存在的标记模糊问题　c）表面　d）图形

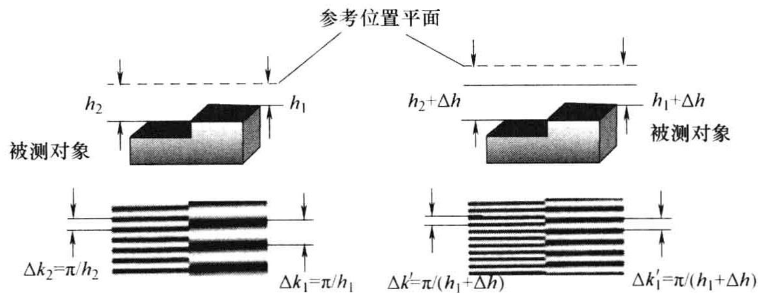


图 15.44　当被测对象处于光轴上的两个不同位置时，波长扫描干涉仪所测得的干涉条纹（参考面和被测对象之间距离的增加导致了条纹频率的增大。）

针对非佐装置，在信号分析中必须计入参考镜面和被测对象之间的多次反射（Yamaguchi et al.，2000），虽然所得到的信号不像在迈克耳逊装置中那样是正弦型的，但是基本周期是相同的。在非佐装置中，被测对象是只在参考镜的一边，因此不存在高度推导的模糊

问题。

波长扫描在很多光学方法中都有应用，例如光频域反射计、测距（Kikuta et al.，1986）、散斑干涉测量及最近的数字全息（Pawlowski et al.，2004）。提兹安林（Tiziani，2000）和塔科德等人（Takeda et al.，2005）已经就波长扫描干涉检测技术及其应用进行了全面的评述。

15.7.4 薄膜和平板厚度的测量

波长扫描干涉仪不仅可以用于形状的测量，而且可以用于透明物体厚度（或者色散）的测量。在这种情况下，通过多个光学表面的波前反射会产生很多相互叠加的干涉图。在波长扫描过程中，每一对近似平面反射波前和平行波前构成的干涉对都会产生反映平均光程差的主要频率特征的光谱条纹。其中的一些反射并不是所期望的，而在过去十五年多的时间里，已经有了一些基于在数据处理阶段分离这些不同的干涉图案的方法，这样可以避免将样品浸入油中或者在表面涂上折射率匹配漆（Okada et al.，1990；Deck，2003；de Groot，2000；Burke et al.，2006；Hibinoet al.，2003；Hibino et al.，2004；Hibino and Takatsuji，2002）。但是这些技术不能用于测量小到几个微米的厚度。几个微米厚的透明薄层的测量往往是将其涂在光电子器件上，而在这些薄层上分离不同的频率是不可能的，直到 Kim 提出了一种类似于用于 WLI 上的技术（Kim et al.，2002；Kim and Kim，2004）来测量这些非常薄的厚度。

15.8 光谱分辨白光干涉测量

一个波长范围很宽的光谱干涉条纹也可以利用分光计通过离散白光条纹而观察到。这种光谱分辨条纹的观察方法称为光谱分辨白光干涉测量（SRWLI），也是前面描述过的波长扫描的一种替代方法。SRWLI 的主要优点是对于间断高度达几十微米的轮廓可以利用单一的光谱干涉图计算得出。

虽然最初由施温德和周（Zhou）提出的用于表面轮廓测量的光谱分辨白光干涉仪（Schwider and Zhou，1994）是基于菲佐干涉仪的，但是这些系统实质上是基于迈克耳逊系统。为了便于观察光谱和分辨条纹，这些干涉仪将分光计与 CCD 相机结合起来使用。如图 15.45 所示，条纹所在的平面位置通过分光计的入射狭缝成像到 CCD 相机上。分光计沿 CCD 相机的颜色轴将测量对象的单根白光条纹分离成光谱条纹。不同类型的分光计都可以使用，例如棱镜或者光栅光谱仪。

科学家们一百年前观察到的条纹基本上是“信道频谱”。在这方面光谱分辨干涉测量并不算是一种新的技术，但是，计算机、固体器件和分光计的发展使得该信道频谱在很多方面得以应用。光谱分辨白光条纹有许多不同的应用，例如测量不同的折射率、折射率分布、波分复用、图像传输、距离和位移的测量，最近又在轮廓测量上得到应用。

15.8.1 图像构成

在光谱分辨白光干涉仪中，颜色轴沿着 CCD 相机中垂直于分光计狭缝的轴向。CCD 相机的行（或列）像素记录下光谱干涉信号，根据该信号可以计算出被测对象上此点的光谱相位或条纹频率，从而推导出被测对象与相对应参考点之间的距离信息，而且 CCD 的每一

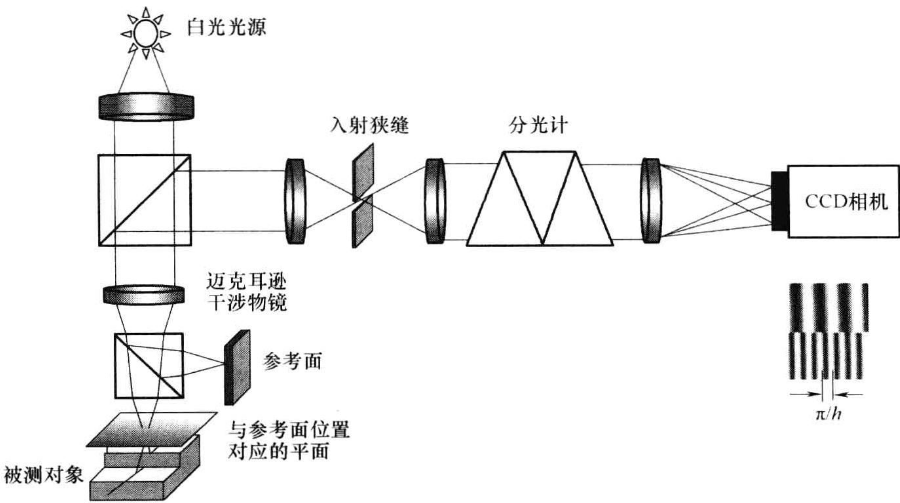


图 15.45　光谱分辨白光干涉仪

帧都给出了被测对象沿一个方向的轮廓信息，如图 15.46 所示。因此，为了得到三维轮廓，需要对被测对象进行横向扫描。

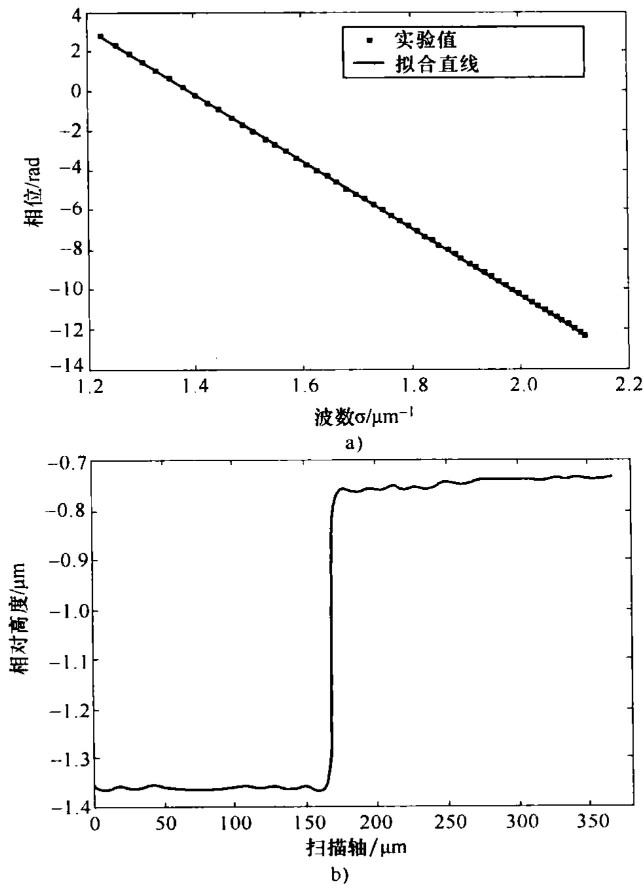


图 15.46　光谱分辨白光干涉仪测量结果

a）被测对象上一个点沿颜色轴的光谱相位　b）台阶轮廓

具有横向扫描的光谱分辨白光干涉仪给出的条纹与波长扫描干涉仪的类型相同。我们可以认为收集到的数据是三维的（比较图 15.40 和图 15.47）。差别在于两个三维数据图中坐标轴注释的不同。在波长扫描干涉法中（参见图 15.40），一帧 CCD 数据给出了在空间坐标 x、y 处的单色干涉图。第三个坐标轴即颜色轴，代表了在对光源波长扫描过程中的实时记录的干涉图。在光谱分辨白光干涉仪中，一帧 CCD 数据给出在颜色-空间坐标下的光谱条纹。第三个坐标轴是空间轴，表示的是在横向扫描过程中实时记录的干涉图。

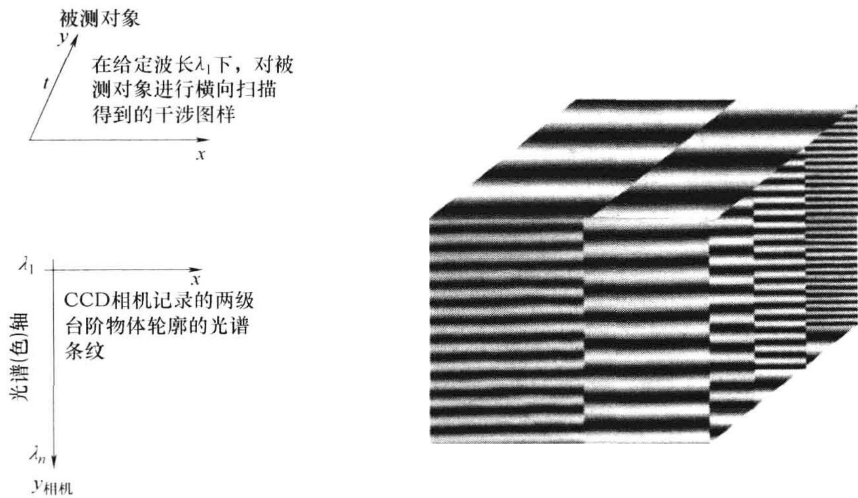


图 15.47 光谱分辨干涉仪获得的台阶物体的三维数据
（台阶相对于参考镜相对垂直于台阶的轴倾斜）

像在波长扫描干涉测量中一样，测量的动态范围受分光计的光谱分辨力的限制（相当于波长扫描干涉测量中的调节步长），而分辨力由光源谱宽（调谐范围）决定。

CCD 相机的颜色轴通常由镉（Cd）灯来校准，镉灯有四条谱线，波长分别为 643.8nm、508.6nm、480nm 和 467.8nm。这些波长分配到相机中对应的像素上，如图 15.48a 所示。对于其余像素的波长由哈曼特公式校准，如图 15.48b 所示。

15.8.2 信号分析

为了确定被测对象相对于参考平面之间的距离，通过测量条纹的频率（如波长扫描干涉测量中那样）或光谱相位的斜率（Schwider and Zhou，1994）来分析光谱干涉图。这两种方法都需要条纹的载波频率，而这可以由被测对象与参考平面镜之间的距离来控制。光谱相位斜率 $\Delta\varphi/2\Delta k$ 可以利用傅里叶变换（Takeda and Yamamoto，1994）或空间相移方法（Sandoz et al.，1996）来测量。虽然载波技术只需要一帧数据，但是这些方法不能辨别光谱相位斜率的标记。与波长扫描干涉仪中一样，光谱相位斜率的标记决定了被测对象相对于参考平面镜的位置，是在其上面还是在其下面，而现在这一信息遗失了。另外，载波技术可能会受到穿过颜色轴的被测对象的背景辐射变化的影响。

在光谱分辨白光干涉仪中，利用 PSI 方法来提高测量的光谱相位和高度分辨率，同时克服了相位标记的困难。PSI 方法给出了关于光谱相位斜率的信息，而不需要带有载波频率的条纹，而且对背景辐射的空间变化不敏感（Helenetal，2001；Debnath and Kothiyal，2005）。

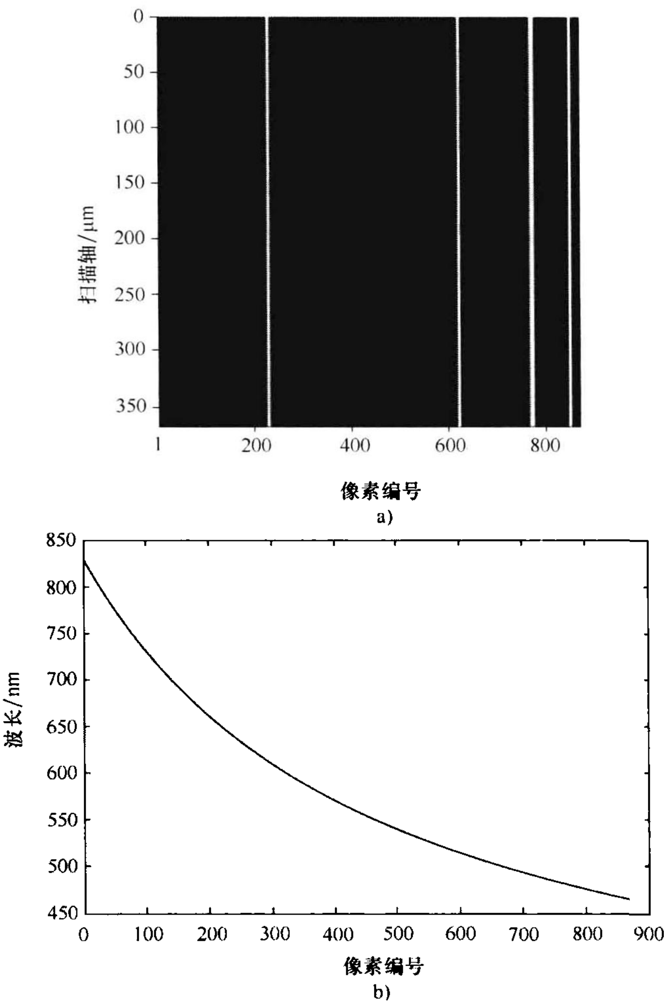


图 15.48　相机颜色轴的校准（Debnath and Kothiyal，2005）
a）Cd 灯谱在 CCD 上成的像　b）每一个像素计算得到的波长

使用这种方法，相对而言测量对象上的点可以在参考平面镜的任何一侧，且可与之非常接近。

厚膜和薄膜测量。通过绘制傅里叶变换的峰值（Haüsler and Lindner，1998；Zuluaga and Richards-Kortum，1999），光谱分辨干涉技术也可以用于测量薄至 2μm 的薄膜厚度。和在波长扫描干涉测量中一样，这种方法的问题在于由多个界面多次反射引起的假频率峰值，而且这种方法无法区分被测对象的界面是在参考平面镜的上面还是下面。2002 年，沃杰特克里斯等人（Wojtkowski et al.，2002）建议利用 PSI 方法可以完全确定光学薄膜界面位置。最近德彼艾斯等人（Debnath et al.，2006）指出利用 PSI 方法计算的光谱相位可以测量膜厚为 100nm 的工程样品。光谱分辨 WLI 允许同时记录样品的轮廓和薄膜厚度。

15.8.3　光谱干涉测量的其他名称

光谱分辨白光干涉测量和波长扫描干涉测量通常也称作光谱干涉测量。其中每种方法又都被赋予了不同的称谓。在文献中，光谱分辨白光干涉测量也可称作色散（白光）干涉测

量、白光信道频谱干涉测量或者空间分辨光谱干涉测量。波长扫描干涉仪也可称作光谱扫描干涉仪、频率扫描干涉仪、波长调谐干涉仪和光学频域显微轮廓仪。

在生物领域可以应用各种不同的光谱干涉测量，主要采用的是频域光学相干断层扫描（FD-OCT）技术。而典型的OCT是点测法，并且需要进行横向扫描，FD-OCT在频域中工作，因此避免了轴向机械扫描。在光学相干断层扫描领域，这两种方法一般也称作频域（或傅里叶）光学相干断层扫描（FD-OCT），有时也称为光谱雷达。

15.9 偏振干涉测量

在商用干涉仪中常常可通过分振幅法来实现分束，就像在泰曼-格林干涉仪、迈克耳逊干涉仪或菲佐干涉仪中用到的那样，这些系统的描述详见15.4.1节。当参考光束和测量光束的偏振态不同时，可通过利用一个偏振光束分光器来进行分束。我们把这些装置叫做偏振干涉仪，而且常常利用偏振技术来使干涉波前间产生相移，从而避免轴向机械相移或波长相移。对这样的系统，黑特尔（Hettwer，2000）文献中进行过描述。关于相移偏振技术详见15.9.2节。

不同类型的偏振干涉仪使用不同的偏振分束器来将入射光束分成两束光入射到被测物体上，这种技术形成了一个准共光路干涉仪。尽管偏振干涉仪的思想在20世纪初刚刚被人们所认识到，但是当这些系统应用于显微镜中并构成了微分干涉差显微镜时，才得到了推广。在一些书中（Françon and Mallick，1971；Pluta，1993；Polarvarapu，1997）和文献（Françon，1963）中，可以看到对不同类型偏振干涉仪的很好的评述。另外，在克里斯的书（Creath，1992）早先的版本中详述了另两种偏振干涉仪，Sommargren（Sommargren，1981）和Downs（Downs et al.，1985）。

当对小物体成像时，物体太小或远低于照明光波长的量级范围内，在偏振干涉仪中为了最终得到准确测量结果，了解照明光束的偏振态是如何影响反射及透射波前的就显得非常重要（Totzeck et al.，2005）。为了提高偏振干涉仪的分辨力，建议使用结构小孔滤波器（Totzeck，2002）。

15.9.1 微分干涉差显微镜（诺马斯基）

DIC干涉仪是由一个生于波兰的法国物理学家乔治·杰瑞·诺马斯基（Nomarski，1955）在1955年发明的，也称为偏振干涉差显微镜。在这种诺马斯基系统中用一种典型的宽谱光源（如卤素灯）通过起偏器后作为照明光，如图15.49所示。这束偏振光将通过DIC显微镜的核心部分，即一个改进了的沃拉斯顿（Wollaston）双折射棱镜对——诺马斯基棱镜。沃拉斯顿棱镜将这束偏振光分成两束正交的偏振光，并沿着稍有不同的角度传播。接着，两束光通过物镜入射到被测物体上，并且物体被彼此有些许分离的正交偏振光束照亮。因此此类干涉仪也称为剪切干涉仪。这个剪切量在几十到几百纳米量级，远低于物镜的分辨率。经过反射，两束产生了移动的光束通过物镜折回并被沃拉斯顿棱镜

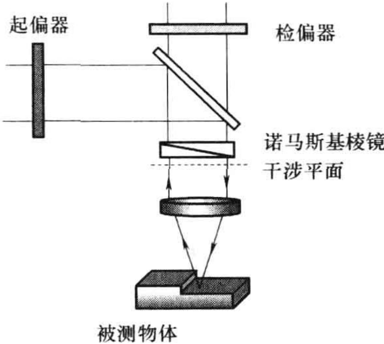


图15.49 反射模式下的微分干涉差显微镜

重新组成一束。考虑到要观察两束光的干涉，可在光束到达相机前放一检偏器。

干涉图形并不能直接体现像的形状，而是反映出像由沃拉斯顿棱镜导致的剪切方向上的梯度。这样，为了完全表征物体的特性，需要额外测量正交剪切量，这可以通过选装样本或光学器件实现。观察到的干涉色彩很明显，而且可反映出被测物体的一个虚三维影像。这些颜色随着剪切量的改变而发生变化，剪切量则是通过光束在沃拉斯顿棱镜轴向上的移动来改变的。

最初所有的 DIC 系统都是手动的，而且只能完成定性的分析。使用者往往手动地选一个沃拉斯顿棱镜的轴向位置，来获得最能清晰反映被测物特性的干涉图形样。最常用类型的 DIC 干涉仪用来定性观察半透明的生物样本，这种系统的工作方式是透射式的，而非反射式的。尽管不像白光干涉显微镜那样通用与商用化，反射模式工作时，DIC 干涉仪也可以给出传送有关物体表面轮廓的一些定性数据。一些关于剪切波前间光程差的观点，可通过来观察干涉色彩并与迈克尔-利维（Michel-Lévy）和拉格瓦（Lacroix）在 1889 年制作的干涉色彩图表对比来获得。一种更现实的既不需要颜色的对比还可以使用黑白 CCD 相机的技术，就是基于相移的干涉测量技术（见相移干涉测量章节和阿尼森等（Arnison et al.，2004）于 2004 年发表的文献）。干涉光束之间的相移可以通过横向移动沃拉斯顿棱镜或旋转偏振片来获得。然而相移是与波长相关的，并且条纹的对比度会随着相移发生变化。为避免改变对比度，可用基于几何相位的消色差相移（Hariharan，1996）。一旦在两个正交方向上获得被测物体反射的相同剪切波前的光程差，就可计算出物体的原始表面。DIC 干涉仪的优点就是它对振动几乎不敏感，因为它基本上是一个共光路干涉仪。这种干涉仪的主要限制因素是包括一个被测物体的可测深度和厚度较短，而且存在折射率梯度，这是因为和其他非扫描干涉显微镜一样，物镜的场深是有限的。相反，如果在被测物体与物镜间引入轴向扫描，那么就可以利用一个场深很小而高 *NA* 的物镜来进行光学层析。在半导体工业中，反射式 DIC 常用来检查集成电路的质量。有许多有用的关于反射式 DIC 的信息可在尼康或奥林巴斯公司的网站上找到。

15.9.2　几何相移

在许多干涉测量技术中都会包含干涉波前的相移。在白光和多波长干涉测量中用到的机械移相器，可针对所有的波长产生纳米量级的相同光程差变化，然而，当进行角度或弧度测量时，发生的相移，也就是所认为的动态相移，会随着波长的变化而变化。在角度或弧度的测量中，一种包含了光的偏振态周期变化的不同的相移技术可以针对所有波长产生相同的相移。这种相移也就是帕克阿特纳相移（Pancharatnam，1956），是一种典型的几何相移（Berry，1987），而且它可以不改变光程差来产生任何与波长无关的相移。因此，几何相移在干涉测量中有许多的应用（Hariharan，2005）。

在白光干涉中，几何相位的变化会使相干包络下的条纹发生移动（Hariharan et al.，1994），如图 15.50 所示。相干包络是稳定的，使得每一点的条纹对比度不变。动态相移时，整个干涉图形是移动的，这使得每一点条纹的对比度会发生变化。使用多波长干涉测量时，几何移相器可对干涉仪中用到的任意波长产生相同的相移，并且无需去改变移相器。

用来进行几何相移的消色差相移器可使用圆偏振光，如图 15.51 所示，还使用了一些偏振元件，例如在一个四分之一波片和偏振片后放置一个旋转二分之一波片，或者在一个四分之一波片和偏振片后再放置一个旋转偏振片。为了在两干涉光束之间引入相移，两束光的偏振态要相互正交。

图 15.52 所示为几何相移白光干涉显微镜，该显微镜参考臂和测量臂上的两束光是正交

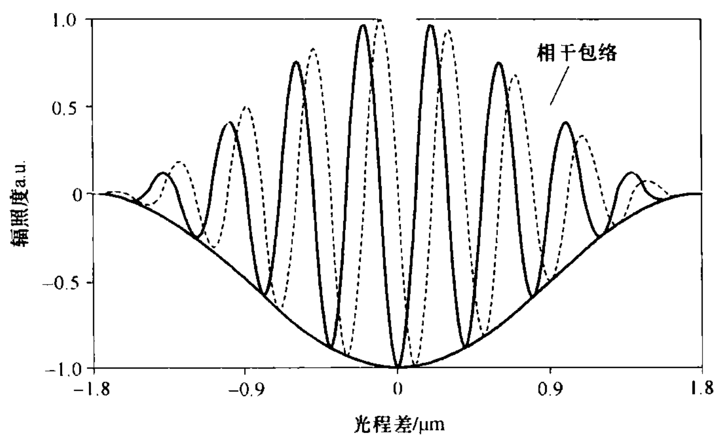


图 15.50 在消色差相移过程中，当相干包络保持稳定时，只有条纹发生移动

的线偏振光。几何移相器由夹在两个四分之一波片之间的一个旋转半波片组成，这两个四分之一波片的光轴与两束光的偏振方向的夹角为 45°（Hariharan and Ciddor，1994；Hariharan et al.，1994），该移相器置于干涉仪的出射端。这个干涉仪使用了如图 15.51a 所示的第一类几何移相器，该移相器的第一块四分之一波片可产生左旋和右旋的圆偏振光。然后二分之一波片依次将右旋圆偏光变为左旋圆偏光，左旋圆偏光变为右旋圆偏光。最后，第二块四分之一波片将这两束光回复到原来的正交线偏振状态。如果将半波片转动 α，则一束线偏振光的相移为 $+2\alpha$，另一束与之正交的线偏振光相移则是 -2α，这样两束光就会产生 4α 的相位差。这类相位差在整个可见光波段几乎与波长无关。偏振片使两束光干涉成为可能。

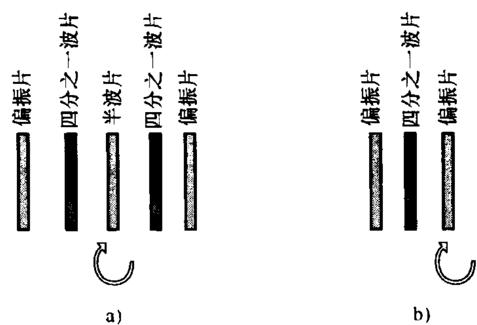


图 15.51 进行几何相移的消色差相移器中可以使用偏振元件
a）带有旋转波片的几何移相器
b）带有旋转偏振片的几何相移器

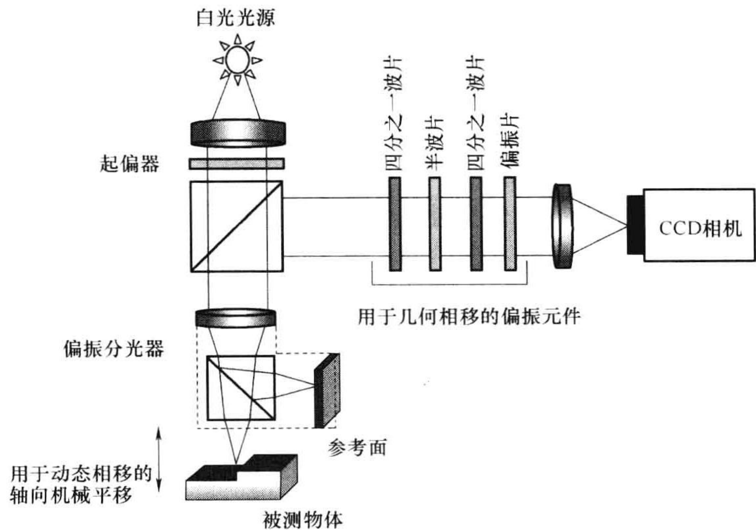


图 15.52 几何相移白光干涉显微镜（在轴向扫描的每一个位置（大约每 150nm）引入几何相移，采集几帧数据来计算条纹的对比度。）

图15.51b给出的是第二类几何移相器，它只需要将一个旋转偏振片放置在一块1/4波片后，该1/4波片会将干涉仪中的两束光改为左旋或右旋圆偏振光。在这种情况下，若测量光为左旋圆偏振光，参考光为右旋圆偏振光，并且两光束入射到线偏振片上，该线偏振片的起偏方向与x轴夹角为α，穿过偏振片的测量光与参考光就会变成沿α方向偏振的线偏振光。这样，测量光会附加上$+\alpha$的相移，参考光会附加上$-\alpha$的相位移动。将线偏振片旋转α角，这样两干涉光之间就会产生2α的相移。线偏振片的作用就相当于一个移相器，同时能够使两光束产生干涉。一块消色差1/4波片可以在使用这种相移器时用来扩大其光谱范围，它能够消除当波长很小时，由于1/4波片的研制导致系统产生的相移变化（Helen et al.，1998；Millerd et al.，2004）。

在工业应用中测量时间是很重要的，如果可以同时采集几幅干涉图，则可减少测量时间。这可以利用图15.53所示的系统来实现（Millerd et al.，2004）。这个装置中的偏振分束器可使参考光束和测量光束具有正交的偏振态。四分之一波片放置在参考和测量光束中，这样最初通过分束器传输的光束在返回时被反射，反之亦然。这两光束通过四分之一波片，它将两束正交偏振光改变为左旋或右旋圆偏振光，接着通过一个相位掩模。当相位掩模正好放在相机中CCD阵列的前端时，四分之一波片放在干涉仪的出口端或相机的前端。

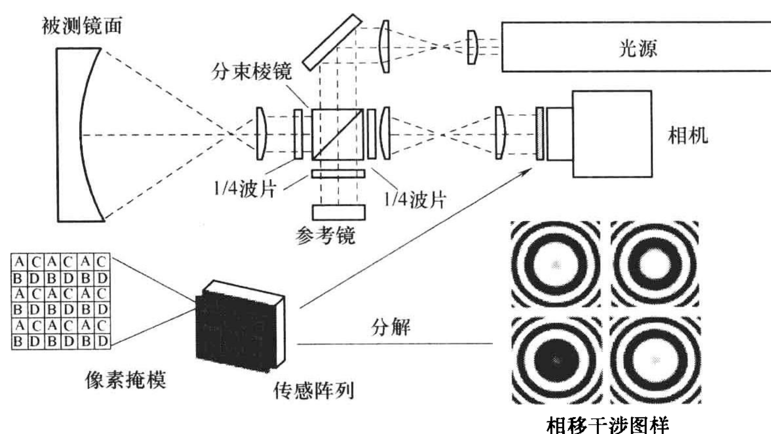


图15.53　实时相移干涉仪（4D技术供图）

相位掩模是由4个线偏振单元构成的微型偏振片阵列，线偏振单元的轴向分别是0°、45°、90°和－45°，如图15.54a所示。或如图15.54b所示的0°、45°、－45°和90°，将其组合起来后，每一个偏振单元正好位于一个探测单元之前。这四个线偏振单元在测量光和参考光之间引入0°、90°、180°和270°的相移。这样的话，通过每一组像素，如图15.54c所示，

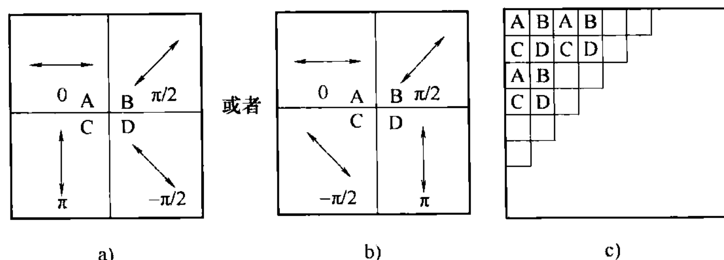


图15.54　位相滤波器（4D Technology公司供图）

a）提供0°、90°、180°和－90°相移的4个偏振单元　b）提供0°、90°、－90°和180°相移的4个偏振单元　c）4个偏振单元构成阵列形成的相位滤波器

就可以用一个 CCD 阵列同时获得四幅相移干涉图。

可以看到，相位掩模可用来做几何移相器。其中两个最基本的要求是：测量光与参考光要有正交的偏振态，微偏振片阵列与 CCD 阵列匹配。

15.10 光学测距方法

光学测距方法是典型的单点法，用于测量诸如长度、距离、振动或者折射率。这些可以基于不同的原理，例如，用在激光三角测量中的几何光传输，或者基于干涉测量原理，或者基于光脉冲的传输时间测量。如果引入扫描，所有这些方法就都可以提供物体的三维测量。单点法通常是以光纤和高速单点探测器为基础。一些方法能够且已经与那些能够多点并行传输信息的探测器阵列合用，这样可以不需要通过点到点的扫描就可以完成整个范围信息的传递。介绍不同光学测距方法的综述文章有阿曼等（Amann et al.，2001）、布勒斯（Blais，2004）、陈等（Chen et al.，2000）、德·格如特（de Groot，2003）、弗瑞德曼（Friedman，2003）及瓦格纳和哈斯勒（Wagner and Hausler，2003）。激光远距测量的论文集是由博施和勒斯基（Bosch and Lescure，1995）整理的。

15.10.1 干涉测距

干涉测距是以白光、双波长、多波长，光谱干涉仪为基础的（Gerges et al.，1987；Smith and Dobson，1989；Danielson and Boisrobert，1991；de Groot and McGarvey，1992；de Groot，1992；Haruna et al.，1998；Bosch et al.，2001；Hariharan，2003）。多波长干涉测量早在 1895 年就已经用于测量标准具的长度（Michelson and Benoit，1895），以克服单波长干涉测量的局限性。这些方法已经成功地发展为本章所描述的非常精确的三维轮廓技术。

15.10.2 光学三角测量

三角测量传感器探测由一束狭窄激光束照在物体上形成的背景散射光（Dorsch et al.，1994）。反射光用一个位置敏感器件来探测。从传感器上光斑位置的改变可以确定物体距离的变化。激光扫描和狭缝扫描都基于光学三角测量。光学三角测量的原理可以用于接触式轮廓仪中，如探针轮廓仪及用于探测扫描探针位置的原子力显微镜。

15.10.3 渡越时间（TOF）

这类系统以光的传播作为测量工具，因为光速是一个已确定的基本常数。通过计算光传输到物体并返回所用的时间来测量距离。渡越时间法更适合测量长距离，这种方法用来测量地球到月球的距离。加上一个扫描系统后，还可以获得航空地貌。TOF 测量的分辨率范围从 0.3mm 到几厘米或者更大。布勒斯（Blais，2004）和莫宁（Moring，1989）等人就 TOF 系统曾作过很好的评述。

15.11 总结

本章介绍的所有方法都是用来进行形貌测量的，这些方法涉及了多种接触（触知）和非接触（光学）方法。通常情况下，工业的需求推动着技术的发展，这使得我们能够在一

个特定的环境下从具体的样本中提取细节信息。例如检测表面不规则的 MEMS 器件通常是很困难的；像测量横向和纵向移动及变形表面，都要通过一块保护样本的玻璃来完成。此外，减少测量时间也往往是要优先考虑的。

接触式方法已经发展出了长、窄和更小曲率半径的针尖，以及更小施力和新的移动方式，这样可以对更大范围的样品实现高精度且无损的测量。原子力显微镜或者扫描探针显微镜探针间的相互作用技术提供了越来越多的不同材料的电、磁和机械特性的信息。然而，由于这些技术均是点对点的扫描技术，因此减少测量时间常常很关键。

在大范围高度测量中，光学方法不断地提高其垂直分辨率。近年来，发展了许多测量更复杂样品的技术，那些样品由不同的材料或透明涂层构成。已经开发出了很多算法来获取膜层的厚度和轮廓测量信息，以及由于不同材料反射光的相位变化产生的修正信息。此外，为了检测大型物体的形貌，新型的对振动不敏感的光学方法正在被开发起来，用于检测大型物体的形貌。

我们预计目前新技术开发的趋势是继续提高纵向和横向范围及分辨率。此外，为了增大应用空间，检测方法和系统都将继续改进。例如，可预见的新应用包括：测量浸入液体中的样品的测量方法；对含有难以达到的区域（如毫米尺度的小孔）的样本，如毫米尺度的小孔；现场监测和测量。相关这些技术都在不断地发展。最后，对于生物标本的测量，我们可能会常常用到光学相干断层扫描和共焦显微镜技术。

致谢

感谢马太·斯密（Matthew Schmi）为本章提供插图。

参考文献

Abdulhalim I., "Theory for Double Beam Interference Microscopes With Coherence Effects and Verification Using the Linnik Microscope," *J. Mod. Opt.*, **48**, 279–302 (2001).

Aguilar J. F. and E. R. Méndez, "On the Limitations of the Confocal Scanning Optical Microscope as Profilometer," *J. Mod. Opt.*, **42**, 1785–1794 (1995).

Al-Jumaily G. A., S. R. Wilson, K. C. Jungling, J. R. Mcneil, and J. M. Bennett, "Frequency Response Characteristics of a Mechanical Stylus Profilometer," *Opt. Eng.*, **26**, 953–958 (1987).

Alexander S., L. Hellemans, O. M. J. Schneir, V. Elings, P. K. Hansma, M. Longmire, and J. Gurley, "An Atomic-Resolution Atomic-Force Microscope Implemented Using an Optical Lever," *Applied Phys.*, **65**, 164–167 (1989).

Amann M.-C., T. Bosch, M. Lescure, R. Myllylä, and M. Rioux, "Laser Ranging: A Critical Review of Usual Techniques for Distance Measurement," *Opt. Eng.*, **40**, 10–19 (2001).

Arnison M. R., K. G. Larkin, C. J. R. Sheppard, N. I. Smith, and C. J. Cosgwell, "Linear Phase Imaging Using Differential Interference Contrast Microscopy," *J. Microscopy*, **214**, 7–12 (2004).

Balsubramanian N., *Optical System for Surface Topography Measurement*, US Patent **4**, 340,306 (1982).

Barnes T. H., T. Eiju, and K. Matsuda, "Rough Surface Profile Measurement Using Speckle Optical Frequency Domain Reflectometry With External Cavity Tunable Diode Laser," *Optik*, **103**, 93–100 (1996).

Bartoli A., P. Poggi, F. Quercioli, B. Tiribilli, and M. Vassalli, "Optical Profilometer with a Standalone Scanning Sensor Head," *Opt. Eng.*, **40**, 2852–2859 (2001).

Benford J. R., "Microscope Objectives," in: R. Kingslake (Ed.), *Applied Optics and Optical Engineering*, vol. III, Academic Press, New York, 1966, pp. 145–182.

Bennett J. M., "Precise Method for Measuring the Absolute Phase Change Upon Reflection," *J. Opt. Soc. Amer.*, **54**, 612–624 (1964).

Bennett J. M. and J. H. Dancy, "Stylus Profiling Instrument for Measuring Statistical Properties of Smooth Optical Surfaces," *Appl. Opt.* **20**, 1785–1802 (1981).

Bennett J. M. and L. Mattson, *Introduction to Surface Roughness and Scattering*, Optical Society of America, Washington, D.C., 1989.

Bennett J. M., V. Elings, and K. Kjoller, "Precision Metrology for Studying Optical Surfaces," *Opt. Photonics News*, **2**, 14–18 (1991).

Benoit M. R., "Application Des Phénomènes D'interférence a Des Déterminations Métrologiques," *J. Phys.(Paris)*, **3**, 57–68 (1898).

Berry M.V., "The Adiabatic Phase and Pancharatnem's Phase for Polarized Light," *J. Mod. Opt.*, **34**, 1401–1407 (1987).

B. Jena, J. K. Horber, L. Wilson and P. Matsudaira (Eds.), *Atomic Force Microscopy in Cell Biology*, vol. **68**, Academic Press, San Diego, 2002.

Bhushan B., H. Fuchs, S. Hosaka, *Applied Scanning Probe Methods*, Springer, Berlin, 2004.

Biegen B. and R. Smythe, "High Resolution Phase Measuring Laser Interferometric Microscope for Engineering Surface Metrology," *Proc. SPIE*, **1009**, 35–44 (1988).

Binnig G. and H. Rohrer, "Scanning Tunneling Microscopy," *Helv. Phys. Acta*, **55**, 726–735 (1982).

Binnig G. and H. Rohrer, "The Scanning Tunneling Microscopy," *Sci. Amer.* (August, 1985).

Binnig G., C. F. Quate, and C. Gerber, "Atomic Force Microscope," *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 930–933 (1986).

Blais F., "Review of 20 Years of Range Sensors Development," *Journal of Electronic Imaging*, **13**, 231–240 (2004).

Bonnell D. A. (Ed.), *Scanning Probe Microscopy and Spectroscopy: Theory, Techniques, and Applications*, 2nd ed., Wiley-VCH, New York 2000.

Born M. and E. Wolf, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, 7th ed., University Press, Cambridge, 1999.

Bosch T. and M. Lescure (Eds.), *Laser Distance Measurements*, vol. MS 115, SPIE Optical Engineering Press, Bellingham, 1995.

Bosch T., N. Servagent, and S. Donati, "Optical Feedback Interferometry for Sensing Application," *Opt. Eng.*, **40**, 0–27 (2001).

Braga P. C. and D. Ricci, *Atomic Force Microscopy: Biomedical Methods and Applications*, Humana Press, Totowa, NY, 2004.

Breitmeier U. and R. J. Ahlers, "Dynamically Focusing Electro-Optical Sensor System for Microprofilometry," *Proc. SPIE*, **802**, 170–173 (1987).

Brodman R. and W. Smilga, "Evaluation of a Commercial Microtopography Sensor," *Proc. SPIE*, **802**, 165–169 (1987).

Browne M. A., O. Akinyemi, and A. Boyde, "Confocal Surface Profiling Utilizing Chromatic Aberration," *Scanning*, **14**, 145–153 (1992).

Bruce C. F. and B. S. Thornton, "Obliquity Effects in Interference Microscopes," *J. Sci. Instrum.*, **34**, 203–204 (1956).

Burke J., K. Hibino, R. Hanayama and B. F. Oreb., "Simultaneous Measurement of Several Near-Parallel Surfaces With Wavelength-Shifting Interferometry and a Tunable Phase-Shifting Method," *Optics Lasers Eng.* **45**, 326-341 (2007).

Caber P. J., "Interferometric Profiler for Rough Surfaces," *Appl. Opt.*, **32**, 3438–3441 (1993).

Carré P., "Installation Et Utilisation Du Comparateur Photoelectrique Et Interferentiel Du Bureau International De Poids Et Mesures," *Metrologia*, **2**, 13–23 (1966).

Cha S. P., C. Lin, L. Zhu, P. Sun, and Y. Fainman, "Nontranslational Three-Dimensional

Profilometry by Chromatic Confocal Microscopy with Dynamically Configurable Micromirror Scanning," *Appl. Opt.*, **39**, 2605–2613 (2000).

Chen F., G. M. Brown, and M. Song, "Overview of Three-Dimensional Shape Measurement Using Optical Methods," *Opt. Eng.*, **39**, 10–22 (2000).

Cheng Y. Y. and J. C. Wyant, "Two-Wavelength Phase Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **23**, 4539–4543 (1984).

Cheng Y. Y. and J. C. Wyant, "Multiple-Wavelength Phase-Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **24**, 804–807 (1985).

Church E. L. and S. R. Lange, "Structure Effects in Optical Surface Metrology," *Proc. SPIE*, **680**, 124–140 (1986).

Cleveland J. P., B. Anczykowski, A. E. Schmid, and V. B. Elings, "Energy Dissipation in Tapping Mode Atomic Force Microscopy," *App. Phys. Lett.*, **72**, 2613–2615 (1998).

Cohen D. K., W. H. Gee, M. Ludeke, and J. Leikowics, "Automatic Focus Control: The Astigmatic Lens Approach," *App. Opt.* **23**, 565–570 (1984).

Cohen D., P. J. Caber, and C. Brophy, *Rough Surface Profiler and Method*, U.S. Patent 5,133,601 (filed June, 1991; issued July, 1992).

Cohen S. H. and M. L. Lightbody (Eds.), *Atomic Force Microscopy/Scanning Tunneling Microscopy 2*, Springer, New York 1999.

Corle T. R., C. H. Chou, and G. S. Kino, "Depth Response of Confocal Optical Microscopes," *Opt. Lett.*, **11**, 770–772 (1986).

Corle T. R. and G. K. Kino, *Confocal Scanning Optical Microscopy and Related Imaging Systems*, Academic Press, New York, 1996.

Creath K., "Measuring Step Heights Using an Optical Profiler," *Proc. SPIE*, **661**, 296–301 (1986).

Creath K., "Calibration of Numerical Aperture Effects in Interferometric Microscope Objectives," *Appl. Opt.*, **28**, 3333–3338 (1989).

Creath K., "Sampling Requirements for White Light Interferometry," *Fringe'97 Proceedings of the 3rd International Workshop on Automatic Processing of fringe patterns* 52–59 (1997).

Creath K. and A. Morales, "Contact and Non contact Profilers," in D. Malacara, Ed., Optical Shop Testing Wiley, New York, 1992.

Creath K. and J. C. Wyant, "Direct Phase Measurement of Aspheric Surface Contours," *Proc. SPIE*, **645**, 101–106 (1986a).

Creath K. and J. C. Wyant, "From Angstroms to Microns: Extending the Measurement Range of Optical Profilers," *Proc. OSA. Fabrication and Testing Meeting Digest*, Seattle, Washington (1986b).

Creath K., Y. Y. Cheng, and J. C. Wyant, "Contouring Aspheric Surfaces Using Two-Wavelength Phase-Shifting Interferometry," *Opt. Acta*, **32**, 1455 (1985).

Dandliker R., E. Zimmermann, and G. Frosio, "Electronically Scanned White-Light Interferometry: A Novel Noise-Resistant Signal Processing," *Opt. Lett.*, **17**, 679–681 (1992).

Danielson B. L. and C.Y. Boisrobert, "Absolute Optical Ranging Using Low Coherence Interferometry," *Appl. Opt.*, **30**, 2975–2979 (1991).

Davidson M., K. Kaufmn, I. Mazor, and F. Cohen, "An Application of Interference Microscopy to Integrated Circuit Inspection and Metrology," *Proc. SPIE*, **775**, 233–247 (1987).

Debnath S. K. and M. P. Kothiyal, "Optical Profiler Based on Spectrally Resolved White Light Interferometry," *Opt. Eng.*, **44**, 013606 (2005).

Debnath S. K., M. P. Kothiyal, J. Schmit, and P. Hariharan, "Spectrally Resolved White-Light Phase-Shifting Interference Microscopy for Thickness Profile Measurement of Transparent Thin-Film Layers on Patterned Substrates," *Opt. Express*, **14**, 4662–4667 (2006).

Deck L. L., "Fourier-Transform Phase-Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **42**, 2354–2365 (2003).

Deck L. and P. de Groot, "High-Speed Noncontact Profiler Based on Scanning White-Light

Interferometry," *Appl. Opt.*, **33**, 7334–8 (1994).

Decker J. E., J. R. Miles, A. A. Madej R. Siemsen, K. J. Siemsen, S. de Bonth, K. Bustraan, S. Temple, and J. R. Pekelski., "Increasing the Range of Unambiguity in Step-Height Measurement with Multiple-Wavelength Interferometry-Application to Absolute Long Gauge Block Measurement," *Appl. Opt.*, **42**, 5670–5678 (2003).

de Groot P. J., "Three-Color Laser-Diode Interferometer," *Appl. Opt.*, **30**, 3612–3616 (1991).

de Groot P. J., "Chromatic Dispersion Effects in Coherent Absolute Ranging," *Opp. Lett.*, **17**, 898–900 (1992).

de Groot P. J., "Extending the Unambigous Range of Two-Color Interferometers," *Appl. Opt.*, **33**, 5948–5953 (1994).

de Groot P. J., "Measurement of Transparent Plates with Wavelength-Tuned Phase-Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **39**, 2658–2663 (2000).

de Groot P. J., "Optical Metrology," in: T. G. Brown, K. Creath, H. Kogelnik, et al. (Eds.), *The Optics Encyclopedia* (Vol. 3), Wiley-VCH Verlag GmbH& Co. KGaA, Weinheim, 2003, pp. 2085–2117.

de Groot P. J. and L. Deck, "Surface Profiling by Analysis of White-Light Interferograms in the Spatial Frequency Domain," *J. Mod. Opt.*, **42**, 389–401 (1995).

de Groot P. J., X. C. de Lega, J. Kramer, and M. Turzhitsky, "Determination of Fringe Order in White Light Interference Microscopy," *Appl. Opt.*, **41**, 4571–4578 (2002).

de Groot P. J. and X.C. de Lega, "Signal Modeling for Low-Coherence Height-Scanning Interference Microscopy," *Appl. Opt.*, **43**, 4821–4830 (2004).

de Groot P. J. and S. Kishner, "Synthetic Wavelength Stabilization for Two-Color Laser-Diode Interferometry," *Appl. Opt.*, **30**, 4026–4033 (1991).

de Groot P. J. and McGarvey, " Chirped Synthetic-Wavelength Interferometry," *Opt. Lett.* 17, 1626-1628 (1992).

Diaspro A., *Confocal and Two-Photon Microscopy*, Wiley- Liss, New York, 2002.

Dobson S. L., P. C. Sun and Y. Fainman, "Diffractive Lenses for Chromatic Confocal Imaging," *Appl. Opt.*, **36**, 4744–4748 (1997).

Doi T., K. Toyoda and Y. Tanimura, "Effects of Phase Changes on Reflection and Their Wavelength Dependence in Optical Profilometry," *Appl. Opt.*, **36**, 7157–7161 (1997).

Dorsch R. G., G. Hausler and J. M. Herrmann, "Laser Triangulation: Fundamental Uncertainty in Distance Measurement," *Appl. Opt.*, **33**, 1306–1314 (1994).

Downs M. J., W. H. McGiven, and H. J. Ferguson, "Optical System for Measuring the Profiles of Supersmooth Surfaces," *Precision Engineering*, **7**, 211–215 (1985).

Dragoset R. A., R. D. Young, H. P. Layer, S. R. Mielczarek, E. C. Teague, and R. J. Celotta, "Scanning Tunelling Microscope Applied to Optical Surfaces," *Opt. Lett.*, **11**, 560–562 (1986).

Dragoset R. A. and T. V. Vorburger, "Scanning Tunneling Microscopy (STM) of a Diamond-Turned Surface and Grating Replica," *Proc. SPIE*, **749**, 54 (1987).

Duan Z., Y. Miyamoto, and M. Takeda, "Dispersion-Free Absolute Interferometry Based on Angular Spectrum Scanning," *Optics Express*, **14**, 655–663 (2006).

Dubois A., J. Selb, L. Vabre, and A.-C. Boccara., "Phase Measurement with Wide-Aperture Interferometers," *Appl. Opt.*, **39**, 2326–2331 (2000).

Egger M. D. and M. Petrán, "New Reflected-Light Microscope for Viewing Unstained Brain and Ganglion Cells," *Science*, **157**, 305–307 (1967).

Ei-Ghandoor H., "Tomographic Investigation of the Refractive Index Profiling Using Speckle Photography Techniques," *Opt. Com.*, **133**, 33–38 (1997).

Fercher A. F., H. Z. Hu, and U. Vry, "Rough Surface Interferomatry with Two-Wavelength Heterodyne Speckle Interferometry," *Appl. Opt.*, **24**, 2181–2188 (1985).

Françon M., "Polarization Interference Microscopes," *Appl. Opt.*, **3**, 1033–1036 (1963).

Françon M. and S. Mallick, *Polarization Interferometers*, Wiley-Interscience, London, New York, 1971.

Friedman M., "Metrology," in R. C. Driggers, Ed., *Encyclopedia of Optical Engineering*, Taylor and Francis 2003.

Gates J. W., "Fringe Spacing in Interference Microscopes," *J. Sci. Instrum.*, **33**, 507 (1956).

Gerges A. S., F. Farah, T. P. Newson, J. D. C. Jones, and D. A. Jackson, "An Interferometric Fiber-Optic Sensor Using Short Coherence Length Source," *Electron. Lett.*, **23**(21), 1110–1111 (1987).

Gu M., *Principles of Three-Dimensional Imaging in Confocal Microscopes*, World Scientific, Singapore, 1996.

Güntherodt H. J. and Wiesendanger, R., *Scanning Tunneling Microscopy I: General Principles and Applications to Clean and Absorbate-Covered Surfaces*, vol. 20, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Han S., "Packaged MEMS and MOEMS Measurement Using Through Transmissive Media (TTM) Profiler," *Proc. SPIE*, **6032**, 603203–1-5 (2006).

Hanley Q. S., P. J. Verveer, M. J. Gemkow D. Arndt-Jovin, and T. M. Jovin, "An Optical Sectioning Programmable Array Microscope Implemented with a Digital Micromirror Device," *J. Microsc.*, **196**, 317–331 (2000).

Hansma P. K. and J. Tersoff, "Scanning Tunneling Microscopy," *J. Appl. Phys.*, 61(2), R1 R23 (1987).

Harasaki A., J. Schmit, and J. C. Wyant, "Improved Vertical Scanning Interferometry," *Appl. Opt.*, **39**, 2107–2115 (2000).

Harasaki A., J. Schmit, and J. C. Wyant, "Offset Envelope Position Due to Phase Change on Reflection," *Appl. Opt.*, **40**, 2102–2106 (2001).

Hariharan P., "Achromatic Phase Shifting for Polarization Interferometers," *J.Mod. Opt.*, **43**, 1305–1306 (1996).

Hariharan P. *Optical Interferometry*, Academic Press, San Diego, 2003, pp. 113–118.

Hariharan P. "The Geometric Phase," in *Progress in Optics*, vol. 48, Elsevier, Amsterdam, 2005, pp. 149–201.

Hariharan P., B. F. Oreb, and T. Eiju, "Digital Phase-Shifting Interferometry: A Simple Error Compensation Phase Calculation Algorithm," *Appl. Opt.*, **26**, 2504 (1987).

Hariharan P. and P. E. Ciddor, "An Achromatic Phase Shifter Operating on the Geometric Phase," *Opt. Com.*, **110**, 13–17 (1994).

Hariharan P., K. G. Larkin, and M. Roy, "The Geometric Phase: Interferometric Observations with White Light," *J. Mod. Opt.*, **41**, 663–667 (1994).

Hariharan P. and M. Roy, "Interferometric Surface Profiling with White Light: Effects of Surface Films," *J. Mod. Opt.* **43**, 1797–1800 (1996).

Haruna M., M. Ohmi, T. Mitsuyama, T. Tajiri, M. Maruyama, and M. Hashimoto, "Simultaneous Measurement of the Phase and Group Indices and the Thickness of Transparent Plates by Low-Coherence Interferometry," *Opt. Lett.*, **23**, 966–968 (1998).

Häusler G. and J. M. Herrmann, "Physical Limits of 3D-Sensing," *Proc. SPIE: Optics, Illumination, and Image Sensing for Machine Vision VII*, **1822**, 150–158 (1992).

Häusler G. and J. Neumann, "Coherence Radar-an Accurate 3D Sensors for Rough Surfaces," *Proc. SPIE*, **1822**, 200–205 (1992).

Häusler G. and M. W. Lindner, "Coherence Radar" and "Spectral Radar"—New Tools for Dermatological Diagnosis," *J. Biomed. Optics*, **3**, 21–31 (1998).

Heflinger L. O. and R. F. Wuerker, "Holographic Contouring Via Multifrequency Lasers," *Appl. Phys. Lett.*, **15**, 28–30 (1969).

Helen S. S., M. P. Kothiyal, and R. S. Sirohi, "Achromatic Phase-Shifting by a Rotating Polarizer," *Opt. Com.*, **154**, 249–254 (1998).

Helen S. S., M. P. Kothiyal, and R. S. Sirohi, "Analysis of Spectrally Resolved White Light Interferograms: Use of a Phase Shifting Technique," *Opt. Eng.*, **40**, 1329–1336 (2001).

Hellmuth T., "Microscopy," in: T. G. Brown, K. Creath, H. Kogelnik, *The Optics Encyclopedia*, vol. 3, Wiley-VCH, Weinheim, 2003, pp. 1469–1531.

Hettwer A., J. Kranz, and J. Schwider, "Three Channel Phase-Shifting Interferometer Using Polarization-Optics and a Diffraction Grating," *Opt. Eng.*, **39**, 960–966 (2000).

Hibino K. and T. Takatsuji, "Suppression of Multiple-Beam Interference Noise in Testing an Optical-Parallel Plate by Wavelength-Scanning Interferometry," *Opt. Rev.*, **9**, 60–65 (2002).

Hibino K., B. F. Oreb, and P. S. Fairman, "Wavelength-Scanning Interferometry of a Transparent Parallel Plate with Refractive Index Dispersion," *Appl. Opt.*, **42**, 3888–3895 (2003).

Hibino K., B. F. Oreb, P. S. Fairman, and J. Burke, "Simultaneous Measurement of Surface Shape and Variation in Optical Thickness of a Transparent Parallel Plate in Wavelength-Scanning Fizeau Interferometer," *Appl. Opt.*, **43**, 1241–1249 (2004).

Hildebrand B. P. and K.A. Haines, "Multiple Wavelength and Multiple Source Holography Applied to Contouring Generation," *J. Opt. Soc. Am.*, **57**, 155–156 (1967).

Hirabayashi A., H. Ogawa, and K. Kitagawa, "Fast Surface Profiler by White-Light Interferometry by Use of a New Algorithm Based on Sampling Theory" *Appl. Opt.*, **41**, 4876–4883 (2002).

Ho R. and S. Shao, "Axial Resolution of Confocal Microscopes Revisited," *Optik*, **88**, 147–154 (1991).

Huntley J. M. and C. R. Coggrave, "Progress in Phase Unwrapping," *Proc. SPIE*, **3407**, 86–93 (1998).

Huntley J. M. and H. O. Saldner, "Temporal Phase-Unwrapping Algorithm for Automated Fringe Analysis," *Appl. Opt.*, **32**, 3047–3052 (1993).

Huntley J. M. and H.O. Saldner, "Error-Reduction Methods for Shape Measurement by Temporal Phase Unwrapping " *J. Opt. Soc. Am. A*, **14**, 3188–3196 (1997).

Ichihara A., T. Tanaami, K. Isozaki et al., "High-Speed Confocal Fluorescent Microscopy Using a Nipkow Scanner with Microlenses for 3-D Imaging of Single Fluorescent Molecule in Real Time," *Bioimages*, **42**, 57–62 (1996).

Ingelstam E., "Problems Related to the Accurate Interpretation of Microinterferograms," Paper presented at the Interferometry, National Physical Laboratory Symposium No. 11 (1960).

Ishii Y. and R. Onodera, "Two-Wavelength Laser-Diode Interferometry That Uses Phase-Shifting Techniques," *Opt. Lett.*, **16**, 1523–1525 (1991).

Itoh M., R.Yamada, R. Tian, M. Tsai, and T. Yatagai, "Broad-Band Light-Wave Correlation Topography Using Wavelet Transform," *Opt. Rev.*, 135–138 (1995).

Kikuta H., K. Iwata, and R. Nagata, "Distance Measurement by the Wavelength Shift of Laser Diode Light," *Appl. Opt.*, **25**, 2976–2980 (1986).

Kim D., S. W. Kim, H. J. Kim, H. J. Kong, and Y. Lee, "Measurement of the Thickness Profile of a Transparent Thin Film Deposited Upon a Pattern Structure with an Acousto-Optic Tunable Filter," *Opt. Lett.*, **27**, 1893–1895 (2002).

Kim D. and S. W. Kim, "Direct Spectral Phase Function Calculation for Dispersive Interferometric Thickness Profilometry," *Optics Express*, **12**, 5117–5124 (2004).

Kim S. W., M. G. Kang, and G. S. Han, "Accelerated Phase-Measurement Algorithm of Least Squares for Phase-Shifting Interferometry," *Opt. Eng.*, **36**, 3101–3106 (1997).

Kim S. W. and G. H. Kim, "Thickness-Profile Measurement of Transparentm Thin-Film Layers by White-Light Scanning Interferometry," *Appl. Opt.*, **38**, 5968–5973 (1999).

Kimura S. and T. Wilson, "Effect of Axial Pinhole Displacement in Confocal Microscopes," *Appl. Opt.*, **32**, 2257–2261 (1993).

Kino G. S., T. R. Corle, and G. Q. Xiao, "New Types of Scanning Optical Microscopes," *Proc. SPIE*, **921**, 116–22 (1988).

Kino G. S. and S. S. C. Chim, "The Mirau Correlation Microscope," *Appl. Opt.*, **29**, 3775–3783 (1990).

Kinoshita M., M. Takeda, H. Yago, Y. Watanabe, and T. Kurokawa, "Optical Frequency-Domain Microprofilometry with a Frequency-Tunable Liquid-Crystal Fabry-Perot Etalon Device," *Appl. Opt.*, **38**, 7063– 7068 (1999).

Kröner K., R. Windecker, M. Fleisher, and H. J. Tiziani, "One-Grating Projection for Absolute

Three-Dimensional Profiling," *Opt. Eng.*, **40**, 1653–1660 (2001).

Körner K., A. Ruprecht, and T. Wiesendanger, "Optical Profiling Techniques for Mems Measurement," in: W. Osten (Ed.), *Optical Inspection of Microsystems*,Taylor and Francis, Boca Raton, 2006.

Kuwamura S. and I. Yamaguchi, "Wavelength Scanning Profilometry for Real-Time Surface Shape Measurement," *Appl. Opt.*, **37**, 4473–4482 (1997).

Larkin K.G., "Efficient Demodulation for Bandpass Sampled Am Signals," *Electronics Letters*, **32**, 101–102 (1996a).

Larkin K.G., "Efficient Nonlinear Algorithm for Envelope Detection in White Light Interferometry," *J. Opt. Soc. Am. A*, **13**, 832–842 (1996b).

Lee B. S. and T. C. Strand, "Profilometry with a Coherence Scanning Microscope," *Appl. Opt.*, **29**, 3784–3788 (1990).

Lehmann P., "Optical Versus Tacticle Geometry Measurement – Alternatives or Counterparts" *Proc. SPIE*, **5144**, 183–196 (2003).

Lin P. C., P. C. Sun, L. Zhu, and Y. Fainman, "Single-Shot Depth-Section Imaging through Chromatic Slit-Scan Confocal Microscopy," *Appl. Opt.*, **37**, 6764–6770 (1998).

Magnov S. N., *Surface Analysis with Stm and Afm: Experimental and Theoretical Aspects of Image Analysis*, Wiley-VCH, Weinheim, 1996.

Martínez-Corral M., P. Andres, J. Ojeda-Castaneda, and G. Saavedra, "Tunable Axial Superresolution by Annular Binary Filters. Application to Confocal Microscopy," *Opt. Com.*, **119**, 491–498 (1995).

Martínez-Corral M., M. Kowalczyk, C. J. Zapata-Rodríguez, and P. Andrés, "Tunable Optical Sectioning in Confocal Microscopy by Use of Symmetrical Defocusing and Apodization," *Appl. Opt.*, **37**, 6914–6921 (1998).

Mehta, D. S., H. Hinosugi, S. Saito, M. Takeda, T. Kurokawa, H. Takahashi, M. Ando M., Shishido, and T. Yoshihawa, "Spectral Interferometric Microscope with Tandem Liquid-Crystal Fabry Perot Interferometers for Extension of the Dynamic Range in Three-Dimensional Step-Height Measurement" *Appl. Opt.*, **42**, 682–690 (2003a).

Mehta D. S., S. Saito, H. Hinosugi, M. Takeda, and K. Kurokawa, "Spectral Interference Mirau Microscope with an Acousto-Optic Tunable Filter for Three-Dimensional Surface Profilometry " *Appl. Opt.*, **42**, 1296–1305 (2003b).

Mehta D. S., M. Sugai, H. Hinosugi, S. Saito, M. Takeda, T. Kurokawa, H. Takahashi, M. Ando, M. Shishido, and T. Yoshihaua, "Simultaneous Three-Dimensional Step-Height Measurement and High-Resolution Tomographic Imaging with a Spectral Interferometric Microscope" *Appl. Opt.*, **41**, 3874–3885 (2002).

Michelson A.A. and J. R. Benoit, "Détermination Expérimentale De La Valeur Du Métre En Longueurs D'ondes Lumineuses," *Trav. Mem. Bur. Int Poids Mes.*, **11**, 1 (1895).

Millerd J. E., N. J. Brock, J. B. Hayes, M. North-Morris, M. Novak, and J. C. Wyant, "Pixelated Phase-Mask Dynamic Interferometer," *Proc. SPIE*, **5531**, 304–314 (2004).

Minsky M., *Microscopy Apparatus*, US Patent No. 3,013,467, (1961).

Molesini G., G. Pedrini, P. Poggi, and F. Quercioli, "Focus Wavelength Encoded Optical Profilometer," *Opt. Com.*, **49**, 229–233 (1984).

Montgomery, P, D. Montaner, O. Manzardo, and H. P. Herzig, "Lateral Error Reduction in the 3D Characterization of Deep MOEMS Devices Using White Light Interference Microscopy," *Proc. SPIE*, **5458**, 34–42 (2004).

Moring I., H. Ailisto, V. Koivunen, and R. Myllylä, "Active 3D Vision System for Automatic Model-Based Shape Inspection," *Opt. Lasers Eng.*, **10** (3–4), 149–160 (1989).

Nahm K. B. E., S. Shin and S.–M. Ryoo, "Three-Dimensional Reconstruction by Focus Sensing from Conventional 2D Image Sliced," *Proc. SPIE*, **3261**, 88–92 (1998).

Neil M. A. A., R. Jujskaitis, and T. Wilson, "Method of Obtaining Optical Sectioning by Using Structured Light in a Conventional Microscope," *Opt. Lett.*, **22**, 1905–1907 (1997).

Nomarski G., "Microinterferometre a Ondes Polarisees," *J. Phys. Radium* **16**, 9S–16S (1955).

North-Morris M. B., J. E. Millerd, N. J. Brock, and J. B. Hayes, "Phase Shifting Dynamic Multiwavelength Interferometer," *Proc. SPIE*, **5531**, 64–75 (2004).

Okada K., H. Sakuta, T. Ose, and J. Tsujiuchi, "Separate Measurements of Surface Shapes and Refractive Index Inhomogeneity of an Optical Element Using Tunable-Source Phase Shifting Interferometry," *Appl. Opt.*, **29**, 3280–3285 (1990).

Onodera R. I., "Fourier Description of the Phase-Measuring Process in Two-Wavelength Phase-Shifting Interferometry," *Opt. Com.*, **137**, 27–30 (1997).

Palik E. D. (Ed.) *Handbook of Optical Constants of Solids*, vol. I–III, Academic Press, San Diego, 1991.

Palmer J. M., "Getting Intense About Intensity," *Metrologia*, **30**, 371 (1993).

Pancharatnam S., "Generalized Theory of Interference and Its Applications Part I. Coherent Pencils," *Proc. Indian Acad. Sci.*, **A44**, 247-262 (1956).

Park M. C. and S.-W. Kim, "Compensation of Phase Change on Reflection in White-Light Interferometry for Step Height Measurement," *Opt. Lett.*, **26**, 420–422 (2001).

Park M. C. and Kim S.-W., "Direct Quadratic Polynomial Fitting for Fringe Peak Detection of White Light Scanning Interferograms," *Opt. Eng.*, **39**, 952–959 (2000).

Paulson L., M. Sjődahl, J. Kato, and I. Yamaguchi, "Temporal Phase Unwrapping Applied to Wavelength-Scanning Interferometry," *Appl. Opt.*, **39**, 3285–3288 (2000).

Pavlícek P. and J. Soubusta, "Theoretical Measurement Uncertainty of White-Light Interferometry on Rough Surfaces," *Appl. Opt.*, **42**, 1809–1813 (2003).

Pavlícek P. and J. Soubusta, "Measurement of the Influence of Dispersion on White Light Interferometry," *Appl. Opt.*, **43**, 766–770 (2004).

Pawley J. B. (Ed.), *Handbook of Biological Confocal Microscopy*, 2nd ed., Plenum Press, New York, 1995.

Pawlowski M., Y. Sakano, Y. Miyamoto, and M. Takeda, "Phase-Crossing Algorithm for White-Light Fringes Analysis," *Opt. Commun.*, **260**, 68–72 (2006).

Petran M., M. Hadravsky, M. D. Egger, and R. Galambos, "Tandem Scanning Reflected-Light Microscope," *J. Opt. Soc. Am. B*, **58**, 661-664 (1968).

Pförtner A. and J. Schwider, "Dispersion Error in White-Light Linnik Interferometers and Its Implications for Evaluation Procedures," *Appl. Opt.*, **40**, 6223 (2001).

Pluta M., *Advanced Light Microscopy: Measuring Techniques*, Elsevier Science Publishing Co, Amsterdam, 1993.

Polarvarapu P. L. (Ed.), *Principles and Applications of Polarization-Division Interferometry*, John Wiley & Sons, New York, 1997.

Polhemus C., "Two-Wavelength Interferometry," *Appl. Opt.*, **12**, 2071–2074 (1973).

Recknagel R.-J. and G. Notni, "Analysis of White Light Interferograms," *Opt. Com.*, **148**, 122–128 (1998).

Rogala E. W. and H. H. Barrett, "Phase-Shifting Interferometric Ellipsometer Capable of Measuring the Complex Index of Refraction and the Surface Profile of a Test Surface," *J. Opt. Soc. Am. A*, **15**, 538–548 (1998).

Roy M., I. Cooper, P. Moore, C. Sheppard, and P. Hariharan, "White-Light Interference Microscopy: Effects of Multiple Reflections within a Surface Film," *Optics Express*, **13**, 164–170 (2005).

Ruger D. and P. Hansma, "Atomic Force Microscopy," *Physics Today*, **43**, 23–30 (1990).

Ruprecht A. K., Wiesendanger, and T. F., Tiziani, H. J., "Chromatic Confocal Microscopy with a Finite Pinhole Size," *Opt. Lett.*, **29**, 2130–2132 (2004).

Saldner H. O. and J. M. Huntley, "Shape Measurement by Temporal Phase Unwrapping: Comparison of Unwrapping Algorithms," *Measurement Science & Technology*, **8**, 986–992 (1997a).

Saldner H. O. and J. M. Huntley, "Temporal Phase Unwrapping: Application to Surface Profiling of Discontinuous Objects," *Appl. Opt.*, **36**, 2770–2775 (1997b).

Sandoz P., "An Algorithm for Profilometry by White Light Phase Shifting Interferometry,"

J. Mod. Opt., **43**, 1545–1554 (1996).

Sandoz P., "Wavelet Transform as a Processing Tool in White-Light Interferometry," *Opt. Lett.*, **22**, 1065–1067 (1997).

Sarid D., *Scanning Force Microscopy*, Oxford University Press, New York, 1991.

Sarid D., D. Iams, V. Weissenberger, and L. S. Bell, "Compact Scanning-Force Microscope Using a Laser Diode," *Opt. Lett.*, **13**, 1057–1059 (1988).

Schmidt W. and A. F. Fercher, "Holographic Generation of Depth Contour Using a Flash-Lamp-Pumped Dye Laser," *Opt. Comun.*, **3**, 363–365 (1971).

Schmit J., "High Speed Measurements Using Optical Profiler," *Proc. SPIE*, **5144**, 46–56 (2003).

Schmit J. and K. Creath, "Window Function Influence on Phase Error in Phase-Shifting Algorithms," *Appl. Opt.* **35**, 5642–5649 (1996).

Schmit J., P. Unruh, A. Tavrov, W. Osten, N. Kerwien, and H. J. Tiziani, "Coherence Effects in Narrow Trench Measurements Using White Light Interferometry," *OSA Technical Digest*, **87**, MT41 (2003).

Schneider R., A. Schick, P. Köllensperger, and T. Ninomiya, "High-Speed Optical Three-Dimensional Scanner for Automatic Solder Joint Inspection," *Opt. Eng.*, **36**, 2878–2885 (1997).

Schneir J., J. A. Dagata, H. H. Harary, C. J. Evans, A. J. Melmed, H. B. Elswijk, and J. Sauvageau, "Scanning Tunneling Microscopy of Optical Surfaces," *Proc. SPIE*, **1164**, 112–120 (1989).

Schulz G. and K.-E. Elssner, "Errors in Phase-Measurement Interferometry with High Numerical Aperture," *Appl. Opt.*, **30**, 4500–4506 (1991).

Schwider J., R. Burrow, K.-E. Elssner, J. Grzanna, R. Spolaczyk, and K. Merkel, "Digital Wave-Front Measuring Interferometry: Some Systematic Error Sources," *Appl. Opt.* **22**, 3421–3432 (1983).

Schwider J. and L. Zhou, "Dispersive Interferometric Profilometer," *Opt. Lett.*, **19**, 995–997 (1994).

Scott P. J., "Recent Developments in the Measurement of Aspheric Surfaces by Contact Stylus Instrumentation, " *Proc. SPIE*, **4927**, 199–207 (2002).

Serry F. M. and J. Schmit, "Characterization and Measurement of Microcomponents with Atomic Force Microscopy," in W. Osten (Ed.), *Optical Inspection of Microsystems*, Taylor and Francis, Boca Raton, Florida, 2007.

Sheppard C. J. R., "Scanning Confocal Microscopy," R. G. Driggers, Ed., *Encyclopedia of Optical Engineering*, Marcel Dekker, New York, 2003, pp. 2525–2544.

Sheppard C. J. R., T. J. Connolly, J. Lee, and C. J. Cogswell, "Confocal Imaging of a Stratified Medium," *Appl. Opt.*, **33**, 631–640 (1994).

Sheppard C. J. R. and M. Gu, "Aberration Compensation in Confocal Microscopy," *Appl. Opt.*, **30**, 3563–3567 (1991).

Sheppard C. J. R. and M. Gu, "Axial Imaging Through an Aberrating Layer of Water in Confocal Microscopy," *Opt. Com.*, **88**, 180–190 (1992).

Sheppard C. J. R. and D.K. Hamilton, "Edge Enhancement by Defocusing of Confocal Images," *Opt. Acta*, **31**, 723–727 (1984).

Sheppard C. J. R. and K.G. Larkin, "Effect of Numerical Aperture on Interference Fringe Spacing," *Appl. Opt.*, **34**, 4731–4734 (1995).

Sheppard C. J. R. and M. Roy, "Low–Coherence Interference Microscopy" in P. Török and F. J. Kao, Eds., *Optical Imaging Microscopy*, Springer, Berlin, 2003, pp. 257–273.

Shiono T. and K. Setsune, "Wavelength-Independent Integrated Focus Sensor Using a Reflection Twin Micro-Fresnel Lens," *Appl. Opt.*, **28**, 5115–5121 (1989).

Smith L. M. and C. C. Dobson, "Absolute Displacement Measurement Using Modulatin of Spectrum of White Light in a Michelson Interfereometer," *Appl. Opt.* **28**, 3339–3342, (1989).

Smith P. J., C. M. Taylor, A. J. Shaw, and E. M. McCabe, "Programmable Array Microscopy with a Ferroelectric Liquid-Crystal Spatial Light Modulator," *Appl. Opt.*, **39**, 2664–2669 (2000).

Sommargren G. E., "Optical Heterodyne Profilometry," *Appl. Opt.*, **20**, 610–616 (1981).

Stout K. J. and L. Blunt (Eds.), *Three-Dimensional Surface Topography: Measurement, Interpretation and Application*, Penton Press, London, 1994.

Su C., L. Huang, and P. Nielson, *In-Situ Measurement of in-Plane and out-of-Plane Force Gradient with a Torsional Resonance Mode*, AFM, *AIP Proc.* **696**, 357– 364 (2003).

Takeda M., D. S. Mehta, M. Pawlowski, and T. Kurokawa, "Recent Developments in Spectral Interference Microscopes," *Proc. SPIE*, **5776**, 22–28 (2005).

Takeda M. and H. Yamamoto, "Fourier-Transform Speckle Profilometry: Three-Dimensional Shape Measurements of Diffuse Objects with Large Height Steps and/or Spatially Isolated Surfaces," *Appl. Opt.*, **33**, 7829–7837 (1994).

Tanaami T., S. Otsuki, N. Tomosada, Y. Kosugi, M. Shimizu, and H. Ishido, "High-Speed 1-Frame/ms Scanning Confocal Microscope with a Microlens and Nipkow Disks," *Appl. Opt.*, **41**, 4704–4708 (2002).

Thomas T. T., Rough Surfaces, Imperial College Press, London, 1999.

Tiziani H. J., "Spectral and Temporal Phase Evaluation for Interferometry and Speckle Applications," in: P. Rastogi and D. Inaudi (Eds.), *Trends in Optical Nondestructive Testing and Inspection*, Elsevier, New York 2000, pp. 323–343.

Tiziani H. J., B. Franze, and P. Haible, "Wavelength-Shift Speckle Interferometry for Absolute Profilometry Using Mode-Hope Free External Cavity Diode Laser," *J. Mod. Opt.*, **44**, 1485–1496 (1997).

Tiziani H. J. and H. M. Uhde, "Three-Dimensional Analysis by a Microlens-Array Confocal Arrangement," *Appl. Opt.*, **33**, 567–572 (1994b).

Tiziani H. J. and H.M. Uhde, "Three Dimensional Image Sensing by Chromatic Confocal Microscopy," *Appl. Opt.*, **33**, 1838–1843 (1994a).

Tiziani H. J., M. Wegner, and D. Steudle, "Confocal Principle for Macro-and Microscopic Surface and Defect Analysis," *Opt. Eng.*, **39**, 32–39 (2000).

Tavrov A., J. Schmit, N. Kerwien, W. Osten and H. Tiziani, "Diffraction Induced Coherence Levels," *Appl. Opt.*, **44**, 2202–2212 (2005).

Tolomon F. R. J. G. W., "Fringe Spacing in Interference Microscopes," *J. Sci. Instrum.*, **33**, 236–238 (1956).

Totzeck M., P. Gräupner, T. Heil, A. Göhnermeier, O. Dittmann, D. Krähmer, and V. Kamenov, "Polarization Influence on Imaging," *J. Microlith., Microfab., Microsyst.*, **4**, 031108-1-15 (2005).

Totzeck M., N. Kerwien, A.V. Tavrov, E. Rosenthal, and H. J. Tiziani, "Quantitative Zernike Phase-Contrast Microscopy by Use of Structured Birefringent Pupil-Filters and Phase-Shift Evaluation," *Proc. SPIE*, **4777**, 1-11 (2002).

Towers C. E., D. P. Towers, and J.D.C. Jones, "Optimum Frequency Selection in Multifrequency Interferometry," *Opt. Lett.*, **28**, 887–889 (2003).

Towers C. E., D. P. Towers, and J.D.C. Jones, "Generalized Frequency Selection in Multifrequency Interferometry," *Opt. Lett.*, **29**, 1348–1350 (2004a).

Towers C. E., D. P. Towers, and J.D.C. Jones, "Time Efficient Chinese Remainder Theorem Algorithm for Full-Field Fringe Phase Analysis in Multi-Wavelength Interferometry," *Optics Express*, **12**, 1136–1143 (2004b).

Towers C. E., D. P. Towers, and J.D.C. Jones, "Absolute Fringe Order Calculation Using Optimised Multifrequency Selection in Full-Field Profilometry," *Opt. Lasers Eng*, **43**, 788–800 (2005).

Uhlendorf K., G. Notni, and R. Kowarschik, "Resolution Enhancement in a Reflection-Type Confocal Microscope with a Phase-Conjugate Mirror," *Appl. Opt.*, **38**, 869–873 (1999).

van Loenen E. J., D. Dijkkamp, A.J. Hoeven, J. M. Lenssinck, and J. Dieleman, "Evidence for

Tip Imaging in Scanning Tunneling Microscopy," *Applied Physics Lett.*, **56**, 1755–1757 (1990).

Virgil B. and J. A. Gurley, *Tapping Atomic Force Microscope with Phase or Frequency Detection*, U.S. Patent RE36, 488 (2000).

Vorburger T. V. and J. Raja, "Surface Finish and Metrology," NISTIR 89–4088, U. S. Dept. of Commerce, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, June, 1990.

Wagner C. and G. Hausler, "Information Theoretical Optimization for Optical Range Sensors," *Appl. Opt.* **42**, 5418–5426 (2003).

Wan D. S., J. Schmit, and E. Novak, "Effects of Source Shape on Numerical Aperture Factor with Geometrical-Optics Model," *Appl. Opt.*, **43**, 2023–2028 (2004).

Wan D. S., J. Schmit, and E. Novak, "Effects of Source Shape on the Numerical Aperture Factor with a Geometrical-Optics Model," *Appl. Opt.*, **43**, 2023–2018 (2004b).

Whitehouse D. J., "Surface Metrology," *Sci. Meas. Tech.*, **8**, 955–973 (1997).

Whitehouse D. J., *The Handbook of Surface and Nanometrology*, IOP Publishing, Bristol, 2003.

Wickramasinghe H. K., "Scanned-Probe Microscopes," *Sci. Amer.*, 261, No 4, (1989).

Wiesendanger R. and H. J. Güntherodt, *Scanning Tunneling Microscopy Ii: Further Applications and Related Scanning Techniques*, vol. 28, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1995.

Wiesendanger R. and H. J. Güntherodt, *Scanning Tunneling Microscopy Iii: Theory of Stm and Related Scanning Probe Methods*, vol. 29, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1996.

Wilson T., *Confocal Microscopy*, Academic Press, London, 1990.

Windecker R., M. Fleischer, and H.J. Tiziani, "White-Light Interferometry with an Extended Zoom Range," *J. Mod. Opt.*, **46**, 1123–1135 (1999).

Wojtkowski M., A. Kowalczyk, R. Leitgeb and A. F. Fercher "Full Range Complex Spectral Optical–Coherence Tomography Technique in Eye Imaging," *Opt. Lett.*, **27**, 1415–1417 (2002).

Wyant J. C., "Testing Aspherics Using Two-Wavelength Holography," *Appl. Opt.*, **10**, 2113–2118 (1971).

Wyant J. C. and K. Creath, *Two-Wavelength Phase-Shifting Interferometer and Method*, U.S. Patent No. 4,832,489 (1989).

Wyant J. C., B. F. Oreb, and P. Hariharan, "Testing Aspherics Using Two-Wavelength Holography: Use of Digital Electronic Techniques," *Appl. Opt.*, **23**, 4020–4023 (1984).

Xiao G. Q., T. R. Corle, and G. S. Kino, "Real Time Confocal Scanning Optical Microscope," *Appl. Phys. Lett.*, **53**, 716–718 (1988).

Yamaguchi I., A. Yamamoto, and S. Kuwamura, "Speckle Decorrelation in Surface Profilometry by Wavelength Scanning Interferometry," *Appl. Opt.*, **37**, 6721–6728 (1998).

Yamaguchi I., A. Yamamoto, and M. Yano, "Surface Topography by Wavelength Scanning Interferometry," *Opt. Eng.*, **39**, 40–46 (2000).

Yamamoto A., C. C. Kuo, K. Sunouchi, S. Wada, I. Yamaguchi, and H. Tashiro, "Surface Shape Measurement by Wavelength Scanning Interferometry Using an Electronically Tuned Ti:Sapphire Laser," *Opt. Rev.*, **8**, 59–63 (2001).

Yatagai T., "Recent Progress in White Light Interferometry," *Proc. SPIE*, **2340**, 338–345 (1994).

Zelenka J. S. and J. R. Varner, "Multiple-Index Holographic Contouring," *Appl. Opt.*, 8, 1431–1434 (1969).

Zhang J.-H. and L. Cai, "Profilometry Using and Optical Stylus with Interferometric Readout," *Meas. Sci. Technol.*, **8**, 546–549 (1997).

Zhong Q., D. Inniss, K. Kjoller, and V. B. Elings, "Tapping Mode Atomic Force Microscopy," *Surf. Sci. Lett.*, **290**, L688 (1993).

Zuluaga A. F. and R. Richards-Kortum, "Spatially Resolved Spectral Interferometry for Determination of Subsurface Structure," *Opt. Lett.*, **24**, 519–521 (1999).

第 16 章　散射表面光学检测

K·克里斯（K. Creath）　J·施密特（J. Schmit）　J·C·怀扬特（J. C. Wyant）

本章讨论检测散射表面的莫尔条纹、条纹投影、结构照明、全息干涉术、数字全息及散斑干涉测试术。散射表面可能是光学毛表面，但更多的情况有时是其他种类的工程面形或人造面形。这些技术主要用于测量表面的面形或测量由于应力和物体运动引起的形变。在测量面形时，相比传统干涉检测术，这些技术提供了一种粗糙但更灵活的检测方法，因而适用于检测更广范围的表面。对于由施加应力而引起的位移测量，可以定量测定静态及时间平均和动态位移量。这些技术被大量应用于机器视觉，例如过程控制及工程组件上的特殊测量任务。应用范围从测量飞机窗口形状到决定组件将是否应留在电路板上，从研究涡轮叶片振动模式到监测一个大型组合式望远镜中各分块镜的对准情况，从制造历史雕塑的复制品到生产一条合身的牛仔裤，从创造动画电影到具有真实形象的电子游戏。最新技术打破了以往技术的限制，目前专注于多媒体娱乐和安全的快速取样及实时形态观察。

16.1　莫尔条纹与条纹投影技术

16.1.1　简介

莫尔一词不是一个人的名字，实际上它是一个法语词组，通常是指“通过在刻辊之间加压而在面料上形成的不规则波状釉面”（Webster's，1981）。从光学的角度讲，它是指由两个几乎等间距的光栅产生的拍频图。在日常生活中可以经常看到这种现象，例如将两块纱窗重叠在一起，筛分出一个半色调图片，或者像在电视上所看到的衬衫样条纹。娄德雷利（Lord Rayleigh）在 1874 年利用莫尔技术降低检测的灵敏度，并着眼用两个相同光栅的莫尔条纹来检测光栅自身的质量。对每个单一光栅，即使利用显微镜也不能解决光栅质量的检测。

条纹投影需要将条纹或光栅投影到待测面上，并从另一个不同的方向进行观察。罗与威尔福德（Rowe and Welford，1967）在 1967 年首次利用条纹投影法测定表面形态。对于过于粗糙而不能利用标准干涉法进行测量的表面，条纹投影是一种方便的技术。通过使用单个点光源和光切法将条纹投影与光学三角测量关联起来，光切法是将单束光线投影到物体表面上并从不同方向观测该物体以获得表面轮廓（Case et al.，1987）。这些技术通常用于散射目标，然而，已经研发出一种通过观察条纹反射来测量反射表面的替代方法（Ritter and Hahn，1983；Hang et al.，2000）。

莫尔条纹和条纹投影是对传统光学全息干涉测试的补充，尤其是检测需要在长波段使用的光学元件。虽然双波长全息（TWH）技术可用于勾画任何比可见光长的波段的表面轮廓，但可见光干涉测量环境条件是必需的。莫尔条纹和条纹投影技术可以在波长超过 10 ~ 100μm，没有中间摄录装置，且对环境要求不高的情况下，勾画表面轮廓。同时，莫尔条纹还有助于干涉测量法的理解。

本章解释了什么是莫尔条纹及它与干涉测量法的关系。介绍了表面轮廓测量的条纹投影技术、投影莫尔条纹术、阴影莫尔条纹术和双角度全息术，并对它们进行比较。这些技术都提供了相同的结果并且可以通过单一的理论描述。本章将会讨论这些技术之间的关系及全息干涉法和传统干涉法的关系，论述由发散几何构型引起的误差，并介绍将这些技术与相位测量技术相结合的使用方法。关于这些技术的更多信息可在以下书籍和书籍章节找到：瓦尔纳（Varner，1974），韦斯特（Vest，1979），哈里哈伦（Hariharan，1984），伽斯威克（Gasvik，2002），齐昂（Chiang，1983），帕托斯科与库伽文斯卡（Patorski and Kujawinska，1993），珀斯特等（Post et al.，1997），安瑞德罗（Amridror，2000）与沃克（Walker，2004）。

16.1.2　什么是莫尔条纹

莫尔条纹对理解基本的干涉仪和干涉测试结果是非常有用的。图16.1为两个相同的直线光栅彼此相对旋转一个小角度所产生的莫尔条纹（或拍频图）。当光栅暗线与半周期不同步时，将产生暗条纹。当第一个光栅暗线落在第二个光栅相应暗线顶端时，将产生亮条纹。如果两光栅之间的角度变大，亮暗条纹之间的距离将减小。（奥斯特与尼斯吉玛对莫尔条纹进行了简单的解释（Oster and Nishijima，1963）。）

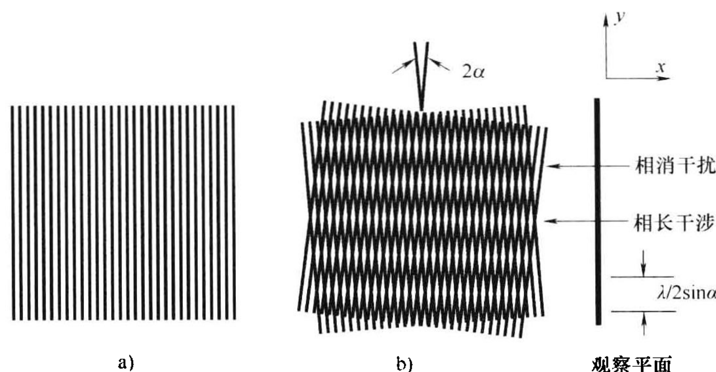


图16.1　两个相同的直线光栅彼此相对旋转一个小角度所产生的莫尔条纹
a）直线光栅　b）两个直线光栅相互间有2α角度产生的莫尔条纹

如果光栅是不完全相同的直线光栅，莫尔条纹（明条纹与暗条纹）将不是等间隔的直条纹。以下分析结果表明了如何计算任意光栅产生的莫尔条纹。令两个光栅的光强传输函数为$f_1(x,y)$和$f_2(x,y)$

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}\cos[n\phi_1(x,y)] \\
f_2(x,y) &= a_2 + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m}\cos[m\phi_2(x,y)]
\end{aligned}
\tag{16.1}
$$

式中，$\phi(x,y)$是描述光栅线基本形状的函数。对于基频，在每个亮条纹中心$\phi(x,y)$等于2π整数倍，在每个暗条纹的中心$\phi(x,y)$等于2π整数倍减去半周期。系数b确定栅线形状（例如方波、三角、正弦等）。对于正弦光栅，b_{i1}是唯一的非零项。

当这两个光栅重叠时，由此产生的强度传输函数

$$f_1(x,y)f_2(x,y) = a_1a_2 + a_1\sum_{m=1}^{\infty} b_{2m}\cos[m\phi_2(x,y)] + a_2\sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}\cos[n\phi_1(x,y)] + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}b_{2m}\cos[n\phi_1(x,y)]\cos[m\phi_2(x,y)] \quad (16.2)$$

通过独立观察两个图案，可以确定式（16.2）前三个项提供的信息。最后一项比较有用，而且可改写成

$$\begin{aligned} Term4 = & \frac{1}{2}\frac{1}{2}b_{11}b_{21}\cos[\phi_1(x,y) - \phi_2(x,y)] \\ & + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}b_{2m}\cos[n\phi_1(x,y) - m\phi_2(x,y)] \\ & \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}b_{2m}\cos[n\phi_1(x,y) + m\phi_2(x,y)] \end{aligned} \quad (16.3)$$

n 和 m 不同时为 1

这个表达式表示两个光栅的重叠，可以获得两光栅叠加之和与叠加之差的结果。式（16.3）的第一项代表组成两个光栅的基本图案之间的差异。它可以用来预测如图 16.1 所示的莫尔条纹。假设两个光栅是定向的且它们之间有一个 2α 的角度，坐标系的 y 轴是其角平分线，两个光栅函数 $\phi_1(x, y)$ 与 $\phi_2(x, y)$ 可表示为

$$\phi_1(x,y) = \frac{2\pi}{\lambda_1}(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$$

与

$$\phi_2(x,y) = \frac{2\pi}{\lambda_2}(x\cos\alpha - y\sin\alpha) \quad (16.4)$$

其中，λ_1 与 λ_2 分别是两光栅的栅线间距。方程（16.4）可以改写成

$$\phi_1(x,y) - \phi_2(x,y) = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{beat}}}x\cos\alpha + \frac{4\pi}{\bar{\lambda}}y\sin\alpha \quad (16.5)$$

其中，$\bar{\lambda} = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ 是平均栅线间距，λ_{beat}是两个光栅拍频波长，并由式（16.6）给出

$$\lambda_{\text{beat}} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (16.6)$$

拍频波长与在 15 章讨论的双波长干涉仪所获得的结果是一致的，也称为合成或等效波长。利用式（16.3），莫尔条纹或拍频，其条纹中心满足方程

$$\phi_1(x,y) - \phi_2(x,y) = M2\pi \quad (16.7)$$

考虑以下三种不同情况的莫尔条纹。

对于第一种情况 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$。式（16.5）第一项为零，其条纹中心是

$$M\lambda = 2y\sin\alpha \quad (16.8)$$

式中，M 是一个整数，为条纹阶数（见图 16.2a）。

如图 16.1 所示，正如所预期的，式（16.8）是等距水平直线方程。

对于第二种简单情况 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 光栅相互平行及 $\alpha = 0$。这使得式（16.5）第二项消失，莫尔条纹满足

$$M\lambda_{\text{beat}} = x \quad (16.9)$$

这些条纹是与光栅栅线平行的等间距直条纹（见图 16.2b）。



图16.2 由两直线光栅形成的莫尔条纹
a）相互的倾斜程度相同 b）频率不同且没有相互倾斜
c）不同的频率且倾斜

对于第三种更为普通的情况，两光栅的空间频率不同 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 并且两个光栅之间的角度不为零（$\alpha \neq 0$），莫尔条纹的方程将变为

$$M\bar{\lambda} = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_{\text{beat}}} x\cos\alpha + 2y\sin\alpha \qquad (16.10)$$

这是一个直线方程。其间距和方向取决于两光栅间距之间的相对差及光栅之间的角度（见图16.2c）。

一般情况下莫尔条纹的方向和间距可通过图16.3（Chiang，1983）所示的几何结构测定。距离 $\overline{AB}$ 可由两光栅的间距表示

$$\overline{AB} = \frac{\lambda_1}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{\lambda_2}{\sin(\theta + \alpha)} \qquad (16.11)$$

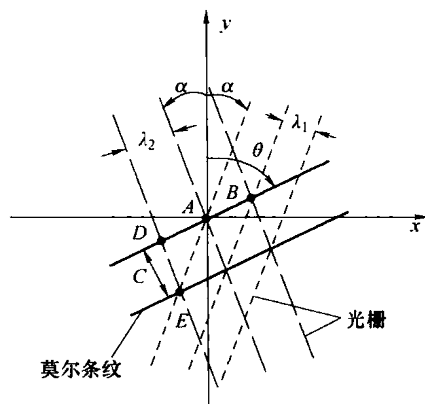


图16.3 用几何方法测定两个具有不同频率且相互倾斜的光栅之间莫尔条纹的间距和角度

式中，θ 是莫尔条纹与 y 轴的夹角。

经过重新调整，条纹方向角 θ 由式（16.12）表示

$$\tan\theta = \tan\alpha\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) \qquad (16.12)$$

当 $\alpha = 0$ 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，$\theta = 0°$ 和 $\lambda_1 = \lambda_2$ 且 $\alpha \neq 0$，$\theta = 90°$ 时，正如所预料的，莫尔条纹的间距与条纹互相垂直并在数量上等于 $\overline{DE}$

$$\overline{DE} = \frac{\lambda_1}{\sin 2\alpha} = \frac{C}{\sin(\theta + \alpha)} \qquad (16.13)$$

其中，C 是条纹间距或等值间隔。可以重新整理得到

$$C = \lambda_1\left[\frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin 2\alpha}\right] \qquad (16.14)$$

通过替代条纹方向角 θ，条纹间距可由光栅空间频率与光栅相互之间的夹角表示

$$C = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2 \sin^2 2\alpha + (\lambda_2 \cos 2\alpha - \lambda_1)^2}} \qquad (16.15)$$

在 $\alpha = 0$ 与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 条件下，条纹间距等于 λ_{beat}，在 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 与 $\alpha \neq 0$ 条件下，条纹间距等于 $\lambda/(2\sin\alpha)$。在已知 λ_1 的情况下，可通过测量条纹间距与方向角算出 λ_2 与 α。

(Chiang, 1983)。

16.1.3 莫尔条纹与干涉图

前面我们已经了解了莫尔条纹的数学基础，让我们来看看莫尔条纹与干涉测量的关系。图16.1所给出的单光栅可以看做是一个向右传播的平面波（如准直光束），栅线之间的距离等于波长。图16.1b所给出的两组重叠的光栅线可以看做是两平面波的叠加，且两平面波传播方向之间的夹角为2α。当两个波同相时，产生明条纹（相干相长）；当两个波不同相时，产生暗条纹（相干相消）。对于准直平面波而言，“栅线”是真正意义上垂直于表面的平面波，亮暗条纹也是垂直于表面的平面波。如果平面波向右传播，通过与表面和光栅线右边部分垂直放置的光阑就可以观察到这些条纹，如图16.1所示。光阑上干涉条纹间距由式(16.8)表示，式中λ是光的波长。因此，两直线光栅产生的莫尔条纹准确预测了两个平面波干涉所产生的干涉条纹。由于产生莫尔条纹的光栅通常是二元光栅，因此莫尔条纹不能准确预测干涉条纹的正弦强度分布（如果两个光栅拥有正弦强度分布，由于高阶项的原因，所获得的莫尔条纹仍然不能表示正弦强度分布）。

下面将研究更为复杂的光栅，如圆形光栅。图16.4b是图16.4a所示的两个相同环形光栅图案叠加所获得的莫尔条纹。该合成图表明了由两个球面波干涉所获得的干涉条纹位置。两个圆光栅的中心可以看做两个球面波的光源。正如两个平面波一样，栅线间距等于波长。当两光波同相时，产生亮条纹，当两光波完全不同相时，产生暗条纹。对于给定条纹上的一点，其两个光源到该点距离之差是一个恒量。因此，条纹是双曲线型。由于对称性，在图16.4b的观察面A上所观察到的条纹必须是圆形的（平面A沿着图16.4b的顶部并垂直于两光源的连线即垂直于纸面）。图16.4c给出了这些干涉条纹的一个表象，并通过使非倾斜平面波与球面波干涉而获得干涉图案（平面波可以将认为是一个曲率半径无穷大的球面波。）图16.4d为平面B上的垂直于纸面的直的等距干涉条纹（这些条纹严格来说仍然是双曲线，但由于较大距离的限制，它们实际上是直线。平面B是沿着图16.4b的边并且平行于两光源的连线，也垂直于纸面）。

假如只有一个球面波（单个点光源），平面B上等位线如图16.5a所示（对于一阶而言，平面B上等位线与平面A上的干涉条纹是一致的）。

图16.5a通常称为波带片。图16.5b为由两个波带片叠加产生的直线莫尔条纹。其与图16.4所示的平面B所示干涉条纹是一致的。

叠加两个干涉图，观察其产生的莫尔条纹或拍频图案是非常有用的。由两幅不同的干涉图叠加形成的莫尔条纹表现出两幅干涉图的偏差。例如，图16.6所给出的将两幅计算生成干涉图叠加所产生的莫尔条纹。其中的一幅干涉图在整个半径上有20波长的倾斜，如图16.6a所示，而第二幅干涉图有20波长的倾斜和4波长的离焦，如图16.6b所示。如果干涉图得到良好对准，使两幅干涉图的倾斜方向相同，这样将会消除倾斜并只留下4波长的离焦，如图16.6c所示。如图16.6d所示，两幅干涉图相互旋转一个较小的角度，使得相互间的倾斜不能互相抵消。通过分析两光栅的函数，可以用数学的方式表达其结果

$$\phi_1(x,y)=2\pi(20\rho\cos\varphi+4\rho^2)$$

和

$$\phi_2(x,y)=2\pi[20\rho\cos(\varphi+\alpha)] \tag{16.16}$$

当满足下式时，可获得亮条纹

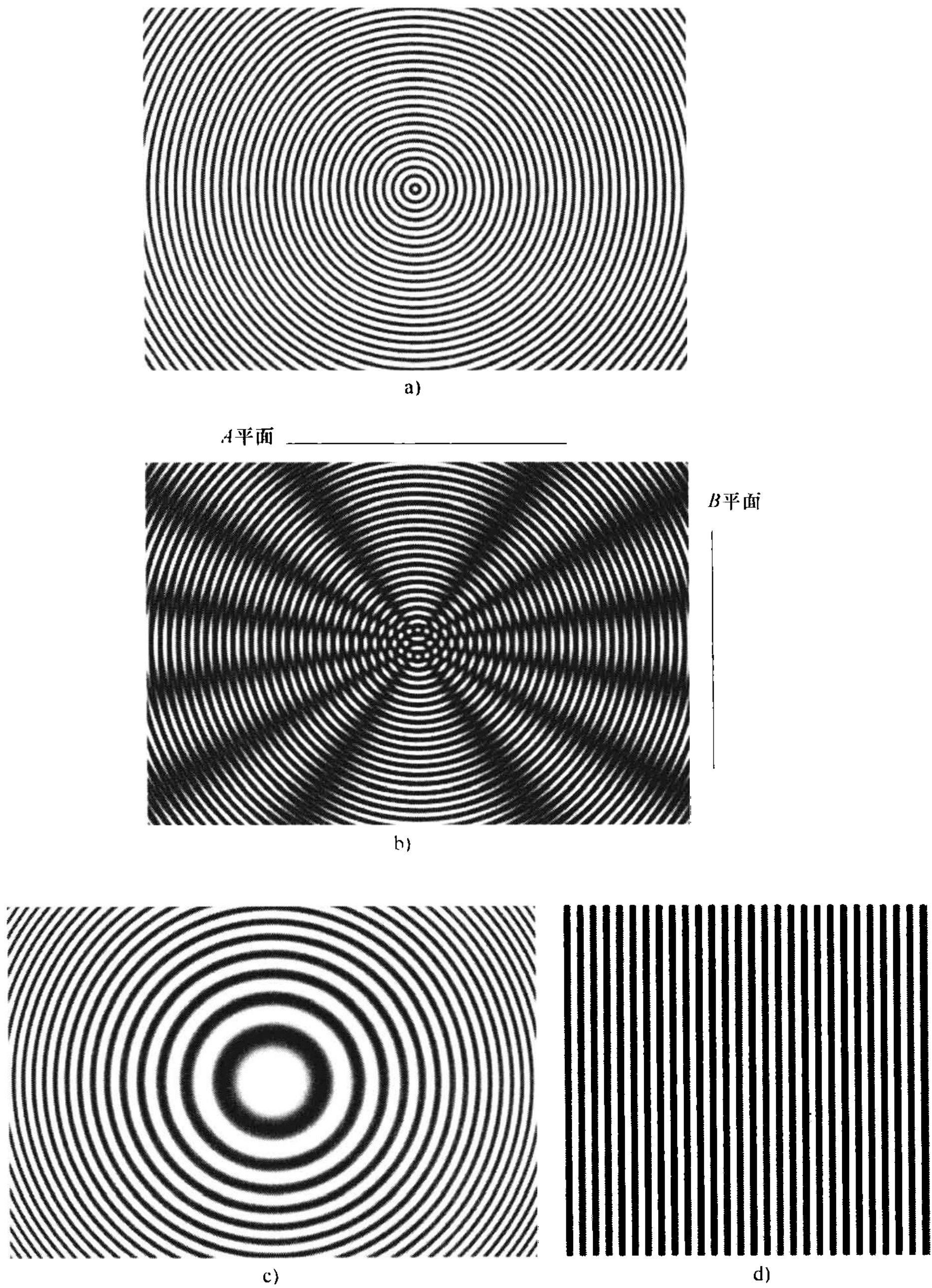


图16.4 双球面波的干涉

a）代表球面波的圆光栅 b）两个圆光栅叠加获得的莫尔条纹

c）平面A上观察到的条纹 d）平面B上观察到的条纹

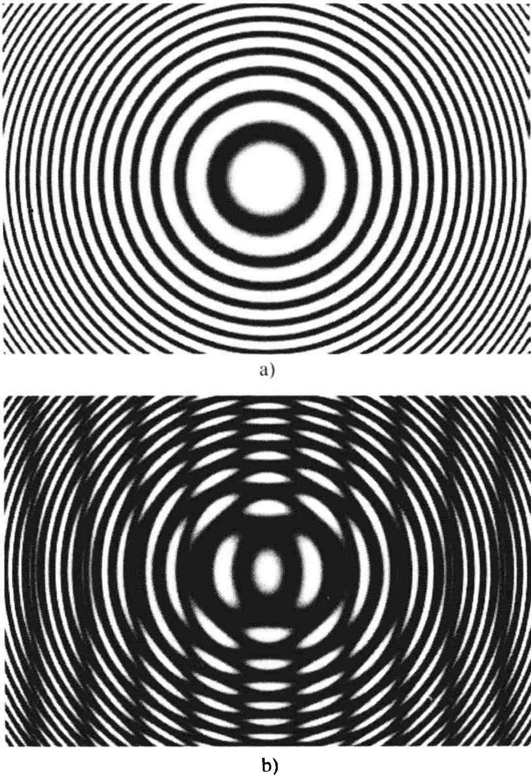


图 16.5　由两个波带片产生的莫尔条纹

a）波带片　b）由两个波带片叠加产生的直线莫尔条纹

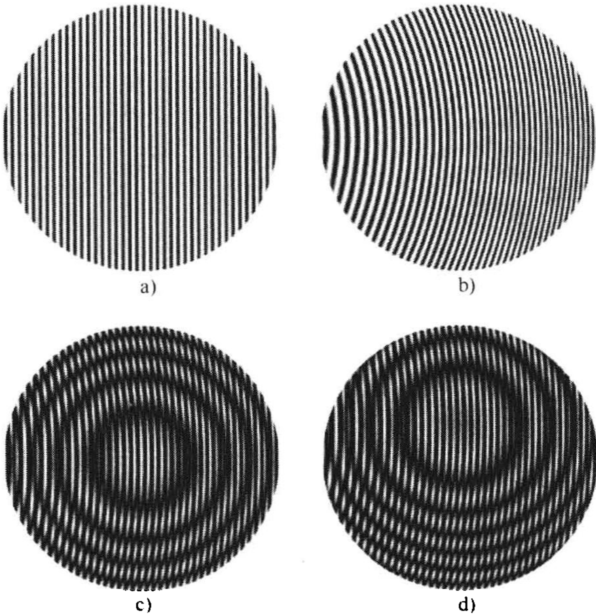


图 16.6　两干涉图产生的莫尔条纹

a）有 20 波长倾斜的干涉图　b）有 20 个波长倾斜和 4 个波长离焦的干涉图

c）图 a 和图 b 间没有倾斜的叠加　d）有轻微倾斜

$$\frac{\phi_1-\phi_2}{2\pi}=20\rho[\cos\varphi-\cos(\varphi+\alpha)]+4\rho^2=M \qquad (16.17)$$

假如 $\alpha=0$，并且倾斜被完全消除，仍然存在 4 波长的离焦；否则，莫尔条纹中会残留一些倾斜。

如图 16.7 所示，含有三阶像差的干涉图也有类似结果。图 16.7a 所示为在整个半径上含有 22 波长的倾斜、4 波长的球差与 −2 波长离焦的计算生成干涉图。图 16.7d 所示为带有离焦和倾斜项的净球差。它是图 16.7a 的干涉图与具有 20 个波长倾斜的干涉图（图 16.6a）叠加所产生的莫尔条纹。

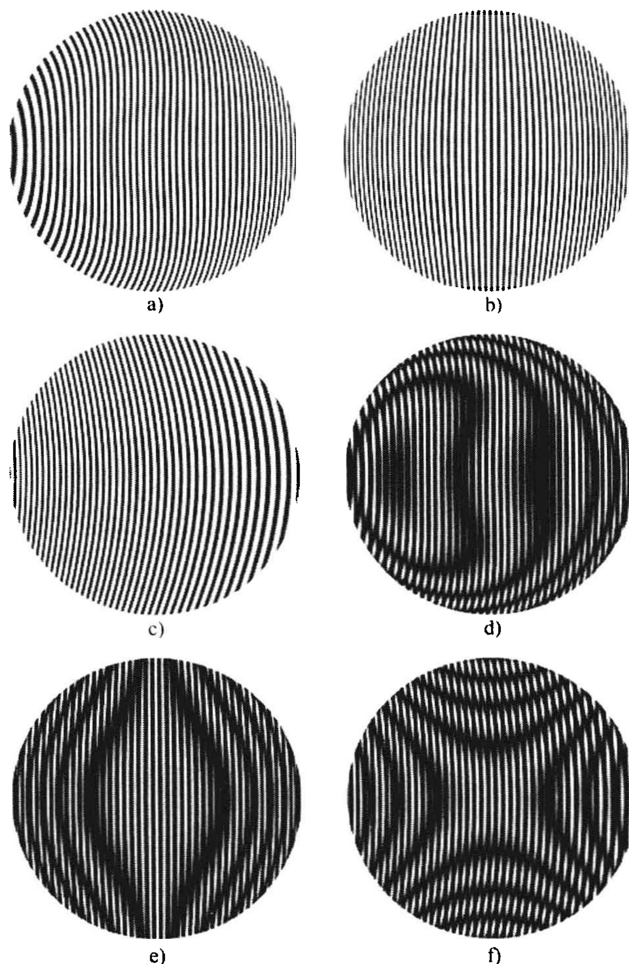


图 16.7　显示三阶相差的莫尔条纹

a）20 波长、4 个波长三级球差与 −2 波长的离焦　b）20 个波长的倾斜与 5 个波长的彗差　c）20 个波长倾斜、7 个波长像散与 −3.5 个波长离焦　d）由图 16.6a 与图 16.7a 产生的莫尔条纹　e）由图 16.6a 与图 16.7b 产生的莫尔条纹　f）由图 16.6a 与图 16.7c 产生的莫尔条纹

图 16.7e 为由图 16.6a 具有 20 个波长倾斜的干涉图与图 16.7b 所示的具有 20 个波长倾斜与 5 个波长彗差的干涉图相互叠加产生的莫尔条纹。所产生的莫尔条纹包含 5 个波长的彗差。图 16.7f 为由图 16.6a 具有 20 个波长倾斜的干涉图与图 16.7c 所示的具有 20 个波长倾

斜、7 个像散与 -3.5 波长离焦的干涉图相互叠加产生的莫尔条纹。因此利用莫尔条纹可以产生简单的条纹图案。这些图案可以印刷或复制到基片上，并且可以用来理解干涉图中的三阶像差。电子版本可在怀扬特的网站上找到（Wyant，2006）。

图 16.8a 为两个相同干涉图相互旋转一个小角度后叠加所获得的莫尔条纹。正如我们期望的，莫尔条纹由等间距近似的直线组成。然而，当其中一幅干涉图被翻转后，像差将会增加，而不是减少，所获得的莫尔条纹如图 16.8b 所示。当另一幅干涉图被翻转后，在该干涉图中条纹是向右弯曲的，而在另一幅干涉图中是向左的。因此，两幅干涉图中球差与彗差的符号相反，且由此所产生的莫尔条纹的球差与离焦是单幅干涉图两倍。

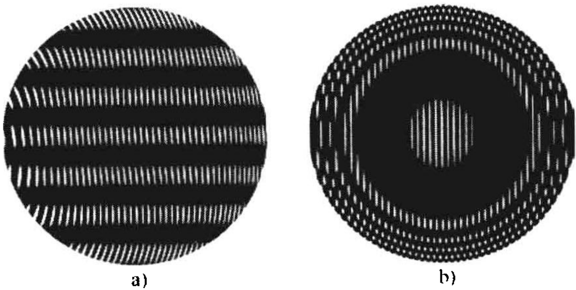


图 16.8 将两个同样的干涉图（图 16.7a）叠加获得的莫尔条纹
a）两个干涉图具有相同的方向
b）将其中的一幅干涉图翻转

当由图 16.7a 所给出的两幅相同干涉图在彼此存在一定位移的情况下叠加，就能获得剪切干涉图。图 16.9 所示为两幅干涉图之间有无旋转情况下的纵向和横向位移。旋转意味着将倾斜加入干涉图中。这种类型的莫尔条纹对理解横向剪切干涉图是非常有用的。

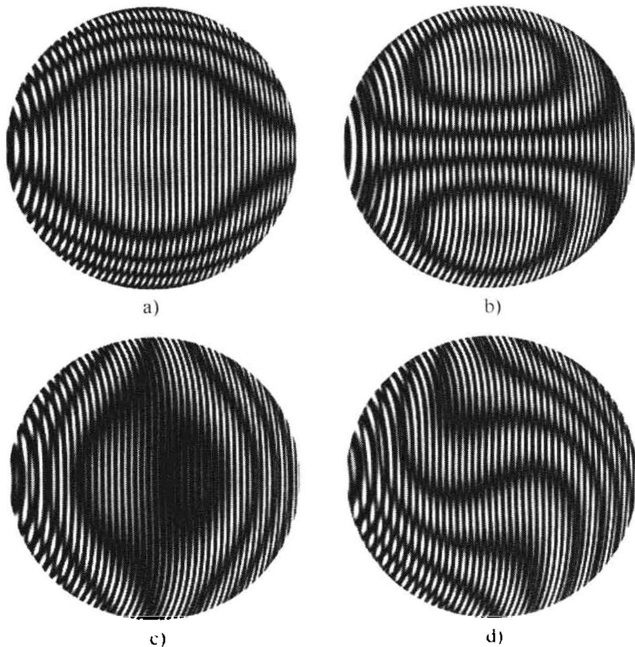


图 16.9 由两个相同干涉图（图 16.7a）相互有一定剪切量获得的莫尔条纹
a）垂直剪切 b）垂直剪切并有表现为倾斜的一定量旋转
c）水平剪切 d）水平剪切并有表现为倾斜的一定量旋转

莫尔条纹由两个光强函数的乘积所产生。增加两个强度函数，并不会使由式（16.3）获得的项产生不同。两光强函数直接相互叠加不会产生莫尔条纹。通过两光强函数的叠加获

得莫尔条纹的唯一方法是使用非线性探测器。对于一个给定的检测强度分布 I_1+I_2，非线性响应可表示为

$$\text{Response}=a(I_1+I_2)+b(I_1+I_2)^2+\cdots \tag{16.18}$$

这使得在输出信号表达式里的项与两个强度分布函数成比例。因此，如果两个光强图案同时被非线性探测器观测到就可以获得莫尔条纹（即使在探测以前它们并没有相乘）。如果探测器的输出与输入强度分布成正比，要产生莫尔条纹就必须使两个光强图案相乘。由于眼睛是一个非线性检测器，无论图案是相加或相乘都能观察到莫尔条纹。另一方面，假如图案不是相乘关系，用一个好的电视摄像机也不会看到莫尔条纹。

16.1.4 历史回顾

自娄德雷利第一次观测到莫尔条纹现象以来，莫尔技术已经应用于多种测试领域。瑞格（Righi，1887）首先注意到可以通过观察莫尔条纹运动来测定两个光栅之间的相对位移。在使用莫尔条纹方面的另一重大进展由韦勒与谢彭尔德（Weller and Shepherd，1948）提出，他们通过观察受应力前后莫尔条纹的不同来确定物体在受到应力后的形变。他们首先使用阴影莫尔条纹，即将一个光栅置于待测的表面前（非平面），利用莫尔条纹的形状来确定光栅后待测面的面形。直到20世纪50年代中期李滕伯格（Ligtenberg，1955）与格尔德（Guild，1956、1960）通过绘制表面轮廓和位移测量分析应力影响来解释莫尔条纹之前，关于莫尔条纹的严格理论并不存在。关于莫尔条纹早期研究成果的经典总结见热奥卡雷斯的著作（Theocaris，1962、1966）。格尔德（Guild，1956、1960），热奥卡雷斯（Theocaris，1969），杜蕾利与帕克（Durelli and Parks，1970）都写过这方面的书。投影莫尔条纹法由布鲁克斯与海尔芬格（Brooks and Helfinger，1969）引入，其目的是进行光学测量与变形测试。直到1970年，莫尔技术方面的发展主要集中在应力分析方面。门德斯（Meadows，1970），高崎（Takasaki，1970），与瓦寿斯克（Wasowski，1970）等人首次利用莫尔技术来测量月球表面形貌。莫尔技术也被用来将物体与标准件相比较，并用于振动分析（Der Hovanesian and Yung，1971；Gasvik，2002）。经典的综述和关于用来绘制轮廓的莫尔技术与投影技术的比较实验由伯诺伊特（Benoit，1975）等人给出。雅塔伽等人（Yatagai et al.，1982）报道了用来寻找条纹中心的计算机自动条纹分析技术。摩尔与特鲁阿克斯（Moore and Truax，1979）报道了使用莫尔条纹的外差干涉仪，与此同时佩兰与托马斯（Perrin and Thomas，1979），萨伽（Shagam，1980）与里德（Reid，1984b）更进一步研发了相位测量技术。关于莫尔技术的综述文章主要有珀斯特（Post，1982）、里德（Reid，1984a）和哈里奥与刘（Halioua and Liu，1989）。近期的文章主要有帕托斯科和库伽文斯卡（Patorski and Kujawinska，1993）、珀斯特等（Post et al.，1997）、安瑞德罗（Amridror，2000）与沃克（Walker，2004）。

罗与威尔福德（Rowe and Welford，1967）首先提出利用投影干涉条纹来测定表面轮廓。他们后期的研究包括条纹投影（Welford，1969）大量的应用和利用全息条纹投影技术（Rowe，1971）。伯诺伊特等人（Benoit et al.，1975）与伽斯威克（Gasvik，2002）对此进行了深入的数学研究。卡斯等人（Case et al.，1987）在其著作的章节中给出了测量表面轮廓的条纹投影技术与三角测量技术之间的关系。艾德比图瓦（Indebetouw，1978）利用条纹投影技术首次提出全息相位测量技术，并且武田、艾娜与小林（Takeda，Ina and Kabayashi，1982）；武田与武藤（Takeda and Mutoh，1983）、斯里尼瓦桑、刘与哈里奥（Srinivasan，Liu

and Halioua，1984、1985）等人更深入地研发了该项技术。如上面所列出的书籍描述的一样，当前的相位测量技术已经规范化。

海恩斯与希尔德布兰德利用双光源测量表面轮廓（Haines and Hildebrand，1965；Hildebrand and Haines，1966、1967）。通过改变照明物体光源的角度或者改变参考光束的角度来获取双光源。角度相差很小的双光束可以产生双曝光全息图。该全息图最终是与待测面轮廓相符的莫尔条纹。门泽尔（Menzel，1974）、艾布拉姆森（Abramson，1976a、b）、德玛塔与弗萨特贝拉尼（DeMattia and Fossati-Bellani，1978）等人进一步深入研究了双角度全息技术。该技术也被用于散斑干涉仪中（Winther，1983）。上面提到的全息与散斑技术将在本章的第二部分深入的讨论。

由于这些技术都非常相似，所以有时很难区分一项技术相对于另一项技术的研究成果。麦戈文（MacGovern，1972）提出一种将所有这些技术联系在一起的理论。本章将介绍上面提到的各种技术，然后再展示这些技术之间的相似之处并将它们与传统的干涉仪进行比较。

16.1.5 条纹投影技术

测量表面轮廓的一种简单方法就是将干涉条纹或光栅投影到物体表面并从另外一个角度进行观测。图 16.10 为该测量法的光路。假设有一道准直照明光束，并用远心光学系统观测条纹，照射到物体上的等间距直条纹将产生等间距的等高距。观测到的条纹与直条纹的偏离表示待测面与平面参考面之间的偏离。如图 16.11 所示，条纹间距为 p 的光束投射到物体上，当以相对投影方向成 α 角度观测条纹时，垂直于观测方向的直线间距是

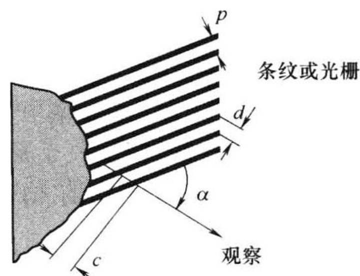


图 16.10 条纹或光栅投影到物体上并以 α 的角度进行观察（p 是光栅间距或条纹间距，C 是等高线间距。）

$$d = \frac{p}{\cos\alpha} \tag{16.19}$$

轮廓间隔 C（观测方向上相邻轮廓线之间的高度）由投影到表面上的条纹或直线间距以及投影与观测方向间的夹角共同决定

$$C = \frac{p}{\sin\alpha} = \frac{d}{\tan\alpha} \tag{16.20}$$

这些轮廓线是等高平面，其测量灵敏度由 α 决定。该角度越大，等高线间隔越小。如果 $\alpha = 90°$，则等高线间隔等于 p 并且灵敏度最大。如图 16.12 所示，参考平面将平行于条纹的方向并垂直于观测方向。即使可获得最大的灵敏度，但投影与观测方向成 90°角将在物体上产生很多不可接受的阴影。这些阴影将导致这些区域丢失测量数据从而不能测量其轮廓。当 $\alpha = 0$ 时，等高线间隔趋于无限大，灵敏度是 0。为获得最佳的测量结果，应选择 α 角不超过表面的最大斜率。

当使用干涉条纹而不是使用光栅投影到物体表面时，条纹间距 p 由图 16.13 所示的几何图形所确定。

$$p = \frac{\lambda}{2\sin\Delta\theta} \tag{16.21}$$

a)

b)

c)

图 16.11　投影到掩膜上的条纹

a）粗条纹间距　b）精细条纹间距　c）精细条纹间距伴随增加照明与观测间的夹角

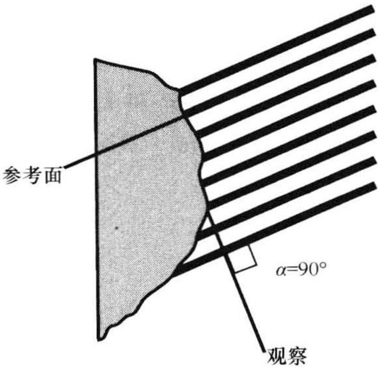


图 16.12　当投影与观测方向成 90°角时条纹投影技术的灵敏度最大

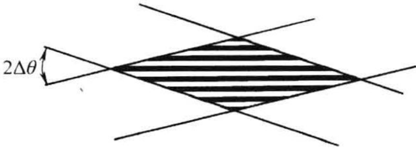


图 16.13　两相干光束产生的条纹

式中，λ 为照明光束的波长；$2\Delta\theta$ 是两相干光束间的夹角。将关于 p 的表达式代入式(16.20)，等高间隔变为

$$C=\frac{\lambda}{2\sin\Delta\theta\sin\alpha} \tag{16.22}$$

假如使用一个简单的干涉仪，例如用泰曼-格林（Twyman-Green）干涉仪来产生投影干涉条纹，只要一道光束相对另一道光束倾斜，就可以改变等高间隔。两光束之间的夹角越大，等高线间隔就越小。图 16.11a 和 b 为投影到物体表面上的干涉条纹的条纹间距变化。照明方向已经从图 16.11b 和 c 的观测方向移出。这在提高角度 α 和测试灵敏度的同时也降低了等高线间距。伽斯威克（2002）详尽地介绍了条纹投影测量轮廓技术。

假如光源和探测器并不是在无穷远位置，投影到物体表面的条纹或光栅将不完全是等间距直条纹。等高面间的高度将是从光源与探测器到物体距离的函数。由于观测条纹和照明的原因，测量过程中将会产生失真。这意味着参考表面不是理想的平面。相比照明光束与观测距离，只要待测物体没有较大的高度变化，置于物体前的参考平面就能首先被测量并在随后对物体的测量结果中将其减去。这使得可以将物空间内起参考面作用的平面映射到表面上。如果待测物体的高度变化较大，必须在多个平面中测量平面参考面，以此将测得物体等高线与真实高度映射。有限的照明与观测距离将与阴影莫尔法一起在 16.1.6 节中得到更详细的介绍。

多年来，条纹投影法都依赖朗奇（Ronchi）光栅，这种光栅通常是将铬线复制在玻璃基板上，但如今的系统中含有不同种类的微型显示器（数字光学投影仪）；三种常用的微显示技术（Armitage et al.，2002），即微机电系统（MEMS）、液晶和电致发光技术，允许对单个像素寻址来获得高分辨率的矩阵显示器。第一类，其中包括数字微镜显示器（DMD-德州仪器商标），使用一个大约 13mm^2 的微镜阵列在不同频率下进行开关操作，以此获得不同能级的投影光。第二类是微型显示器是液晶显示器（LCD），传统的液晶显示器由扭曲向列型液晶层组成，并以透射模式运行。新型液晶显示器是以放在硅（硅基液晶）上的铁电晶体为基础，并以反射模式运行。液晶显示器起空间（SLM）光调制器的作用，并且需要偏振入射光。第三类微型显示器由有机（聚合物阵列制）发光二极管组成（发光二极管或 PLEDS）。这种类型显示器适合小型系统，因为有机聚合物像素本身就是朗伯发射体，不需要附加照明器。使用由计算机控制微型显示器的条纹投影系统的优点是：不需要机械移相光栅，可以用鼠标点击改变投影的条纹。通过对微显示器像素寻址来改变投影的条纹。使用微显示器的另一个好处是：光线条纹的周期与亮度（Kowarschik et al.，2000；Proll et al.，2003）可以与待测物的类型相适应，此外还能用不同颜色显示图案，并允许用彩色 CCD 相机同时收集三种图案。许多作者分析了微显示器在面形测量的条纹投影方面的性能（Frankowski et al.，2000；Proll et al.，2003；Notni，Riehemann et al.，2004）。

16.1.6 阴影莫尔条纹

利用莫尔干涉仪对物体轮廓进行测量的简单例子如图 16.14 所示。将单个光栅置于待测物体前面。置于物体前面的光栅会在物体上产生阴影，通过该光栅以不同角度对阴影进行观察。可以观察到低频拍频或者莫尔条纹图案。这个条纹图案是由物体上光栅的阴影与所观测光栅相干涉而产生的。假设照明光束是准直的，并在无穷远位置或者通过远心光学系统观测

物体，物体表面上一点与光栅的距离 z 由图 16.14（Meadows et al.，1970；Takasaki，1973；Chiang，1983）所示的几何关系决定，高度由式（16.23）表示

$$z=\frac{Np}{\tan\alpha+\tan\beta} \tag{16.23}$$

式中，α 为照明角度；β 为观测角度；p 为光栅线的间距；N 为 A 和 B 两点间光栅线的数量，如图 16.14 所示。

垂直于光栅方向的等高线间隔

$$C=\frac{p}{\tan\alpha+\tan\beta} \tag{16.24}$$

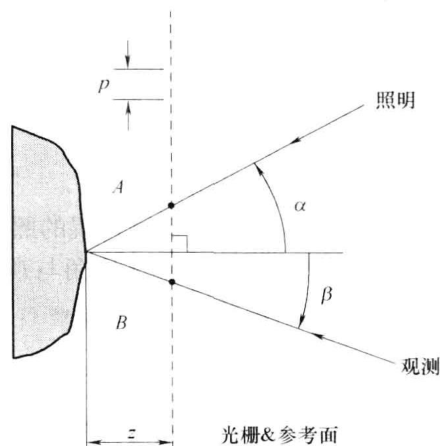
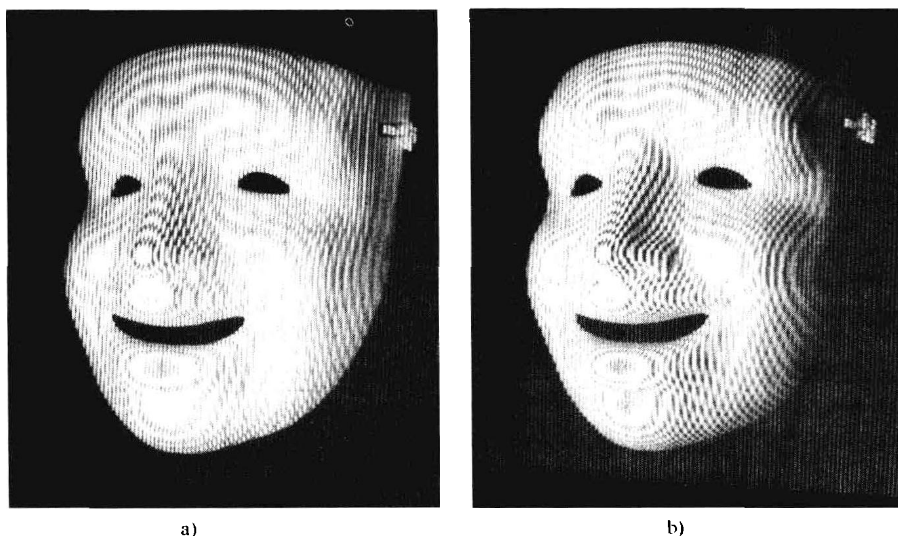


图 16.14　无限照明与观测（即平行光照明与观测）的阴影莫尔条纹几何关系

同样，莫尔条纹中拍频图案的条纹间距也由照明角度与观测方向决定。该角度越大，等高线间隔越小。如果原始光栅的高频被过滤掉，那么只有莫尔条纹的干涉项被观测到。参考平面将平行于光栅。注意此参考平面，当条纹投影到物体表面时获得的参考面是倾斜的。从本质上讲，阴影莫尔条纹技术提供了一个消除倾斜项与重新定位参考平面的方法。对于阴影莫尔条纹技术获得的等高间隔，当其中的一个角度为 0 且 $d=p$ 时，条纹投影技术用式（16.20）计算出的结果相同。图 16.15 所示为有一光栅在前的物体。照明光束从一个方向投射并从另一方向观测阴影。在图 16.15 a 和 b 中，角度 α 与 β 不断地增大。这有降低等高线间隔、增加条纹数量和旋转参考面使其偏离观察者的效果。



a)　　b)

图 16.15　前有光栅的掩膜
a）一个视角　b）更大的视角

在大多数情况下，很难用准直光束照明整个物体。因此，考虑有限的观测距离与照明距离的情况是十分重要的。这使得我们要推导更为一般的情况（Meadows，Johnson and Allen，1970；Takasaki，1970；Bell，1985）；然而，为了简单起见，只考虑照明与观测位置离光栅

等距的情况。图 16.16 给出了一种几何结构，其中照明光源与观测相机之间的距离为 W，它们与光栅之间的距离是 l。假定光栅离待测物体很近，以至于可以忽略衍射效应，在这种情况下，物体与光栅之间的距离

$$z=\frac{Np}{\tan\alpha'+\tan\beta'} \tag{16.25}$$

式中，α'与β'分别为物体表面位置的照明角和观测角，两个角随表面上的不同点而改变，它们与光栅（参考）面位置的照明角与观测角 α 与 β 不同。

表面高度也可以写成（Meadows et al.，1970；Takasaki，1973；Chiang，1983）

$$z=NC(z)=\frac{Np(l+z)}{w}=\frac{Npl}{w-Np} \tag{16.26}$$

式（16.26）表明，表面高度是取决于各个物点位置的复杂函数。因此，等高线之间的距离视光栅与物体之间的表面高度和光栅线的数量而定。个别等高线将不再是高度相等的平面。目前存在着高度相等的表面。通过研究到光源与观测位置的距离远远大于表面高度变化的情况，即 $l>>z$，可以简化高度表达式。表面高度可以表示为

$$z=\frac{Npl}{w}=\frac{Np}{\tan\alpha+\tan\beta} \tag{16.27}$$

尽管角 α 与 β 在表面上的点到点之间变化，但只要 $l>>z$，对所有物点而言，它们正切之和都等于 w/l。在这种情况下，等高线间距将是一个定值并与式（16.24）所给出的结果相同。由于距离有限的原因，还会存在由观测角度引起的失真。通过光栅进行观测时，表面 Q 上的一点将出现在 Q'的位置。x 与 x'分别为 Q 与 Q'点到探测器的垂直距离，由相似三角形可得

$$\frac{x}{z+l}=\frac{x'}{l} \tag{16.28}$$

其中，x 与 x'的定义如图 16.16 所示。重新整理式（16.28），通过测量 x'的坐标及相应的几何关系可求得 x 坐标的值

$$x=x'\left(1+\frac{z}{l}\right) \tag{16.29}$$

同样，对坐标 y 可得

$$y=y'\left(1+\frac{z}{l}\right) \tag{16.30}$$

这使得被测面可以通过透视法映射校正得到实际的表面。条纹投影法也可以使用相同的校正因子。

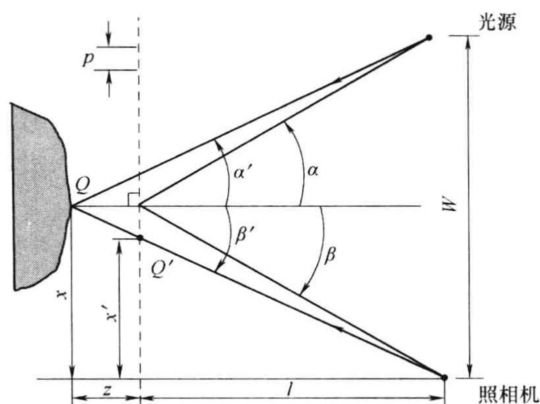


图 16.16　照明与观测距为有限时阴影莫尔条纹的几何关系

16.1.7　投影莫尔条纹法

莫尔干涉仪也可以通过将干涉条纹或光栅投影到待测物体上，然后通过物体前的另一块光栅进行观测来获得，如图 16.17 所示（Brooks and Helfinger，1969）。假如探测器像素间距与观测条纹间距非常接近，就可以不使用第二块光栅，而用数码相机探测器来观测莫尔条纹（Bell，1985）。

投影法与阴影法不同之处在于：投影法使用两块不同的光栅。通过使用不同线宽光栅对

物体进行观测，可任意改变参考面的方位。通过将周期p替代为$d=p/\cos\alpha$，等高线间距可由式（16.24）给出。其中α是照明方向角。在y平面上条纹间距p或光栅线宽p在垂直于照明方向上具有$d=p/\cos\alpha$的周期，如图16.16所示。只要光栅线宽在照明与观测方都得到匹配，即在y平面都具有相同的值d，等高线间隔就能通过式（16.24）将p替换为d而获得。这使得投影法与阴影法一样，尽管投影法比阴影法复杂。伯诺伊特等人（1975）对投影法做出了很好的理论解释。

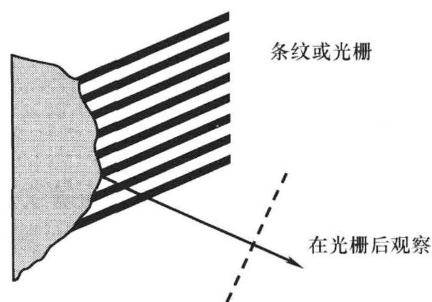


图16.17　投影莫尔条纹（其中条纹或光栅被投影到物体表面上并通过第二块光栅进行观测）

16.1.8　双角度全息术

采用全息术也可以进行投影条纹轮廓测量。首先通过如图16.18所示的光学装置获得一幅全息图。然后轻微改变照明物体的光束的方向。当再通过全息图来观察物体时，就会获得干涉条纹，该干涉条纹对应于储存在全息图中的波前与带有倾斜照明的现有波前之间的干涉结果。图16.19描绘了这个过程。这些干涉条纹与同时用两个光束照明物体所获得的干涉条纹是完全一致的。两光束相互倾斜的角度与制成全息图后照明光束的倾斜角度相同。这些条纹看上去与图16.11所给出的由条纹投影轮廓测量产生的条纹是一致的。为产生等间距直条纹，物体光照应该是准直的。当使用准直照明光束时，将根据一个平面测得表面轮廓。条纹投影测量轮廓的理论也可用于双角度全息术测量轮廓，并获得由式（16.22）表示的等高线间距，式中$2\Delta\theta$为物体光照方向角的变化。关于用双角度全息术测量轮廓更详尽的论述可以参考海恩斯与希尔德布兰德（Haines and Hildebrand，1965）、希尔德布兰德与海恩斯（Hildebrand and Haines，1967、1966）、韦斯特（Vest，1979）、哈里哈伦（Hariharan，1984）等人的著作。

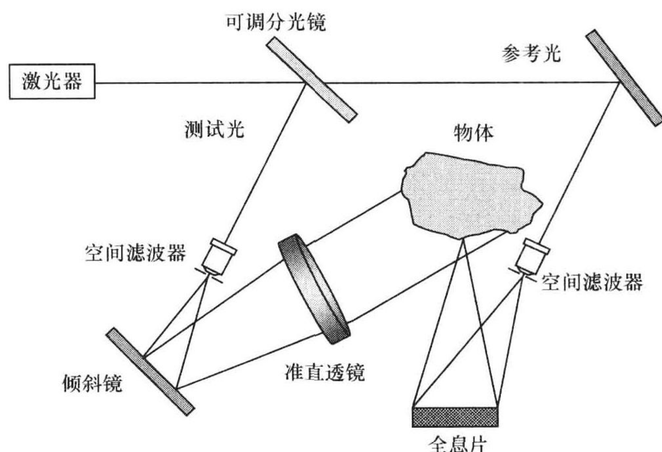


图16.18　双角度全息干涉仪装置

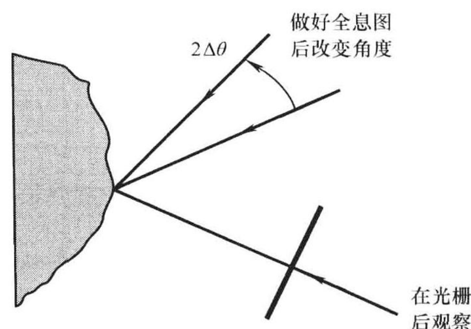


图16.19　双角度全息干涉（通过移动照明光束获得干涉条纹）

通过利用这种类型的光学装置并从两个不同角度采集数据，还可以采用本章后半部分所

描述的数字全息术与散斑干涉术来获得物体表面的轮廓信息。对于这些技术，当系统被校准后可获得 1/100 等高间距的量化精度。

16.1.9 共同特征

上面所描述的所有技术产生的条纹都与待测面的等高线相对应。只要照明与观测光束得到校准，这些技术都拥有一个相似的等高线间距，该间距由投影条纹间距或光栅周期及照明方向与观测方向所成的夹角共同确定。

只要使用正弦光栅或条纹，相移技术（参见第 14 章内容）就可以应用于任何需要获得定量高度信息的技术。所测得的表面高度与参考面有关，只要物体上的条纹或栅线是等间距的直条纹，参考面就是平面。莫尔技术与条纹投影术和双角度全息术的唯一不同就是参考面位置的改变。假如条纹被数字化或使用干涉测量技术，就能通过计算机数字化地改变参考平面。

等高线测量技术的测量精度取决于所使用条纹数量。当采用条纹跟踪技术将条纹数字化以后，测定的表面高度精度可达 1/10 条纹。假如使用相位测量技术，表面高度的测量精度可达 1/100 条纹。因此，使用尽可能多的条纹将对测量有益，且由于可以在计算机中改变倾斜量，从而比较容易改变参考平面，条纹投影轮廓测量是用干涉测量方式勾画物体表面轮廓的最为简单的方法。

16.1.10 与传统干涉仪的比较结果

表面轮廓测量可与使用长相干波长对表面轮廓进行测量的泰曼-格林干涉仪相联系。投影到物体表面上条纹或线条的位置由式（16.31）表示（假定照明和观测位置都无限远）

$$y = z\tan\alpha + nd \tag{16.31}$$

式中，z 为 y 点位置的表面高度；d 为沿 y 轴测得的条纹间距；n 为条纹整数阶次。

如果用泰曼-格林干涉仪对同一表面进行检测，亮条纹的位置是

$$2z - y\sin\gamma = n\lambda \tag{16.32}$$

式中，λ 为波长；γ 为参考平面的倾斜。

通过比较式（16.31）和式（16.32），可以看出它们是等价的，只要

$$d = \frac{\lambda_{\text{effective}}}{\sin\gamma} \tag{16.33}$$

与

$$\frac{2}{\sin\gamma} = \tan\alpha \tag{16.34}$$

式中，$\lambda_{\text{effective}}$为有效波长。有效波长可以表示为

$$\lambda_{\text{effective}} = 2C = \frac{2d}{\tan\alpha} = \frac{2p}{\cos\alpha\tan\alpha} \tag{16.35}$$

式中，C 是方程（16.20）所定义的轮廓间隔。因此，使用这些技术进行轮廓测量与使用波长为 $\lambda_{\text{effective}}$的泰曼-格林干涉仪对物体进行测量的结果类似。

16.1.11 编码与结构光投影

一种经常用来替代莫尔法的方法就是：将正弦条纹与多个二元灰度码图相结合。灰度码

图案投影技术之前被用于照相测量法，现在将其用在条纹投影法中，其目的是处理已展开的模糊度并扩大条纹投影所使用的 PSI 法的使用范围（Reich et al.，2000；Huang and Zhang，2005），还可以将该技术用来以自适应方式实时跟踪目标（Koninckx and Van Gool，2006）。使用不同频率的多图案与传统干涉测量技术中使用多波长光源来处理相位模糊度的方法类似。为了满足在机器视觉、工业检测、逆向工程、快速原型制造、生物医药和艺术等方面的应用，提出了大量不同的结构光投影编码策略（Salvi et al.，2004）。随着图像处理和条纹投影技术的进步，对物体形状测量也有了很大进步。这些技术提供能够近乎实时地跟踪物体运动的实际数据。就像对虚拟现实和面部识别所产生的影响一样，这些技术在多媒体行业为计算机图形和动画创造出许多新的应用领域。各种应用的近期综述可以在下面的文献中找到（Kujawińska and Malacara，2001；Harding，2005；D'Apuzzo，2006）。

16.1.12　应用

所有这些技术都可以用于位移测量或应力分析，也可以用于目标轮廓测量。位移测量是通过比较物体一个微小位移前后或加载负载前后的条纹图案来进行的（类似于16.2节中介绍的全息干涉技术）。由于这些测试的灵敏度是可变的，因此相比于全息技术，它们可以用于更大范围位移与应力测量。通过对所获得的两幅条纹图案进行比较，同样能够实现对两个物体或物体与标准件进行比较的差分干涉测量术。最后，利用莫尔技术进行时间平均振动分析与使用更长有效波长的时间平均全息术获得的结果相似（参见16.2.2.2节内容）。

使用相位测量技术时，可以定量地获得与某些参考面相对的表面高度。如果等高线在物空间内是等间距的直条纹，那么参考面将是一个平面。在计算机中，可从表面高度中减去任何理想平面（或面）以产生和所有表面有关的表面轮廓。这类似于通过光栅（或变形光栅）观察等高线以减少它们的数量。如果等高线不是等间距直条纹，参考面将不再是平面。通过在待测物体位置放置一块平面，并测量它的表面高度就可以确定参考面。一旦获得参考面的面形数据，就可以在随后的测量结果将其减去而获得待测面相对于参考平面的表面高度。因此，采用相位测量干涉术可以使表面高度和所有表面有关，并且能将其转化为与另一个表面有关的表面高度。对装置进行更深入的研究，可以将标准件与多个测试件进行比较测试以确定其形状是否符合规定。应当指出的是这种测试将会对某一方向比较敏感，而且可能存在一些由于表面上的阴影而造成数据丢失的区域。

例如，图16.20所示为对图16.11和图16.15采用条纹投影和相位测量干涉技术所勾画出的面具。条纹是通过使用带有氦-氖激光器的泰曼-格林干涉仪所产生的，采用具有1320×900像素高分辨率相机及变焦镜头对条纹进行观测。在每个探测点上使用相位测量技术可算出待测面的高度数据。如图16.20a所示，利用五幅干涉图来计算待测面形。将最佳拟合平面从测试面中移出就获得图16.20b。这样一来就改变了参考平面。图16.20c为待测物体移出最佳拟合平面后的二维等高线图。这些等高线也可以被视为在物体上观察到的条纹。图16.20c所示为条纹及第二道所选定的使条纹间距最小化的参考光栅。案例中等高线间距是10mm，在减去倾斜之后的总峰谷值高度偏差大约是30mm。

16.1.13　总结

投影条纹轮廓测试术、投影莫尔法、阴影莫尔法与双角度全息轮廓测试术都非常相似。它们都是将干涉条纹或者线条图案投影到待测物体上，并从另一不同的方向观测这些等高

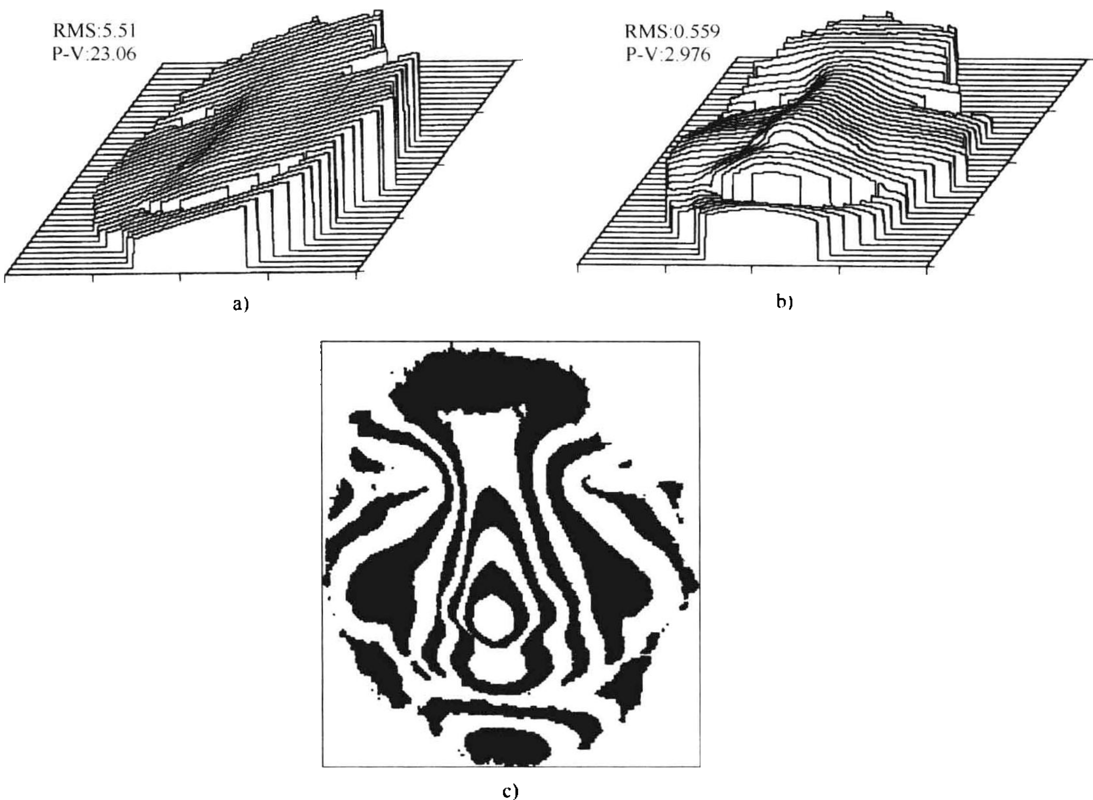


图 16.20 使用投影条纹和相位干涉测量术测量面具

（图上的单位是等高线间距，这里的等高线间距大约为 10mm。表面直径约 150mm。）

a）测得表面高度的等距图 b）移出最佳拟合平面后的等距图 c）移出最佳拟合平面后的二维等高线图

线。就莫尔技术来说，它是通过光栅对等高线进行观测以减少总的条纹数量。在所有这些技术中，都是根据参考面来测量表面高度。如果在无穷远或利用远心光学系统对投影到待测物体表面的光栅线或干涉条纹进行观测，且这两者都是等间距的直条纹，则可以将参考面视为平面。在莫尔技术中利用第二块光栅来改变参考面，但这不会影响等高线间隔。当以相对于投影方向成 90°角观测等高条纹时，该技术的测量灵敏度最高。采用相位测量技术就可以从上面所提到的这些技术中获得定量数据。表面高度的测量精度取决于所出现的条纹数量。表面高度数据测量结果可以由重复性为 1/100 的等高线间距 RMS 表示。因此，在测量时应尽可能多地使用更多的条纹。增加条纹的数量会改变等高线的间隔，一旦得出表面高度，就可以在计算机中将参考面减去以求出与任何所需表面有关的表面高度。

16.2 全息与散斑测试

16.2.1 引言

采用全息干涉术，可以通过干涉测量方式使受应力支配的漫反射或抛光表面与其处于正常状态时的情况进行比较。直接测量和剪切方法一样，对于静态、动态和时间平均测量都是可行的。

传统的全息干涉技术需要记录以前或理想目标状态的中间全息图，然后再将其与目标当

前的状态或形状进行比较。因为使用电子或数字技术，就可以直接记录或重组相位数据，所以不需要使用中间全息图记录散斑干涉仪和数字全息干涉术。这些技术能够提供与目标形状或位移相对应的干涉条纹。

本章介绍用于光学检测的全息和散斑技术。这一主题涵盖的内容非常广泛，因此重点将会集中在对这些技术的基本描述，并列举利用这些技术进行检测的例子。自本书第 2 版出版以来，已经出版了多部更深入地覆盖这个主题的书（Jacquot and Fournier，2000；Gasvik，2002；Gastinger et al.，2003；Steinchen and Yang，2003；Yaroslavsky，2004；Kreis，2005；Mix，2005；Schnars and Jueptner，2005）。有关这些技术的更深入叙述及更进一步的数学描述，读者可以查阅这些参考文献。

16.2.2　用于非相消检测的全息干涉术

在应力分析领域，全息干涉术已经使用四十多年。回顾历史，韦斯特（Vest，1979），伽斯威克（Gasvik，2002）与克里斯（Kreis，2005）等人都进行过这方面的研究。这种技术有两种基本的类型：静态和时间平均。静态检测，如双曝光全息法和实时全息干涉法，都是测量一个物体处于两种不同的应力状态并找出它们之间的不同之处。在这些测试中，假设待测物体在曝光期间不会移动。在物体无应力时进行一次曝光，在物体受到应力影响时进行第二次曝光。静态测试也可以使用脉冲激光进行，使运动突然中止并获得动态测量结果（Vest，1979；Gasvik，2002；Kreis，2005），与物体运动的变化相比，脉冲长度非常小。对于时间平均技术，测试对象精确地位于某些振动频率，并体现出周期性的运动。单次测量要在振动的多周期上进行平均。

用于全息非相消检测以测量平面外的（out-of-plane）位移的光学装置如图 16.21 所示。只要稍加改变，就能同时测量平面外的（out-of-plane）位移和平面内的（in-plane）位移，还能够进行剪切全息干涉测量。通过一个可变密度分光镜将一束激光分为两路，以控制两束光之间的光强比例。物体光束采用一道发散光束照明待测物体。物体通常是漫射的，它使光线发散开去，该光线的一部分入射到全息平面，另一道光束作为参考光直接入射到参考平

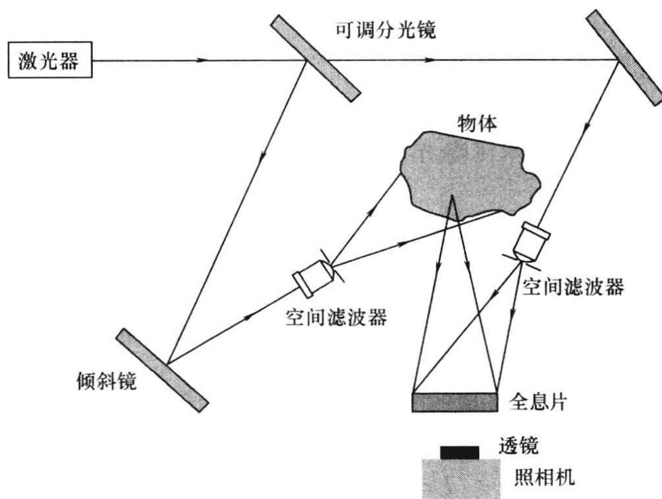


图 16.21　无损检测的全息干涉仪。

面。在全息平面上，物光束与参考光束的角度决定了全息图上干涉条纹的间距。由于全息图是两束光的简单干涉，因此物光束与参考光束的光程差必须小于所使用激光的相干长度。用具有标准具的氩离子激光或单模氦氖激光，可获得数米的相干长度；然而，若使用多模氦氖激光，程差必须在几厘米内。为了获得有效的全息图，在全息面上参考光束应比物光束明亮 6 ~8 倍，两光束的极化方向应在入射面内，并且参考光束与物光束间的夹角应足够小，以便在记录材料中产生可分解的干涉条纹。

全息干涉技术可用于测量光学元件中的温度变化、装调过程引起的光学表面面形变化、变形镜形状变化，以及研究光学元件、支架或者整个光学系统的振荡模式。这些技术适用于散射毛面，镜面反射面及透射光学元件。全息非相消检测是一个特殊的应用，即在还没有投入大量金钱和时间将光学表面装在毛坯上之前，确定未经过加工的大型反射镜镜坯的机械和热特性（Van Deelen and Nisenson，1969），可以同时获得定性条纹数据与定量位移数据。

1. 静态全息干涉

对于一个物体的静态全息测量，当物体处于一种应力状态时获得一张全息图。为实现静态测量，在生成全息图时，待测物体不能移动。物体本身应力状态改变之后，如双曝光全息干涉仪一样对第二幅干涉图进行曝光，或者像实时全息干涉仪一样观测物体。在这两种情况下，都存在应力改变前所产生的波前与应力改变之后所产生波前之间的二次干涉。对于双曝光全息术，两个波前都存储在全息图内。当全息图被参考波前照明时，会重现两个波前。当通过全息图观察这两个波前时，会观察到正弦干涉条纹。二次干涉条纹直接与两次曝光间物体的位移量对应。假如在两次曝光过程中物体没有变化，将只会产生单一干涉条纹。二次干涉图中的每一根条纹都意味着物体沿照明与观测的角平分线方向有一个波长的位移。

对于实时全息干涉仪，两个波前中的某一个被存储在全息图内，另外一个波前由测试物体实时产生。一旦记录并冲洗出全息图，务必要保证将全息图重新置于相同的位置，使得存于全息图上的波前能与从待测物体上返回的实时波前相干。实时全息干涉法同使用全息测试板类似，由于都使用双曝光技术，所以产生的条纹位置、条纹形状与测试灵敏度都与实时技术非常相似。假如物体是处于运动之中，只要使用脉冲激光或高速快门来获得运动过程中一瞬间的状态，静态测量技术能获得正弦条纹。但曝光时间必须足够短，使得物体在曝光期间不会运动。

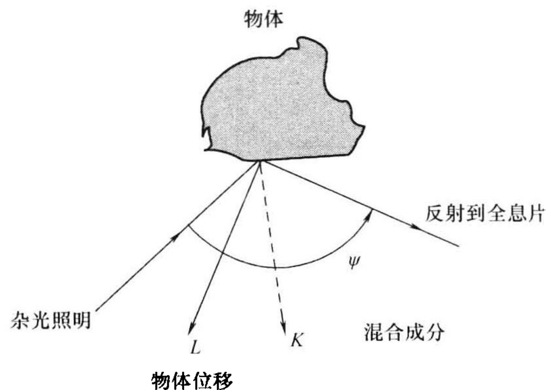


图 16.22　灵敏度矢量与位移矢量之间的几何关系

图 16.22 为几何位移矢量 $\boldsymbol{L}$ 与灵敏度矢量 $\boldsymbol{K}$ 之间的几何关系。灵敏度矢量定义为沿着测量物体位移的方向。如果视场非常大且照明物体的光源与观察位置不是位于无穷远处，则灵敏度矢量的方向将随物体表面的不同而改变。数学上，观察平面内单独点位的静态全息测量术二次干涉条纹可以表示为

$$I = I_0(1 + \gamma\cos\Delta\phi) \tag{16.36}$$

式中，I_0 为直流光强；γ 为条纹对比度；$\Delta\phi$ 是与物体两种状态差别（位移）有关的二次干涉条纹的相位。相位差别又可表示为

$$\Delta\phi = KL \tag{16.37}$$

物体在沿灵敏度矢量 X，Y 方向的位移可由式（16.38）表示

$$D(x,y) = \frac{\Delta\phi(x,y)\lambda}{4\pi\cos(\psi/2)} \tag{16.38}$$

式中，λ 为照明波长；Ψ 为照明和观测方向之间的夹角。

位移测量通常是将平面内（沿物体表面）与平面外（垂直于物体表面）的位移组合在一起。可以用特殊的装置仪测量这些分量中的某一个。如果位移的三个分量（x，y 与 z）都需测量，则需要进行三次测量（Pryputniewicz and Stetson，1976；Stetson，1979、1990；Nakadate et al.，1981；Kakunai et al.，1985；Hariharan et al.，1987）。只要物体形变不大，二次干涉条纹将位于物体上。如果外加应力使对象移动（刚体平移或旋转）和变形，二次干涉条纹将不会位于物体上（Vest，1979；Hariharan，1984）。

图 16.23 所示为使用静态全息干涉测量技术来测试直升机法兰耦合的例子。这部分同时受到来自边缘与中心的静压力。

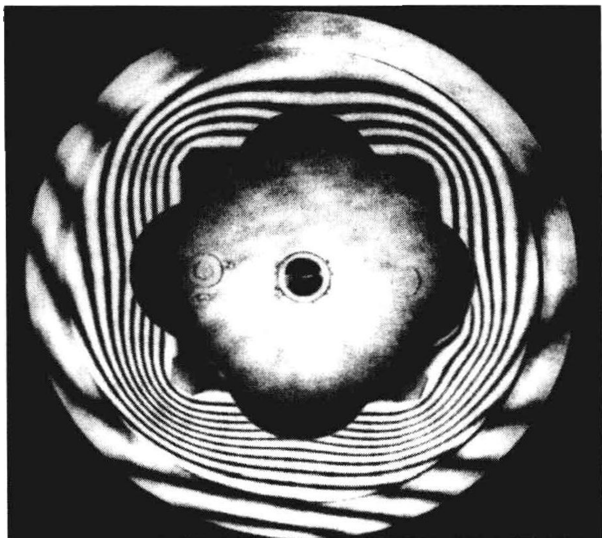


图 16.23　直升机法兰耦合的两次曝光全息干涉条纹
（Courtesy K. A. Stetson，United Technologies Research Center）

除位移测量和应力分析外，可以用实时或双曝光全息干涉法来测量带有两个不同波长、两种不同折射率或两个不同物照角度的物体轮廓（Hariharan，1984）。

2. 时间平均全息干涉仪

如果物体在一个周期运动内活跃，可以采用单次曝光来对其进行测量，对许多振动周期进行平均以获得一个平均全息图（Powell and Stetson，1965；Stetson and Powell，1965；Vest，1979；Hariharan，1984）。在这种情况下，观察平面上单独点位的二次干涉条纹可以表示为

$$I = I_0\gamma\,|M(\Omega)|^2 \tag{16.39}$$

式中，M（Ω）为物体运动的二次干涉条纹函数。当物体以正弦方式的移动时

$$M(\Omega) = J_0(\Omega) \tag{16.40}$$

式中，J_0 是零阶贝塞尔函数，对于振幅 A 和照明波长 λ 来说，$\Omega = KL \propto A/\lambda$。请注意此结果与激励振动频率无关。正弦振动的时间平均二次干涉条纹变为

$$I = I_0\gamma J_0^2(\Omega) \tag{16.41}$$

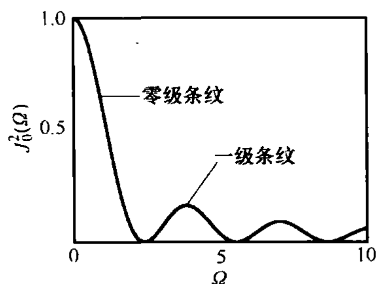


图 16.24　时间平均全息（贝塞尔函数）条纹

时间平均全息（贝塞尔函数）条纹如图 16.24 所示。对物体上的固定位置来说，零阶条纹的强度是最大的。随着运动幅度的增大，二次干涉条纹的强度随之减小。

图 16.25 为利用时间平均全息术获得 5812Hz 振动频率下的直升机齿轮全息图。这个例子中出现的四个条纹阶次表明高阶条纹的强度迅速减少。

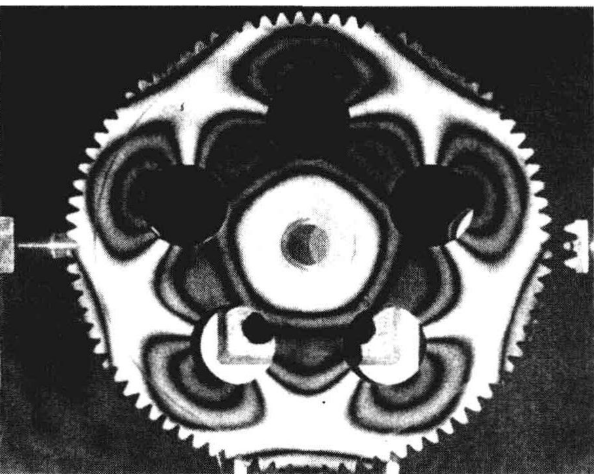


图 16.25 5812Hz 下直升机齿轮的时间平均全息条纹 (Courtesy K. A. Stetson, United Technologies Research Center)

3. 使用相位测量的全息干涉仪

直到 20 世纪 80 年代，全息技术仅提供需要由熟练操作者来解释的干涉图形式的定性数据。随着个人电脑和快速 CPU 的电视摄像机图像采集卡的出现，使用相移干涉测量技术可以不到一分钟的时间里生成定量数据。为了从物体位移中获得相位数据，如图 16.21 所示，将移相器置于干涉仪的某一道光束中。标准的相移技术（如第 14 章所述）可与产生正弦条纹的全息干涉技术结合起来使用，以产生与物体位移 $D(x, y)$ 相对应的相位图 $\Delta\phi(x, y)$ (Hariharan, 1984、1985; Gasvik, 2002; Kreis, 2005)。

图 16.26 为使用实时全息干涉法对平面外的（out-of-plane）位移进行相位测量，进而测量由机械应力造成的变化的例子。全息图由四个角固定的金属板制成，将板后的螺丝旋紧后进行相位测量。图 16.26a 的中等高线间隔为 0.3653μm，照明与观察方向之间的夹角为 60°，同时产生峰－谷值为 7.3μm 的位移。

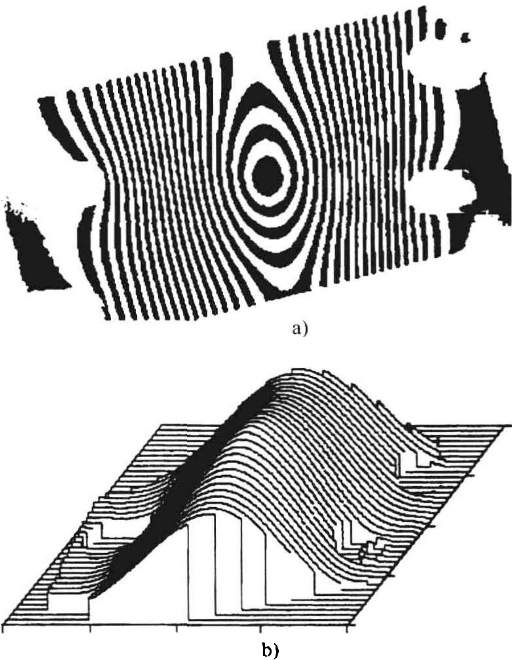


图 16.26 使用具有实时全息术的相移测量干涉仪测量金属平面的外平面位移

a) 二维轮廓图（其中等高线间距是 0.3653μm）

b) 等高线图（其中照明方向与参考方向之间的夹角是 60°，所产生的位移的峰谷值是 7.3μm）

使用相移技术能将从时间平均的振动条纹中提取定量数据 (Neumann et al., 1970; Stetson, 1982; Oshida et al., 1983; Nakadate and Saito, 1985; Stetson and Brohinsky, 1988)。在一次检测中需要进行三次分离的相位测量 (Stetson and Brohinsky, 1988)。第一次是测量物体振动，物光束与参考光束之间的相对相移，如同在标准相移干涉仪中一样。第二次测量将与物体振动频率相同的振动施加到干涉仪参考光束中的 PZT。物光与参考光振动之间的相位偏差也被加入其中，使得振动之间的相对相差为 $+\pi/3$。物光与参考光之间的相对相移也被引入并通过标准相移算法计算相位。第三次测量时，物体与参考振动引入的相位差是 $-\pi/3$。假设相位计算具有正弦物体振动及 90°的相对相移，所记录的 12 帧数据中的

某一个可以写成

$$I_{ji} = I_0[1 + \gamma\cos(\phi + \delta_i)J_0(\Omega + \beta_j)] \tag{16.42}$$

式中，$\delta_i = 0$，$\pi/2$，π 与 $3\pi/4$；$\beta_j = -\pi/3$，0，与 $\pi/3$。然后可以用如下公式计算振动的振幅

$$\Omega = \arctan\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{H_1 - H_3}{2H_2 - H_1 - H_3}\right)\right] \tag{16.43}$$

式中

$$H_1 = (I_{11} - I_{13})^2 + (I_{12} - I_{14})^2 = 4I_0^2\gamma^2 J_0^2(\Omega - \pi/3) \tag{16.44}$$

$$H_2 = (I_{21} - I_{23})^2 + (I_{22} - I_{24})^2 = 4I_0^2\gamma^2 J_0^2(\Omega) \tag{16.45}$$

$$H_3 = (I_{31} - I_{33})^2 + (I_{32} - I_{34})^2 = 4I_0^2\gamma^2 J_0^2(\Omega + \pi/3) \tag{16.46}$$

式（16.43）假定条纹具有 $\cos^2$ 的形式。正因如此，一个用来找出 $J_0^2(\Omega)$ 与 $\cos^2(\Omega)$ 函数之间差别的查找表是十分必要的（Stetson and Brohinsky，1988）。$J_0^2(\Omega)$ 与 $\cos^2(\Omega)$ 函数之间的差别引起的误差取决于条纹阶次，而条纹阶次由 H_2 的测量决定。

当观察对象因不够稳定而不能捕获具有不同相移的连续曝光信息时，可以使用傅里叶变换技术（Kreis，1986、1987）从单个干涉图中获得相位信息或者使用多路编码技术将多个相移信息通过多个探测器（Koliopoulos，1992）或单个探测器（North-Morris et al.，2005）进行编码处理。对于傅里叶变换技术，首先计算傅里叶变换形式的条纹图案，滤除一个衍射阶次，然后切换到零频，再通过逆傅里叶变换获得单一阶次的相位分布。这种技术需要正弦条纹和足够直的“倾斜”条纹来将不同阶次分开。这些技术非常灵敏，以至于能够追踪与人体脉搏和呼吸周期有关的温度变化（Creath and Schwartz，2005）。

4. 数字全息干涉仪

在数字全息干涉仪中，相位和振幅信息都是通过电子方式捕获。中间全息图被存储在数字记忆体中，并在第二次曝光后对物体进行重构（Yaroslavsky，2004；Kreis，2005；Schnars and Jueptner，2005）。所有这些过程都是数字化的，正因为如此这些系统更加灵活，比使用分离全息记录介质的系统更快。由于百万像素级的摄像头和传感器的出现，这种类型的测量变得越来越容易。在下一节中有更多有关这个问题的讨论。

16.2.3　散斑干涉术与数字全息技术

第一个数字全息技术是基于散斑干涉法的（Dandliker，2000；Joenathan and Tiziani，2003）。当开始使用电视照相机和通过电子学的方式存储和处理数字图像，这些技术首先被命名为“电子散斑干涉术”（ESPI），并常称为电视全息（Løkberg and Slettemoen，1987；Jones and Wykes，1983）。由于电视镜头较低的空间频率响应特性，这些测量技术获得同轴全息图（Gabor type holograms）。下一步是通过计算机利用 ESPI 技术及相移法来获得定量信息。这可以称为“数字散斑干涉术”，或者称为“散斑相移干涉术”（Nakadate and Saito，1985；Creath，1985b、1986；Robinson and Williams，1986）。由于可以获得具有较高空间分辨率的摄像头，就有可能制作比较熟悉的离轴全息图。这些技术都被视为数字全息术（Kreis，2005；Schnars and Jueptner，2005）或相移电子散斑术（Jacquot and Fournier，2000；Gasvik，2002）。当我们在文献中遇到这些技术时没有一个共同的名字，但它们都以相同的原理为基础。如今，数字全息一词是指用数字化存储和重建的任何类型全息图，并且散斑干涉也涉及相同的系统，在这个系统中具有散斑现象。两种技术生成干涉的机制及获得的结果都比较类似。这两种技术的区别在于不同空间频率结构的重构波及不同的噪声抑制技术。这一点很重

要，尽管下面的章节都是在讨论散斑干涉和数字全息技术。

1. 散斑干涉基础

当激光在一个散射表面散射时，散射光会出现条纹。这些条纹是一种干涉现象，称为散斑。散斑分布的概率统计取决于物体表面的概率统计。如果用透镜成像，散斑被认为是主观的，而且像面散斑非常小，其大小等于由光学系统产生的爱里斑 $2.44\lambda/F/\#$，其中 $F/\#$ 是系统的 F 数（Goodman，1975a）。强度分布和散斑的统计数据是用于生成散斑的表面粗糙度指标（Goodman，1975a、b；Erf，1978；Fujii and Lit，1978）。由物体表面所产生的散斑图案可以看做是物体的指纹图谱。当物体受到某种方式扰动时，散斑图样会按预期的方式改变。散斑摄影和散斑干涉是两种不同类型的技术（Ennos，1975；Stetson，1975；Pryputniewicz，1985；Huntley，1989）。这两种技术涉及将两个或两个以上散斑图案进行比较。最近由顾德曼（Goodman，2006）出版的书回顾了这些散斑的应用及特性。

散斑干涉法通常包括可以测量散斑相位变化的参考光束。在散斑干涉法中，假设从一个散斑图案到另一个散斑图案的散斑是相关的，因此在两次曝光期间它们的位移不能超过散斑半径。散斑摄影侧重两幅散斑图案之间的联系，这些图案来源于两次曝光并且可以用来测量大量程位移。来源于一个小区域的两幅散斑图案（相互之间转换）可在傅里叶平面上产生杨氏条纹。在余下的讨论中，我们将集中精力研究使用参考光束的散斑干涉技术。

为了帮助理解散斑干涉仪如何工作，假设将一个具有散射面的物体置于泰曼-格林干涉仪物光束中，同时将照相底板置于物体的像面位置并使系统的 F 数足够大，以生成可见散斑。当记录下散斑图案并将照相底板重新放置于原来的位置之后，由于产生的散斑与照相底板上的散斑相同，所以没有光线通过负极板。这与使用全息测试板单个条纹类似。只要物体倾斜，就能观察到与物体倾斜有关的条纹。通过散斑图案调制这些条纹，且它们呈现出较大的噪声。二次干涉条纹也称为散斑相关条纹，因为它们对应于两个条纹图案的散斑之间的相关性（Jones and Wykes，1983；Løkberg and Slettemoen，1987）。对于散斑干涉仪，通常要通过录制系统处理散斑，然而，这并不是一个必要条件（Creath，1985a）。

散斑干涉测量术可以用于与全息干涉术相同的应用领域（Dandliker，2000；Jacquot and Fournier，2000；Gasvik，2002；Gastinger et al.，2003；Joenathan and Tiziani，2003）。使用单波长光源照明，所得出的物体位移的静态和动态测量结果与全息无损检测的结果相同。正如在全息干涉中一样，散斑干涉测量无损检测技术也只能够测量物体位移的单个分量。该分量位于灵敏度矢量的方向，在关于无损检测的全息干涉测量的内容中描述过该分量。与双波长全息或干涉法相同，双波长技术也可用来进行降低灵敏度的测试。

图 16.27 所示为测量平面外位移的同轴散斑干涉装置。光学系统与全息检测技术所使用的相似，系统中光程必须在光源的相干长度之内，两光线的极化方向必须在观测面的入射平面内，散斑应该记录在检测面的平面共轭内，这样才能保证干涉条纹直接与物体表面的变化相联系。散斑干涉测量同样要使用一个小的孔径，以测定记录面位置的散斑尺寸。

从本质上讲，散斑干涉技术同前面的全息干涉术一样，但它不需要中间记录全息图。基本的数字散斑干涉测量术构成了电子散斑干涉术（ESPI）(Archbold et al.，1970；Butters and Leendertz，1971；Macovski et al.，1971；Biedermann and Ek，1975；Ennos，1975；Jones and Wykes，1983；Løkberg and Slettemoen，1987)。这项技术源于使用电视摄像机作为记录装置，以及采用电子方式、计算机或者阵列处理器处理干涉图。散斑干涉技术以前通常称为电视全息，现在更常常简称为数字全息。在 ESPI 有略微变化，它由 EOH 提供改良的干涉条纹

对比图（Stetson and Brohinsky，1985、1986、1987；Bushman，1989；Feit，1989；Stetson，1989；Stetson et al.，1989）。相位测量可应用于电子散斑干涉术（ESPI）、数字全息（DH）与电子光学全息（EOH），能提供定量位移图，与用全息干涉仪所获得的数据相同。

2. 电子散斑图干涉仪

ESPI 所使用的光学装置与图 16.27 所示类似，其中电视摄像机、CCD 探测器或阵列探测器位于测试表面像面上（Archbold et al.，1970；Butters and Leendertz，1971；Macovski et al.，1971；Biedermann and Ek，1975；Ennos，1975；Jones and Wykes，1983；Løkberg and Slettemoen，1987）。过去所有的处理都是用电子硬件完成的，并且实时地将结果显示在电视监视器上。由于标准视频信号的产生，可以用电子方式存储检测结果以供后期观察和处理。

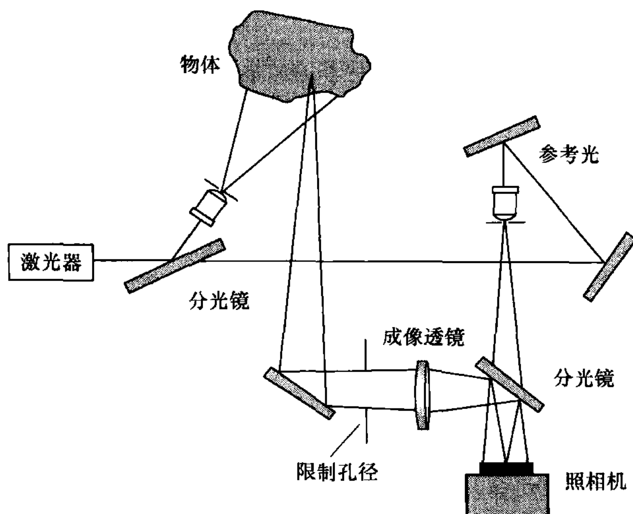


图 16.27　同轴散斑干涉仪装置（其类似产生同轴全息图的装置）

对于 ESPI，要调整限制孔径大小，以便于通过相机分解散斑（当散斑的尺寸减小时，其效果是降低二次干涉条纹的对比度）。在进行静态 ESPI 测量的情况下，通过相机记录物体的散斑干涉图并以电子方式将其储存下来。单个干涉图可以表示为

$$I = I_0(1 + \gamma\cos\phi) \tag{16.47}$$

式中，I_0 为直流光强；γ 为可视度；ϕ 为参考光与由物体散射的散斑图案之间的干涉相位。

物体所受应力改变之后，式（16.47）变为

$$I = I_0(1 + \gamma\cos\phi') \tag{16.48}$$

式中，$\phi' = \phi + \Delta\phi$，$\Delta\phi$ 是相位的改变量。

当物体所受应力改变之后，将存储的干涉图从所记录的曝光图案中减去，再将获得的差值自乘后产生如下结果

$$I^2 = 4I_0^2\gamma^2\sin^2\phi\sin^2(\Delta\phi/2) \tag{16.49}$$

该方程表明：存在由于物体位移 $\Delta\phi$ 产生的条纹，还存在由散斑相位（由参考光束和散斑物光束之间的干涉造成）ϕ 引起的条纹。$\sin^2\phi$ 项造成对散斑的调制，并使得条纹噪声明显。过去二十年中大部分的研究工作都集中在减少这种由散斑固有特性引起的噪声（例如见（Federico et al.，2000；Kolenovic et al.，2003））。这种信号有时候也是一个噪声源，这主要取决于你的观察点（Creath，1993）。

3. 时间平均测量

时间平均测量可与使用单帧数据的 ESPI 相结合。对于一个振动物体，在多个振动周期上对单个探测器点的相机信号求平均，得出该信号的表达式

$$I = I_0[1 + \gamma\cos(\phi)M(\Omega)] \tag{16.50}$$

式中，ϕ 为物光束与参考光束间的相位差；Ω 同物体位移幅度成正比。

为了处理该信号，直流分量被滤出，纠正信号并求平方得

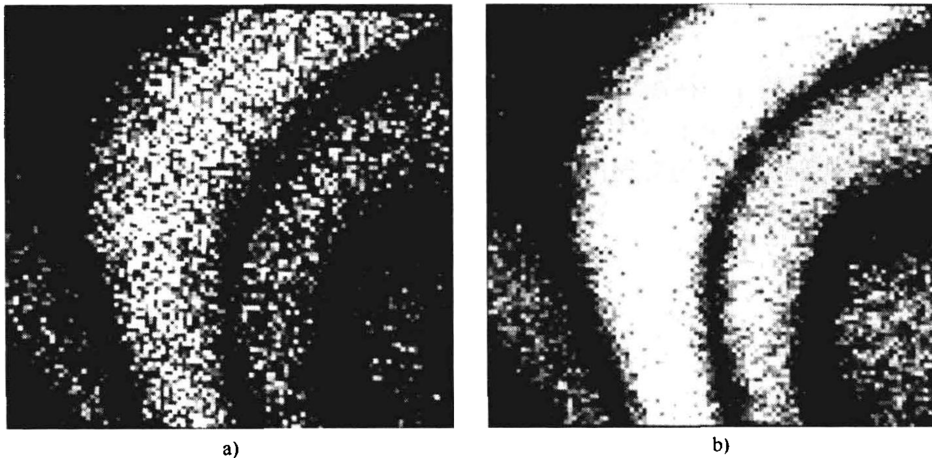
$$I = I_0\gamma(\cos^2\phi)\,|M(\Omega)|^2 \tag{16.51}$$

注意表达式中含有因子 $\cos^2\phi$，它并不包括在由式（16.39）给出的时间平均全息振动条纹表达式中。$\cos^2\phi$ 项由散斑相位引起，并使得二次干涉条纹嘈杂。对于正弦运动物体，式（16.51）可以改写成

$$I = I_0\gamma(\cos^2\phi)J_0^2(\Omega) \tag{16.52}$$

由于静态和动态测量的处理是通过电子方式进行，可以用 ESPI 以视频帧速率（每秒钟 25 或 30 帧）或者更快的速率获取条纹数据，速率取决于摄像机与数据采集硬件。即使在物体不是非常稳定的情况下，这个速度也能保证进行测量。同样的数学方法也可以用来描述时间平均数字全息术。

图 16.28 和图 16.29 所示是利用电子散斑获得条纹的例子。图 16.28a 所示为一个振动平板的单帧时间平均数据的条纹。通过改变物体上的照明角度，能将一系列明显独立的静态条纹图案平均，从而减小条纹图案中的散斑噪声，如图 16.28b 所示（Creath，1985c）。图 16.29 所示为一个振动频率为 110Hz 的车身时间平均干涉图（Malmo and Vikhagen，1988）。该数据采集于停在停车场的汽车。车身覆盖有反光胶带且座位上的扬声器开得很大。用一台带有 7mW 氦氖激光器的商用电子散斑干涉仪来进行测量。



a) b)

图 16.28 平面振动模式的散斑干涉图（Creath，1985c）

a）单个干涉图 b）使用散斑平均法

4. 电光全息

ESPI 的一个主要缺点就是在对干涉条纹数据进行处理之后，有的项与散斑相位成正比例，该散斑相位是由参考光束与物光束的散斑相干涉造成。这些项造成嘈杂外形的条纹。通过以不同方式处理数据，斯泰特森与伯恩斯克表明可以去除散斑项（Stetson and Brohinsky，1985，1986，1987；Bushman，1989；Feit，1989；Stetson，1989；Stetson et al.，

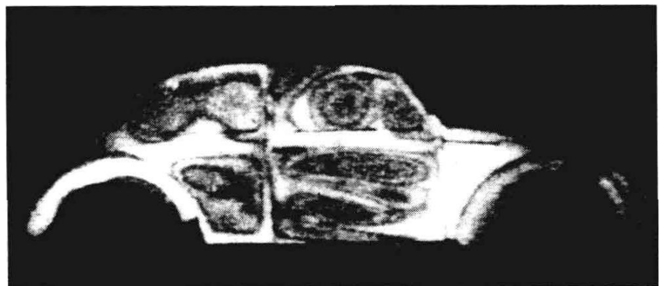


图 16.29 在停车场中振动频率为 110Hz 的汽车车身电子散斑干涉图（Malmo and Vikhagen，1988）

1989)。电光全息（EOH）系统使用与ESPI相同的光学装置；但是，将参考光束中的一面反射镜安装到压电陶瓷驱动器（PZT）上以提供物光与参考光之间的相对相移。能够以电视帧速率采集数据，并将其储存在录影带上。EOH与ESPI的主要区别在于：EOH采用可在同一时刻对大量图像进行处理的流水线处理器，而ESPI则使用简单的电子设备，一次只能处理单个帧。

对于静态测量，该技术采用带有物光与参考光之间90°的相对相移，且被存储在阵列处理器中的四帧数据。其中的一帧数据可以表示为

$$I_i = I_0[1+\gamma\cos(\phi+\delta_i)] \tag{16.53}$$

式中，$\delta_i=0$，$\pi/2$，π 和 $3\pi/4$ 是应用于 I_1，I_2，I_3 和 I_4 的相移。当施于物体的应力改变后，记录下的相互之间具有90°相对相移的四帧图像数据为

$$I_i' = I_0[1+\gamma\cos(\phi'+\delta_i)] \tag{16.54}$$

式中，$\phi'=\phi+\Delta\phi$。

在流水线图像处理器系统中将8帧图像数据合并后生成

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{[(I_1-I_3)+(I_1'-I_3')]^2+[(I_2-I_4)+(I_2'-I_4')]^2} \\ &= 4I_0\gamma\cos(\Delta\phi/2) \end{aligned} \tag{16.55}$$

该计算过程产生的条纹与物体位移造成的相位变化成正比。并不存在由散斑引起的额外项。这项计算只涉及加、减运算及为求出两数平方和的平方根程序的对照表。使用阵列处理器很容易实现这些计算。由于施加到物体上的应力改变，需要获得4帧新的数据。只要外加应力变化缓慢，可以在记录下每个视频帧和在连续视频帧之间施加90°的相对相移之后计算二次干涉条纹。因此，可以计算出这些条纹并采用图像处理系统以TV帧速率将其替换。

对于使用EOH的时间平均测量，在物体振动的同时，可以采集到带有90°相对相移的四个时间平均帧数据。其中的一帧数据可以表示为

$$I_i = I_0[1+\gamma\cos(\phi+\delta_i)M(\Omega)] \tag{16.56}$$

式中，相移 δ_i 分别0，$\pi/2$，π 和 $3\pi/4$。可以将这四帧数据结合起来以获得二次条纹

$$I = \sqrt{(I_1-I_3)^2+(I_2-I_4)^2} = 2I_0\gamma\,|M(\Omega)| \tag{16.57}$$

也可以表示为

$$I = \sqrt{(I_1-I_3)^2+(I_2-I_4)^2} = 2I_0\gamma\,|J_0(\Omega)| \tag{16.58}$$

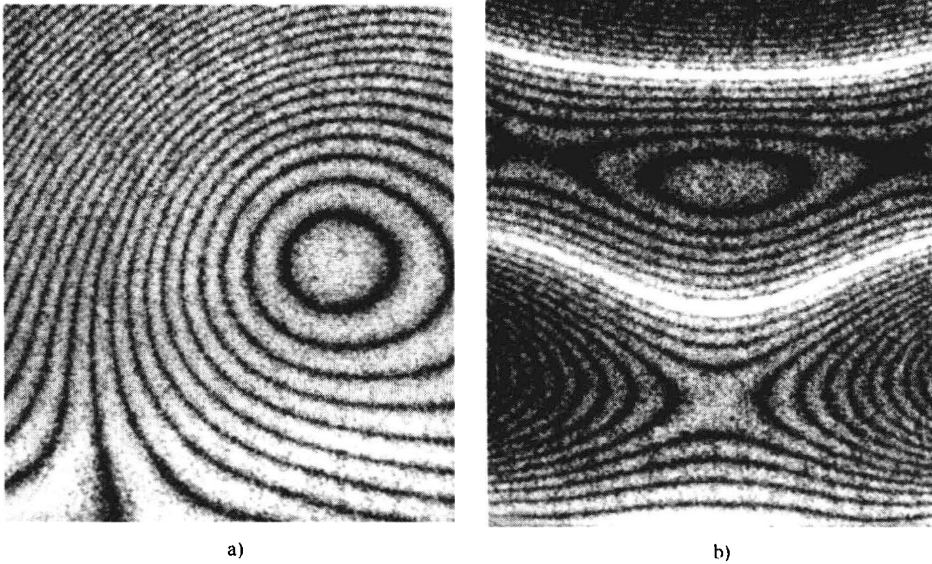
对应于正弦物体振动。请注意，散斑的调制项并不包含在其中。

图16.30所示为使用EOH产生条纹的例子。图16.30a所示为一个经受静态挠度的矩形板。图16.30b所示为相同平板的时间平均振动模式。通过使用不同的光学系统（Stetson，1989），EOH也可用于剪切干涉（剪切散斑干涉仪）。

5. 使用相位测量提取定量数据

在ESPI中可以使用类似于双波长干涉测量法的直接技术来对物体的位移或变形进行定量测量（Nakadate and Saito，1985；Creath，1985b，1986；Robinson and Williams，1986）。使用单一测量波长为物体采集强度数据，使用标准的相移技术计算干涉图案的相位。实际上，这是通过分解出现在探测面上的干涉数据将中间全息图数字化地储存在计算机中。当施加到物体上的外界应力改变后，可以采集第二组强度数据。计算物体每个状态的模 2π 相位，并通过提取这两个相位的差异来求出由于物体状态变化引起的相位

$$\Delta\phi = \phi-\phi' \tag{16.59}$$



a) b)

图 16.30 EOH 的干涉图（Courtesy K. A. Stetson, United Technologies Research Center）
a）经受静挠度的矩形板 b）相同平板的时间平均振动模式

式中，ϕ 与 ϕ'分别为物体受应力前后的相位。$\Delta\phi$ 是物体位移或形变引起的相位。$\Delta\phi$ 同样可被视为由双曝光全息干涉仪中所产生的二次干涉条纹造成的相位。

一个更为直接的测定相位的方法就是，同时采集两种物体状态的所有帧数据，然后直接根据强度数据计算相位。这可以写为

$$\Delta\phi = \arctan\frac{\sin(\Delta\phi)}{\cos(\Delta\phi)} = \arctan\frac{\sin(\phi-\phi')}{\cos(\phi-\phi')} = \arctan\frac{\sin\phi\cos\phi' - \cos\phi\sin\phi'}{\cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi'} \quad (16.60)$$

四帧法的公式则变为

$$\Delta\phi = \arctan\frac{(I_4-I_2)(I'_1-I'_3)-(I_1-I_3)(I'_4-I'_2)}{(I_1-I_3)(I'_1-I'_3)+(I_4-I_2)(I'_4-I'_2)} \quad (16.61)$$

式中，I_i 与 I'_i分别为物体各个状态下采集的第 i 帧数据。这一处理过程适用于任何相移测量算法，其中相位 ϕ_i 可以写成分子函数为 N_i 与分母函数为 D_i 的形式

$$\phi_i = \arctan\frac{\sin\phi_i}{\cos\phi_i} = \arctan\frac{N_i}{D_i} \quad (16.62)$$

然后，测量 1 和测量 2 之间的相位区别表示为

$$\Delta\phi = \arctan\frac{\sin(\phi_1-\phi_2)}{\cos(\phi_1-\phi_2)} = \arctan\frac{N_1D_2 - D_1N_2}{D_1D_2 + N_1N_2} \quad (16.63)$$

另一种类型的相位计算只需要位移/形变测量的两个不同相移位置的数据。凯尔等人（Kerr et al.，1990）研发的方法需要总共四帧的数据，两个变化前和两个变化后。

另一种使用 EOH 的变形方法。将静态测量法所采集的 8 帧数据（式（16.53）和式（16.54））用来计算由物体位移引起的相位变化 $\Delta\phi$

$$\Delta\phi = \arctan\frac{C_3 - C_4}{C_1 - C_2} \quad (16.64)$$

式中，C_i的值为

$$C_1 = [(I_1-I_3)+(I'_1-I'_3)]^2 + [(I_2-I_4)+(I'_2-I'_4)]^2 \quad (16.65)$$

$$C_2=[(I_1-I_3)-(I_1'-I_3')]^2+[(I_2-I_4)-(I_2'-I_4')]^2 \quad (16.66)$$

$$C_3=[(I_1-I_3)+(I_2'-I_4')]^2-[(I_2-I_4)+(I_1'-I_3')]^2 \quad (16.67)$$

$$C_4=[(I_1-I_3)-(I_2'-I_4')]^2-[(I_2-I_4)-(I_1'-I_3')]^2 \quad (16.68)$$

这些计算只涉及简单的运算及在阵列处理器中使用查找表，能够以视频帧速率实时地计算出与物体位移相对应的模 2π 相位。通过使用16.2.2节中介绍的全息无损检测技术及式（16.42）~式（16.46）(Pryputniewicz and Stetson，1989)，可定量测量时间平均干涉图。

事实上，已经研发出其他许多方法来提取散斑干涉和全息干涉的相位信息。这些算法大多针对某一特殊的应用或某一特定类型的测量和光学系统。

6. 动态技术

在使用散斑干涉和数字全息对散射表面进行测试的实际情况中，很难保证物体稳定并与仪器保持相对静止。最为理想的仪器是既能对振动不敏感，又能抓住运动的瞬间状态以进行测量。为此已经研发出许多不同技术来应对这些情况。实质上，该技术能够实现对任意移动物体的数据采集，并能跟踪运动、振动模式、流动模式，甚至观察冲击波的传播。对于动态测量，可以使用许多不同的商业系统，这些系统可以装备成公文包大小并安装在三脚架上。在过去十年发表的关于动态技术的大部分著作源于欧洲，并已开始寻求自动应用的解决方案。

为了获得运动过程中一瞬间的状态，通常使用某些类型的脉冲激光。脉冲激光器可以为单一脉冲提供足够的能量，以便使用标准硅探测器阵列对反射光进行良好曝光。也可以使用高速快门，但除非使用微光成像系统，否则就需要更高功率的光源以获得充分曝光。到目前为止，本章所提到的所有测量相位的定量技术都可以使用脉冲激光和高速快门，可以及时地展开相位和空间，以便及时跟踪物体的运动状态（Ruiz et al.，2003）。可以同时提取振幅和相位信息并将其添加到形状信息中，以测定复杂的运动并完成主动计量测量（Osten，2003）。利用光纤和内窥镜对光学系统进行改进，能够实现对那些隐蔽表面（Pedrini et al.，2003）或生物目标（Pedrini et al.，2005）的狭小空间进行测量。这些类型的研究成果大大扩展了数字全息和散斑干涉的应用范围。

散斑剪切是一种确保干涉仪与物体间的振动和相对运动不会影响测量数据的技术。另一种从干涉图中提取定量数据的方法是使用要么只需要一幅干涉图相位测量技术，例如傅里叶变换技术（Kreis，1986、1987），或者通过极化技术在一次性采集所有必需数据的多元相位数据技术（Koliopoulos，1992）(North-Morris et al.，2005）。

7. 散斑剪切

正如存在许多使用剪切干涉仪检测光学元件的方法一样，也存在许多使用散斑剪切干涉仪对散射表面进行检测的方法，也称为散斑剪切（Oenathan and Tiziani，2003；Steinchen and Yang，2003）。散斑剪切是检测与其自身有关的表面。由于共光路的原因，它对测试件与干涉仪间的振动和相对运动都不敏感。但是，与所有剪切干涉仪一样，它不是直接测量位移或形状。相反，它测量剪切方向的位移或形状的斜率。它可以使用本章前面提到的相位测量技术来定量提取斜率。为了从斜率数据中获得位移或形状信息，所使用的技术与本书剪切干涉仪一章所讨论的技术类似。施坦里奇与杨在他们的书——数字散斑剪切中列举了很多这方面的技术（Steinchen and Yang，2003）。

8. 低相干技术

低相干技术将较长深度解析测量范围与散斑干涉和数字全息技术结合起来（Gastinger et al. , 2003; Martinez-Leon et al. , 2004; Gastinger and Winther, 2005）。与低相干干涉类似（也称为白光干涉或垂直扫描干涉），低相干散斑技术跟踪高相干条纹和并标明最大条纹对比度的位置。这些技术需要进行深度扫描以获得一个合成相位图，它们与本书第 15 章所描述的干涉显微镜技术类似。

参考文献

Abramson N., "Sandwich Hologram Interferometry. 3: Contouring," *Appl. Opt.*, **15**, 200–205 (1976a).

Abramson N., "Holographic Contouring by Translation," *Appl. Opt.*, **15**, 1018–1022 (1976b).

Amridror I., *The Theory of the Moiré Phenomenon*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

Archbold E., J. M. Burch, and A. E. Ennos, "Recording of In-Plane Surface Displacement by Double-Exposure Speckle Photography," *Opt. Acta*, **17**, 883–898 (1970).

Armitage D., I. Underwood and S.-T. Wu, Microdisplays Move Outside the Box, *OE magazine*, 2002, November pp. 28–30.

Bell B., *Digital Heterodyne Topography*, Ph.D. Dissertation, Optical Sciences Center, University of Arizona, Tucson, AZ, 1985.

Benoit P., E. Mathieu, J. Hormier, and A. Thomas, "Characterization and Control of Three Dimensional Objects Using Fringe Projection Techniques," *Nouv. Rev. Opt.*, **6**, 67–86 (1975).

Biedermann K. and L. Ek, "A Recording and Display System for Hologram Interferometry with Low Resolution Imaging Devices," *J. Phys. E. Sci. Instrum.*, **8**, 571–576 (1975).

Brooks R. E. and L. O. Helfinger, "Moiré Gauging Using Optical Interference Patterns," *Appl. Opt.*, **8**, 935–939 (1969).

Bushman T., "Development of a Holographic Computing System," *Proc. SPIE*, **1162**, 66–77 (1989).

Butters, J. N. and J. A. Leendertz, "Speckle Pattern and Holographic Techniques in Engineering Metrology," *Opt. Laser Tech.*, **3**, 26–30 (1971).

Case S. K., J. A. Jalkio, and R. C. Kim, "3-D Vision System Analysis and Design," in *Three-Dimensional Machine Vision*, Takeo Kanade, Ed., Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1987, pp. 63–95.

Chiang, F.-P., "Moiré Methods of Strain Analysis," in *Manual on Experimental Stress Analysis*, A. S. Kobayashi, Ed., Soc. for Exp. Stress Anal., Brookfield Center, CT, 1983, pp. 51–69.

Creath K., "Averaging Double-Exposure Speckle Interferograms," *Opt. Lett.*, **10**, 582–584 (1985c).

Creath K., "Phase-Shifting Speckle Interferometry," *Appl. Opt.*, **24**, 3053–3058 (1985b).

Creath K., *Digital Speckle Pattern Interferometry*, Ph.D. Dissertation, Optical Sciences Center, University of Arizona, Tucson AZ, University Microfilms, Ann Arbor MI, 1985a.

Creath K., "Speckle: Signal or Noise?" *Proceedings FRINGE 93 Bremen 1993*, W. Jueptner and W. Osten (Eds.), Akademie Verlag, Berlin, pp. 97–102.

Creath, K., "Measuring Step Heights Using an Optical Profiler," *Proc. SPIE*, **661**, 296–301 (1986).

Creath K. and G. E. Schwartz, "The Dynamics of Life: Imaging Temperature and Refractive Index Variations Surrounding Material and Biological Systems with Dynamic Interferometry", *Fringe 2005: The 5th International Workshop on Automatic Processing of Fringe Patterns*. W. Osten (Eds.), Springer-Verlag, Berlin, 2005, pp. 588–596.

Dandliker R., "The Story of Speckles in Interferometry," *Interferometry in Speckle Light*, P.

Jacquot and J.-M. Fournier (Eds.), Springer Verlag, Berlin, 2000, pp. 3–10.

D'Apuzzo N., "Overview of 3D Surface Digitization Technologies in Europe," *Proc. SPIE* 6056, 605605:1–13, (2006).

DeMattia P. and V. Fossati-Bellani, "Holographic Contouring by Displacing the Object and the Illumination Beam," *Opt. Commun.*, **26**, 17–21 (1978).

Der Hovanesian J. and Y. Y. Yung, "Moiré Contour-Sum Contour-Difference, and Vibration Analysis of Arbitrary Objects," *Appl. Opt.*, **10**, 2734–2738 (1971).

Durelli A. J. and V. J. Parks, *Moiré Analysis of Strain*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.

Ennos A., "Speckle Interferometry," in *Laser Speckle and Related Phenomena*, J. C. Dainty, Ed., Springer-Verlag, New York, 1975, pp. 203–253.

Erf R. K., *Speckle Metrology*, Academic Press, New York, 1978.

Federico A., G. H. Kaufmann, E. P. Serrano, "Speckle Noise Reduction in ESPI Fringes Using Wavelet Shrinkage," *Interferometry in Speckle Light*, P. Jacquot and J.-M. Fournier (Eds.), Springer Verlag, Berlin, 2000, pp. 397–404.

Feit E., "Electronic Holography for Non-Destructive Testing," *Advanced Imaging*, January, 42–45, (1989).

Frankowski G., M. Chen, T. Huth, "Real-Time Shape Measurement With Digital Stripe Projection by Texas Instruments Micromirror Devices DMDTM," *Proc. SPIE* **3958**, 90–105 (2000).

Fujii H. and J. W. Lit, "Surface Roughness Measurement Dichromatic Speckle Patterns: An Experimental Study," *Appl. Opt.*, **17**, 2690–2694 (1978).

Gastinger K. and S. Winther, "Optimisation of Low Coherence Speckle Interferometry (LSCI) for Characterisation of Multi-layered Materials," *Proc. SPIE* **5858**, 58580K:1-12 (2005).

Gastinger K., O. J. Lokberg, and S. Winther, *Speckle Metrology 2003, SPIE Proc*, Bellingham, WA, SPIE, 2003.

Gastinger K., S. Winther, and K. Hinsch, "Low-Coherence Speckle Interferometry (LCSI) for Characterisation of Adhesion in Adhesive Bonded Joints," *Proc. SPIE*, **4933**, 59–65 (2003).

Gasvik K. J., *Optical Metrology*, 3rd Ed., John Wiley and Sons, Chichester, England, (2002).

Goodman J. W., "Dependence of Image Speckle Contrast on Surface Roughness," *Opt. Commun.*, **14**, 324–327 (1957b).

Goodman J. W., "Statistical Properties of Laser Speckle Patterns," in *Laser Speckle and Related Phenomena*, J. C. Dainty, Ed., Springer Verlag, Berlin, 1975a, pp. 9–75.

Guild J., *The Interference Systems of Crossed Diffraction Gratings*, Clarendon Press, Oxford, 1956.

Guild J., *Diffraction Gratings as Measuring Scales*, Oxford University Press, London, 1960.

Haines K. and B. P. Hildebrand, "Contour Generation by Wavefront Reconstruction," *Phys. Lett.*, **19**, 10–11 (1965).

Halioua M. and H.-C. Liu, "Optical Three-Dimensional Sensing by Phase Measuring Profilometry," *Opt. Lasers Eng.*, **11**, 185–215 (1989).

Harding K., "Latest Optical Methods for Industrial Dimensional Metrology," *Proc. SPIE* 6000, 600001:1–14 (2005).

Hariharan P., "Quasi-Heterodyne Hologram Interferometry," *Opt. Eng.*, **24**, 632–638 (1985).

Hariharan P., *Optical Holography*, Camrbidge University Press, Cambridge, 1984.

Hariharan P., B. F. Oreb, and C. H. Freund, "Stroboscopic Holographic Interferometry: Measurements of Vector Components of a Vibration," *Appl. Opt.*, **26**, 3899–3903 (1987).

Hildebrand B. P. and K. A. Haines, "Interferometric Measurements Using the Wavefront Reconstruction Techniques," *Appl. Opt.*, **57**, 155–162 (1967).

Huang P. S. and S. Zhang, "3D Optical Measurement Using Phase Shifting Based Methods," *Proc. SPIE* 6000, 600002:1–10 (2005).

Hung Y. Y., L. Lin, and B. G. Park, "Practical Three-Dimensional Computer Vision Techniques for Full-Field Surface Measurement," *Opt. Eng.*, **39**, 143–149 (2000).

Huntley J. M. "Speckle Photography Fringe Analysis: Assessment of Current Algorithms," *Appl. Opt.*, **28**, 4316–4322 (1989).

Indebetouw G., "Profile Measurement Using Projection of Running Fringes," *Appl. Opt.*, **17**, 2930–2933 (1978).

Jacquot P. and J.-M. Fournier, *Interferometry in Speckle Light: Theory and Applications*, Springer Verlag, Berlin, 2000.

Joenathan C. and H. J. Tiziani, "Speckle and Speckle Metrology," *The Optics Encyclopedia*, T. G. Brown, K. Creath, H. Kogelnik (Eds.), Wiley-VCH, Berlin, 2003, pp. 2709–2773.

Jones R. and C. Wykes, *Holographic and Speckle Interferometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

Kakunai S., K. Iwata, R. Nagata, and H. Sekiguchi, "Measurement of Three Components of a Displacement Vector using Heterodyne Holographic Interferometry," *Opt. Lasers Eng.*, **6**, 213–223 (1985).

Kerr D., F. Mendoza-Santoyo, and J. R. Tyrer, "Extraction of Phase Data from Electronic Speckle Pattern Interferometric Fringes Using a Single-Step Method: A Novel Approach," *J. Opt. Soc. Am. A*, **7**, 820–826 (1990).

Kolenovic E., W. Osten, and W. P. Juptner, "Improvement of Interferometric Phase Measurements by Consideration of the Speckle Field Topology," *Proc. SPIE*, **4933**, 206–211 (2003).

Koliopoulos C. L., "Simultaneous Phase-shift Interferometer," *Advanced Optical Manufacturing and Testing II*, vol. 1531, V. J. Doherty (Ed.), SPIE, Bellingham, WA, 1992, pp. 119–127.

Koninckx T. P. and L. Van Gool, "Real-Time Acquisition by Adaptive Structured Light," *IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **28**, 432–445 (2006).

Kowarschik R., P. Kuhmstedt, J. Gerber, W. Schreiber, and G. Notni, "Adaptive Optical Three-Dimensional Measurement with Structural Light," *Opt. Eng.*, 39, 150–158 (2006).

Kreis T. M., "Digital Holographic Interference-Phase Measurement Using the Fourier Transform Method," *J. Opt. Soc. Am. A*, **3**, 847–855 (1986).

Kreis T. M., "Fourier-Transform Evaluation of Holographic Interference Patterns," *Proc. SPIE*, **814**, 365–371 (1987).

Kreis T., *Handbook of Holographic Interferometry*. Wiley-VCH, Weinheim, Germany, 2005.

Kujawińska M. and D. Malacara, "Optical Metrology of Diffuse Objects: Full-Field Methods" in: *Handbook of Optical Engineering*, D. Malacara (Ed.), Marcel Dekker Inc, New York, 2001, pp. 493–522.

Ligtenberg F. K., "The Moiré Method," *Proc. Soc. Exp. Stress Anal. (SESA)*, **12**, 83–98 (1955).

Løkberg O. J. and G. A. Slettemoen, "Basic Electronic Speckle-pattern Interferometry," in *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. X, R. R. Shannon and J. C. Wyant, Eds., Academic Press, San Diego, 1987, pp. 455–504.

MacGovern A. J., "Projdected Fringes and Holography," *Appl. Opt.*, **11**, 2972–2974 (1972).

Macovski A., S. D. Ramsey, and L. F. Schaefer, "Time-Lapse Interferometry and Contouring Using Television Systems," *Appl. Opt.*, **10**, 2722–2727 (1971).

Malmo J. T. and E. Vikhagen, "Vibration Analysis of a Car Body by Means of TV Holography," *Exp. Tech.*, **12**, 28–30 (1988).

Martinez-Leon L., G. Pedrini, and W. Osten, "Short-Coherence Digital Holography for the Investigation of 3D Microscopic Samples," *Proc. SPIE*, **5457**, 528–537 (2004).

Meadows D. M., W. O. Johnson and J. B. Allen, "Generation of Surface Contours by Moiré Patterns," *Appl. Opt.*, **9**, 942–947 (1970).

Menzel E., "Comment to the Methods of Contour Holography," *Optik*, **40**, 557–559 (1974).

Mix P. E., *Introduction to Nondestructive Testing: A Training Guide, Second Edition*, John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, 2005.

Moore D. T. and B. E. Truax, "Phase-Locked Moiré Fringe Analysis for Automated Contouring of Diffuse Surfaces," *Appl. Opt.*, **18**, 91–96 (1979).

Nakadate S. and H. Saito, "Fringe Scanning Speckle-Pattern Interferometry," *Appl. Opt.*, **24**, 2172–2180 (1985).

Nakadate S., N. Magome, T. Honda, and J. Tsujiuchi, "Hybrid Holographic Interferometer for Measuring Three-Dimensional Deformations," *Opt. Eng.*, **20**, 246–252 (1981).

Neumann D. B., C. F. Jacobson, and G. M. Brown, "Holographic Technique for Determining the Phase of Vibrating Objects," *Appl. Opt.*, **9**, 1357–1362 (1970).

North-Morris M., J. Millerd, N. Brock, J. Hayes, and B. Saif, "Dynamic Phase-Shifting Electronic Speckle Pattern Interferometer," *Proc SPIE* **5869**, 58691B:1–9 (2005).

Notni G., S. Riehemann, P. Kuehmstedt, L. Heidler, and N. Wolf, "OLED Microdisplays – A New Key Element for Fringe Projection Setups," *Proc. SPIE* **5532**, 170–177 (2004).

Oshida Y., K. Itawa, and R. Nagata, "Optical Heterodyne Measurement of Vibration Phase," *Opt. Lasers Eng.*, **4**, 67–69 (1983).

Osten W., "Active Metrology by Digital Holography," *Proc. SPIE* **4933**, 96–110 (2003).

Oster G. and Y. Nishijima, "Moiré Patterns," *Sci. Am.*, **208**, May 54–63 (1963).

Patorski K. and M. Kujawinska, *Handbook of the Moiré Fringe Technique*, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1993.

Pedrini G., I. Alexeenko, and H. J. Tiziani and W. Oskey, "Digital Holographic Interferometry for Investigations in Biomechanics," *Proc. SPIE* **5776**, 325–332 (2005).

Pedrini G., I. Alexeenko, and H. J. Tiziani, "Pulsed Endoscopic Digital Holographic Interferometry for Investigation of Hidden Surfaces," *Proc. SPIE* **4933**, 123–128 (2003).

Perrin J. C. and A. Thomas, "Electronic Processing of Moiré Fringes: Application to Moiré Topography and Comparison with Photogrammetry," *Appl. Opt.*, **18**, 563–574 (1979).

Post D., "Developments in Moiré Interferometry," *Opt. Eng.*, **21**, 458–467 (1982).

Post D., B. Han and P. Ifju, *High Sensitivity Moire: Experimental Analysis for Mechanics and Materials*, Springer, 1997.

Powell R. L. and K. A. Stetson, "Interferometric Vibration Analysis by Wavefront Reconstruction," *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 1593–1598 (1965).

Proll K.-P., J.-M. Nivet, V. Voland and H. J. Tiziani, "Application of Liquid Crystal Spatial Light Modulator for Brightness Adaptation in Microscopic Topometry," *Applied Optics* 39, 6430–6435 (2003).

Pryputniewicz R. J. and K. A. Stetson, "Holographic Strain Analysis: Extension of Fringe-Vector Method to Include Perspective," *Appl. Opt.*, **15**, 725–728 (1976).

Pryputniewicz R. J. and K. A. Stetson, "Measurement of Vibration Patterns Using Electro-Optic Holography," *Proc. SPIE*, **1162**, 456–467 (1989).

Pryputniewicz R. J., "Speckle Metrology Techniques and their Applications," *Proc. SPIE*, **556**, 90–98 (1985).

Reich C., R. Ritter and J. Thesing, "3D Shape Measurement of Complex Objects by Combining Photogrammetry and Fringe Projection," *Optical Eng.* **39**, 224–231 (2000).

Reid G. T., "Moiré Fringes in Metrology," *Opt. Lasers Eng.*, **5**, 63–93 (1984a).

Reid G. T., R. C. Rixon, and H. I. Messer, "Absolute and Comparative Measurements of Three-Dimensional Shape by Pulse Measuring Moiré Topography," *Opt. Laser Tech.*, **16**, 315–319 (1984b).

Righi, A., "Sui Fenomeni Che si Producono colla Sovrapposizione dei Due Reticoli e sopra Alcune Lora Applicazioni: I," *Nuovo Cim.*, **21**, 203–227 (1887).

Ritter R. and R. Hahn, "Contribution to Analysis of the Reflection Grating Method," *Optics Lasers Eng.* **4**, 13–24 (1983).

Robinson D. W. and D. C. Wiillams, "Digital Phase Stepping Speckle Interferometry," *Opt. Commun.*, **57**, 26–30 (1986).

Rowe S. H. "Projected Interference Fringes in Holographic Interferometry," *J. Opt. Soc. Am.*, **61**, 1599–1603 (1971).

Rowe S. H. and W. T. Welford, "Surface Topography of Non-Optical Surfaces by Projected Interference Fringes," *Nature*, **216** (5117), 786–787 (1967).

Ruiz P. D., J. M. Huntley, and G. Kaufmann, "Recent Advances in Temporal Phase-Shifting Speckle Interferometry," *Proc. SPIE*, **4933**, 297–304 (2003).

Salvi J., J. Pages and J. Batlle. "Pattern Codification Strategies in Structured Light Systems," *Pattern Recognition* **37**, 827–849 (2004).

Schnars U. and W. Jueptner, *Digital Holography: Digital Hologram Recording, Numerical Reconstruction, and Related Techniques*, Springer Verlag, Berlin, 2005.

Shagam R., "Heterodyne Interferometric Method for Profiling Recorded Moiré Interferograms," *Opt. Eng.*, **19**, 806–809 (1980).

Srinivasan Y., H. C. Liu, and M. Halioua, "Automated Phase-Measuring Profilometry of 3-D Diffuse Objects," *Appl. Opt.*, **23**, 3015–3108 (1984).

Srinivasan Y., H. C. Liu, and M. Halioua, "Automated Phase-Measuring Profilometry: A Phase Mapping Approach," *Appl. Opt.*, **24**, 185–188 (1985).

Steinchen W. and L. Yang, *Digital Shearography: Theory and Application of Digital Speckle Pattern Shearing Interferometry*, SPIE, Bellingham, WA, 2003.

Stetson K. A. and R. L. Powell, "Interferometric Hologram Evaluation and Real-Time Vibration Analysis of Diffuse Objects," *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 1694–1695 (1965).

Stetson K. A. and W. R. Brohinsky, "Electro-Optic Holography and Its Application to Hologram Interferometry," *Appl. Opt.*, **24**, 3631–3637 (1985).

Stetson K. A. and W. R. Brohinsky, "Measurement of Phase Change in Heterodyne Interferometry: A Novel Scheme," *Appl. Opt.*, **25**, 2643–2644 (1986).

Stetson K. A. and W. R. Brohinsky, "Electro-Optic Holography System for Vibration Analysis and Nondestructive Testing," *Opt. Eng.*, **26**, 1234–1239 (1987).

Stetson K. A. and W. R. Brohinsky, "Fringe-Shifting Technique for Numerical Analysis of Time-Average Holograms of Vibrating Objects," *J. Opt. Soc. Am. A*, **5**, 1472–1476 (1988).

Stetson K. A. and W. R. Brohinsky, J. Wahid and T. Bushman, "An Electro-Optical Holography System with Real-Time Arithmetic Processing," *J. Nondestructive Evaluation.*, **24**, 3631–3637 (1989).

Stetson K. A., "A Review of Speckle Photography and Interferometry," *Opt. Eng.*, **14**, 482–489 (1975).

Stetson K. A., "Electro-Optic Holography for Real-Time Display and Quantitative Analysis of Interference Fringes," Fringe'89, Automatic Processing of Fringe Patterns (E. Berlin, April 25–28, 1989) and Optical Sensing and Measurement, *Proc. ICALEO, Laser Int. Am.*, **70**, 78–85 (1989).

Stetson K. A., "Use of Projection Matrices in Hologram Interferometry," *J. Opt. Soc. Am.*, **69**, 1705–1710 (1979).

Stetson K. A., "Use of Sensitivity Vector Variations to Determine Absolute Displacements in Double Exposure Hologram Interferometry," *Appl. Opt.*, **29**, 502–504 (1990).

Takasaki H., "Moiré Topography," *Appl. Opt.*, **12**, 845–850 (1973).

Takasaki H., "Moiré Topography," *Appl. Opt.*, **9**, 1467–1472 (1970).

Takeda M. and K. Mutoh, "Fourier Transform Profilometry for the Automatic Measurement of 3-D Object Shapes," *Appl. Opt.*, **22**, 3977–3982 (1983).

Takeda M., H. Ina, and S. Kabayashi, "Fourier-Transform Method of Fringe-Pattern Analysis for Computer-Based Topography and Interferometry," *J. Opt. Soc. Am.*, **72**, 156–160 (1982).

Theocaris P. S., "Moiré Fringes: A Powerful Measuring Device," *Appl. Mech. Rev.*, **15**, 333–339 (1962).

Theocaris P. S., *Moiré Fringes in Strain Analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1969.

Van Deelen W. and P. Nisenson, "Mirror Blank Testing by Real-Time Holographic Interferometry," *Appl. Opt.*, **8**, 951–955 (1969).

Varner J. R., "Holographic Moiré Surface Contouring," in *Holographic Nondestructive Testing*, R. K. Erf, Ed., Academic Press, Orlando, 1974.

Vest C. M., *Holographic Interferometry*, Wiley, New York, 1979.

Walker C. A. (Ed.), *The Practical Application of the Moire Fringe Method in the Measurement of Strain and Shape*, IOP Publishing, Bristol, UK, 2004.

Wasowski J., "Moiré Topographic Maps," *Opt. Commun.*, **2**, 321–323 (1970).

Welford, W. T., "Some Applications of Projected Interference Fringes," *Opt. Acta*, **16**, 371–376 (1969).

Weller R. and B. M. Shepperd, "Displacement Measurement by Mechanical Interferometry," *Proc. Soc. Exp. Anal., (SESA)*, **6**, 35–38 (1984).

Winther S. and G. A. Slettemoen, "An EPSI Contouring Technique in Strain Analysis," *Proc. SPIE*, **473**, 44–47 (1983).

Wyant J. C., 2006, Moiré Patterns. http://www.optics.arizona.edu/jcwyant/MoirePatterns/MoirePatterns.htm.

Yaroslavsky L., *Digital Holography and Digital Image Processing: Principles, Methods, Algorithms*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2004.

Yatagai T., M. Idesawa, Y. Yamaashi, and M. Suzuki, "Interactive Fringe Analysis System: Applications to Moiré Contourgram and Interferogram," *Opt. Eng.*, **21**, 901–906 (1982).

第 17 章　角度、棱镜、曲率半径和焦距的测量

Z·马拉卡拉（Z. Malacara）

17.1　引言

在光学车间，透镜几何量测量是精确获得透镜和光学系统参数的必要手段，测量过程不仅需要考虑检测的准确性还要考虑检测速度和简易性。这些测量应该采用国际单位，在某些情况还必须要由实验室其他标准来验证。格泽（Geiser，1965）对这一课题进行了研究。光学检测中几何量测量可主要归纳为角度、距离、曲率半径和焦距测量等几个方面。

在生产过程中，倾向于采用比较检验或零检验而不是直接测量。这些量规或样板比那些昂贵的高精度的仪器更适合车间检测。

17.2　角度测量

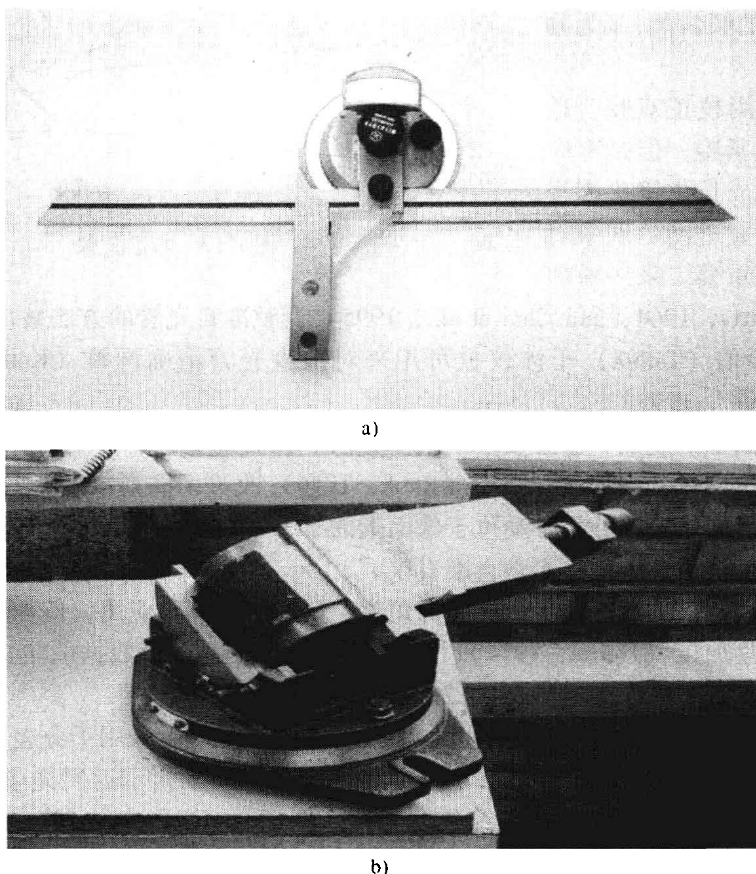
在光学车间，对角度测量精度有不同的精度级别要求。当切割玻璃时精度控制在几度即可，而对标准测试样板角度控制在 1 弧秒以内才能满足要求，根据不同的情况，发展了不同测量方法。对于角度测量最常用的单位仍然是度，它以将圆分成 360 等分来定义，1 弧度是当弧长等于圆半径时所对应的角度，而梯度很少使用，它用象限的小数来表示。

17.2.1　圆度盘和测角器

角尺是用于角度测量的主要仪器，尽管典型角尺精度只有 30′左右，但现代电子角尺精度能达到 0.5′，如图 17.1a 所示。在制造过程中，可以用几种方法将玻璃块以给定的角度切割下来。角度钳如图 17.1b 所示，和正弦板是用于支撑玻璃并精确测量角度的机械装置。对于这个支撑头和一个已知的弦边长，其平台是倾斜的，或高于某个给定的距离。

对玻璃切割机来说，经常要用到转台，它可以实现 30′左右的分度精度。霍恩（Horne，1972）描述了一种多齿平台，其测角精度可达到 0.1″。半成品玻璃楔板的角度可通过与角度块规比较测量。角度块规是一组商用角度模板，在 1°～90°角范围内组合任意角度，精度能达到 ±20″，霍恩（Horne，1974）也描述了通过反转角度块来测量负角度。角度块规由表面抛光良好的钢材制成，这样角度块与测角器就组成了测角标准，经验证，角度块规测角精度能达到 ±0.1″。与角度块规类似的还有多面体，常用的为三面体到十二面体，霍恩（Horne，1974）也报道七十二面体，多面体通常与自准直仪一起用于圆度盘和测角器的校准。现代的数控机床将玻璃切割成棱镜或多面体，切割精度能够达到几分。

测角器如图 17.2 所示，是由一个固定的准直光管和可移动望远镜组成的高精度分度台。显微镜或放大镜在圆度盘对端置放，读数平均值用于补偿中心误差。典型测角器的精度能达



a)

b)

图 17.1　电子角尺和角度钳
a）电子角尺　b）角度钳

到 20 弧秒，格泽（Geiser，1965）搭建的系统检测圆分度精度小于 1 弧秒。对一些高精度的角度测量可以用经纬仪，其读数精度可达到 1 弧秒。测角器常用于测量棱镜角度，此时带有照明十字线的望远镜作为自准直仪使用。在低精度测量时，棱镜表面须是半抛亮并涂湿；高精度测量时表面必须为全抛亮且平面度较好。

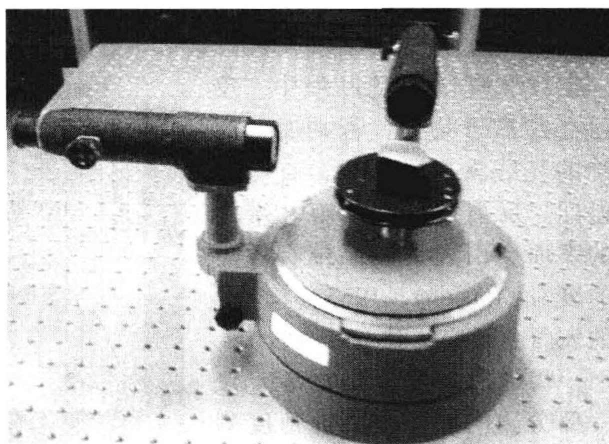


图 17.2　测角器

17.2.2　自准直仪

自准直仪本质上是一个焦距无限远的望远镜，如图 17.3 所示。在焦平面处的十字丝由物镜发送到无穷远处。反射面与光线垂直时十字丝与自准像重合，当反射面不与光线垂直时，十字丝的像在焦平面发生偏离，偏离的距离 d 为

$$d = 2\alpha f \tag{17.1}$$

式中，α 为镜子的倾斜角；f 为物镜的焦距。

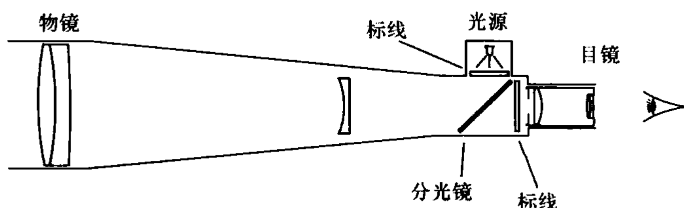


图 17.3 自准直仪

物镜通常采用校正双胶合透镜以保持结构的紧凑，但是有时也采用负透镜组成长焦镜头来提高有效焦距。准直透镜的调整对于最终精度至关重要。采用横向剪切干涉仪（Murty，1964，and Choi et al.，1995）调整准直光管的方法被广泛地使用（De Vany，1976），泰伯（Talbot）干涉仪也可用来对准直光管精确调整（Kothiyal and Sirohi，1987）(Sriram et al.，1993)。

对于在焦平面上的观测，已经发展了很多方法。在目镜上有一个被照明十字丝，用另一校正好的十字丝来测量其偏移量。朗克（Rank，1946）改进了高斯（Gauss）目镜，提供了暗场。其他系统采用鼓轮千分尺移动位于像面上的十字丝。还有些自准直仪用显微镜来观测返回的像，这些系统被称为显微光学自准直仪。

自准直仪不仅可以测量棱镜和多面体的角度，同时还有其他应用，例如测量光学平板的不平行度，圆度盘加工（Horne，1974）；通过扫描不同位置测量数据的集成处理，还可以测量机床和光学平台的平面度（Young，1967）。

对于基本型自准直仪有一些演变方案，包括双轴十字丝或者采用千分表来实现两个轴的测量。在焦平面上装有可移动的狭缝和电子同步探测系统用来指示返回光束的零位。另外，焦平面上还有位置测量传感器用于显示角度偏离。图斯顿（Turston，1986）对电子自准直仪的特性作过论述。还有一些新的具备在线数据处理功能的计算机数控自准直仪。

直接读数的自准直仪视场范围达到 1°，视场随着测量距离的增大而减小。自准直仪精度受限于图像偏心度的测量。在衍射受限成像系统里，成像精度受限于衍射极限。通常物镜的有效 F 数小，容易引起成像变形，类似于在棱镜光路中。对于精密电子质心测量系统来说，精度受探测器限制，与衍射图像无关，能超越衍射限制。在一些电子成像系统，精度可提高到 10 倍。

在自准直仪测量过程中，反射面必须靠近物镜，否则反射回系统的光线将递次减少，直至不能返回。反射面质量要好。带曲率的表面会引入透镜系统有效焦距的变化（Young，1967）。带误差的表面会影响反射光束的形状。

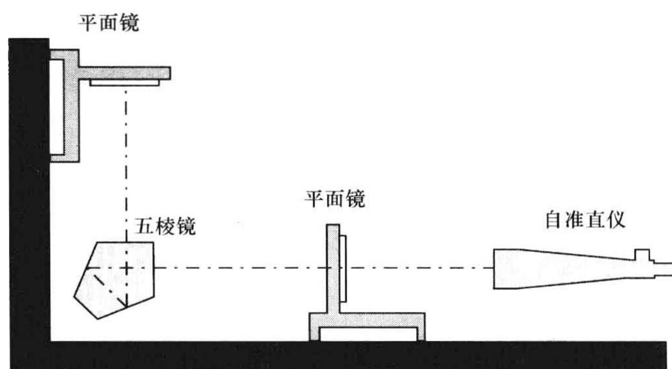


图 17.4 自准直仪检测垂直度

一些附加装置也是自准直仪的一部分。例如，在单轴角度测量时需要用到五棱镜；光直角规可以用于直角测量。如图 17.4 所示采用五棱镜和平面镜测量垂直度，水平面可以用基准液面很轻易地实现，但是要注意其稳定性。休姆（Hume，1965）对自准直仪作了完善的描述。

17.2.3　干涉法测量角度

干涉测量法主要用测量玻璃平片的小楔角（Met，1966；Leppelmeier and Mullenhoff，1970）和平行度测量，更多细节参照第1章内容。

干涉法也用来测量大角度，一种方法是准直激光束从旋转玻璃平面反射回来，产生的干涉条纹，相当于墨蒂（Murty）横向剪切干涉仪（Malacara and Harris，1970）。这种装置可以作为辅助标准检测0～360°的角度，它的精度能达到1弧秒，滕托利和塞拉亚（Tentori and Celaya，1986）对该方法做了更深入的研究。另一个方法是采用带电子计数器的迈克逊（Michelson）干涉仪测量±5°范围的角度，分辨率能达到10^{-4}度（Stijns，1986；Shi and Stijns，1988）。查普曼（Chapman）构建了一种专用于角度测量的干涉光学正弦规，测角精度达到了微秒弧度。

现在一种通过测量全部在棱镜内表面反射光线的相位偏移以实现精度精确测量的测角干涉仪已研制出来了。这一方法最初由黄提出（Huang et al.，1992；Huang and Ni，1996；Huang and Li，1998），后来齐沃又对该方法作了改进（Chiu and Su，1997a、1997b）。

17.3　棱镜的测量

在光学车间，经常会遇到这样的问题，在制造棱镜时如何精确地测量它的角度，大多数情况棱镜角度为90°、45°和30°。通过与标准角度对比就可以很容易的测量出这些角度，其他角度需要自准直仪或测角器才能精确的测量。棱镜角度精确测量对精密制造非常重要，泰曼（Twyman，1957）、德瓦尼（De Vany，1968）和范托尼（Fantone，1991）在这方面做了大量的工作。

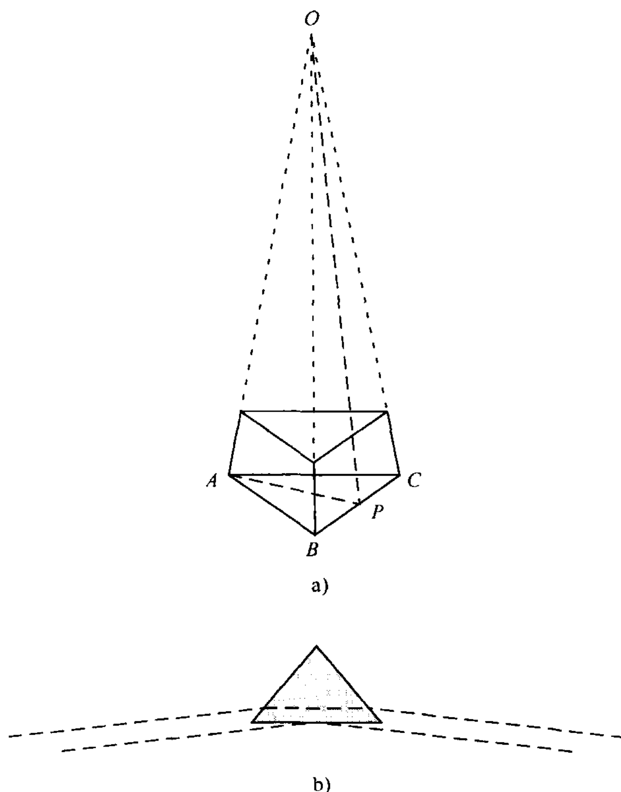


图17.5　棱镜塔差
a）自然误差　b）测量误差

为了精确测量角度，棱镜没有塔差至关重要。假设棱镜有A、B、C三个角，如图17.5所示，且OA与面ABC垂直，线AP与BC垂直，那么$\angle AOP$即可作为塔差的度量。若棱镜存在塔差，当被测平面垂直于其余面与面之间的棱线时，这些面与面之间角度会产生一个附加角差。为了简化棱镜塔差检测，约翰逊（Johnson，1947）和马丁（Martin，1924）提出同时观察通过棱镜的折射像和经棱镜底面的反射像，如图17.5b所示。当存在塔差时，直线的成像被破坏。远场目标可以逐步测量到分一级，测量灵

敏度可以达到3′。

在棱镜铣削生产时，将玻璃毛坯装卡在与标准棱镜共线的夹具上，重复铣削棱镜装置如图17.6所示，自准直仪指向标准棱镜为棱镜每个面准确定位（Twyman，1957；DeVany，1971），精确设置金刚石磨盘使塔差达到最小。小批量生产时，角度可以用曲尺测量。用曲尺观察测量棱镜角度的精度可优于1弧分（Noble，1978）。

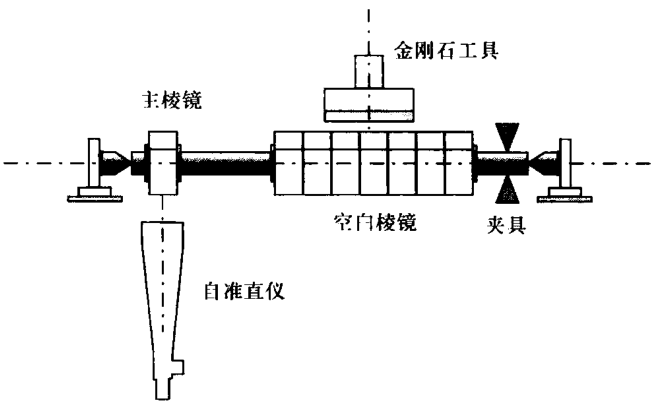


图17.6 重复铣削棱镜

棱镜中的90°角可通过自准直仪测量光线在棱镜内部反射的偏移量来实现，如图17.7a所示。在自准直仪中可以看到两个像，它们的角度偏差即为棱镜角度误差，虽然这个测量不知道该角度误差的方向。由于斜边表面必需抛光且玻璃为同种材料，所以通常选择测量相对于参考平面的外角，如图17.7b所示。在这种情况下，角度误差可通过改变棱镜的倾斜角度来测量。如果外角减小且像之间距离变远，则外角小于90°；反之，外角大于90°。

已经有几种方法可以确定角度误差的方向，德瓦尼（DeVany，1978）提出从自准直仪看两个像，它们应该是向内离焦的；如果像倾向于分离则棱镜角度大于90°。反过来，向外离焦会促使两个像之间距离靠近，则角度大于90°。另一种确定角度偏差方向的方法是在自准直仪和棱镜之间加一个角度已知的小角度楔板，楔板应仅覆盖棱镜口径的一半。拉塔杰泽科和博德纳尔（Ratajczyk and Bodnar，1966）提出了另一种采用偏振光的方法。

直角棱镜用自准直仪可得到不错的角度测量精度（Tareev，1985），在测量实践中，标准立方体已获得过优于2弧秒的测量精度（De Vany，1979）。

另一种极其简单检测90°角棱镜的方法是不借助任何工具用眼睛直接观察反射回来的观察者的光瞳像。成像形状取决于角度误差，如图17.8所示。这种方法灵敏度不是很高，仅用于定性粗测。马拉卡拉和弗洛雷斯（Malacara and Flores，1990）对该方法作了改进，在眼睛前加一个带有小孔的屏，如图17.9a所示，即可提高该方法灵敏度。在屏前面过小孔中心画有十字丝，观察到的图像如图17.9b所

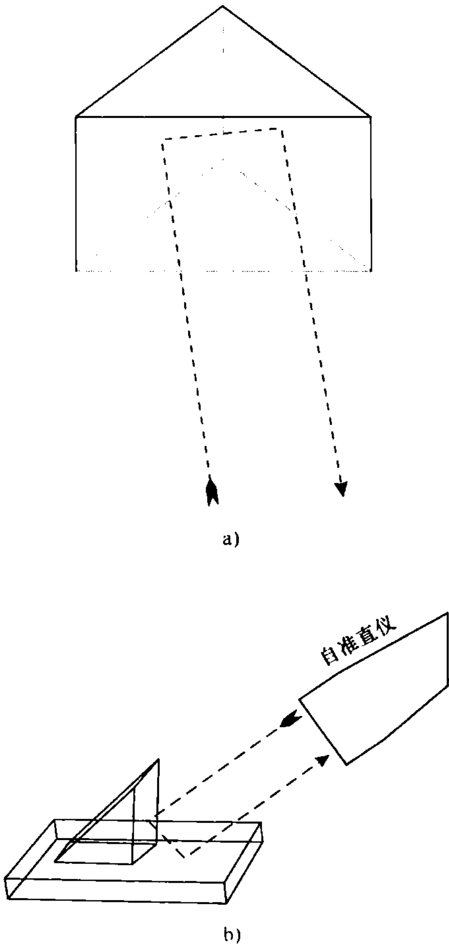


图17.7 棱镜直角测量
a）内部反射的偏移量 b）外部测量

示。很容易看出这与很多年前用于在眼睛验光和眼科检查时用来观测病人眼角膜变化的散光盘类似。

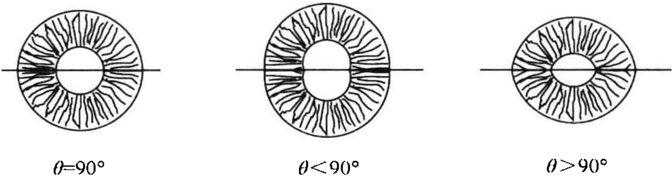


图 17.8　在 90°棱镜位置的观察瞳孔的反射成像图

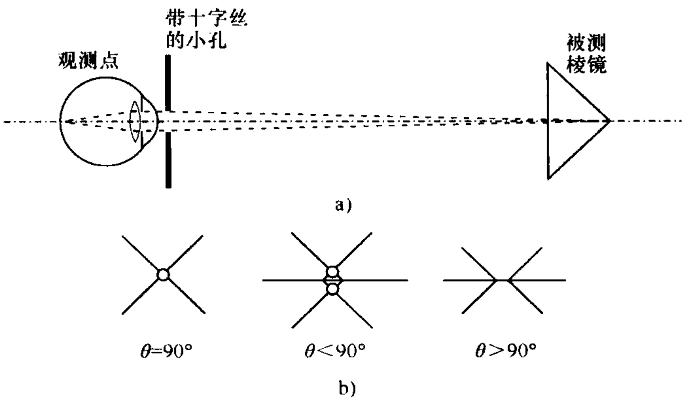


图 17.9　测试直角棱镜

a) 屏幕位于观测点之前　b) 成像图

有趣的是，上述检测与准直仪测量相反，在检测结果描述中并没有提及误差符号的不确定性。原因是观测表面位于棱镜两表面中间。马拉卡拉和弗洛雷斯对该方法作了改进（Malacara and Flores，1990），将这种简单方法与自准直望远镜结合得到如图 17.10 所示的仪器。这个系统中，两个面的交线远离视场不可见，而十字丝像则全部聚焦眼睛里。

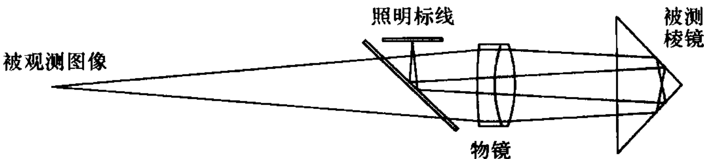


图 17.10　没有标记确定度下用改进的自准直仪测量直角棱镜

曲尺是由两个末端以枢轴连在一起的直尺组成，如图 17.11 所示，这个工具可用于生产角度为 45°的棱镜，精度约为 20 弧秒（Deve，1945）。为了做到这一点，首先将曲尺设置为 45°左右，接着找两个大小相等的直角棱镜，因为它们的角度都接近 45°，并且角度大小基本相等，适合用曲尺测量。测量过程中曲尺放置于眼睛和明亮光线之间，以便于观测很小的间隙。

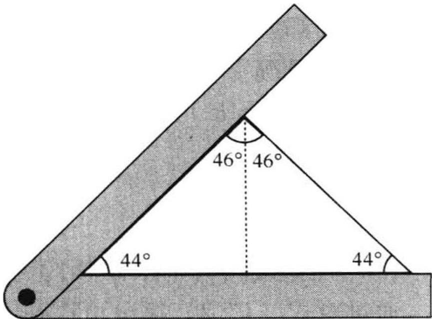


图 17.11　斜度仪测量 45°仪角棱镜

假设找到的两个角度等于 46°，两棱镜相同角度

的角靠在一起，如图 17.11 所示，靠在一起的面是 92°角的分界面。接下来是研磨大表面使它变为平面，并且最终使得角度与曲尺测量的相等。在这种情况下，分开两个棱镜，顶角应该刚好是 90°，精度与曲尺测量精度相当。最后，研磨每个棱镜大表面直到两个底角相等，这时它们正好为 45°。

如果被测棱镜斜边长 50mm，在一边的边缘有 5μm 缝隙，则所表示角度为 0.0001 弧度或 20″。

17.4 曲率半径的测量

接下来将要讲的是用机械或光学的方法测量光学球面曲率或非球面局部曲率。有些方法可以测量矢高，有些方法可以测量表面斜率，还有些方法可以直接测量曲率中心位置。

17.4.1 机械方法测量曲率半径

（1）模板法 测量曲率半径最简单的方法就是将它与不同已知曲率半径的金属模板对比，直到找到最匹配的为止。模板与光学面紧贴在一起，照明光源的放置位置在观测者的前面，而在模板和光学面的后面。如果表面是抛光面，则可探测到的间隙约 1 个波长。如果缝隙很窄，由于衍射效应会看到蓝色光。

（2）校验样板法 另一种测量曲率半径的方法是用校验样板，它与模板法有相应的曲率；牛顿环反映曲率的偏差，而使用干涉仪可进一步提高该方法的精度。这一方法要用于实际检测，表面需要被抛光（参见第 1 章内容）。

（3）球径仪 这是测量曲率半径最通用的方法，通过测量矢高来计算半径，如图 17.12 所示。经典球径仪有三个等间距支点，中间有个可移动式的矢高探头。先将球径仪放置在平面上标校，再放置被测表面，对其顶部进行测量。在实际应用中会引入一些问题，其中一个就是，球径仪的尖锐支点会划伤表面，因此在每个支点和测杆后面都放上钢球（Aldis 球径仪）。

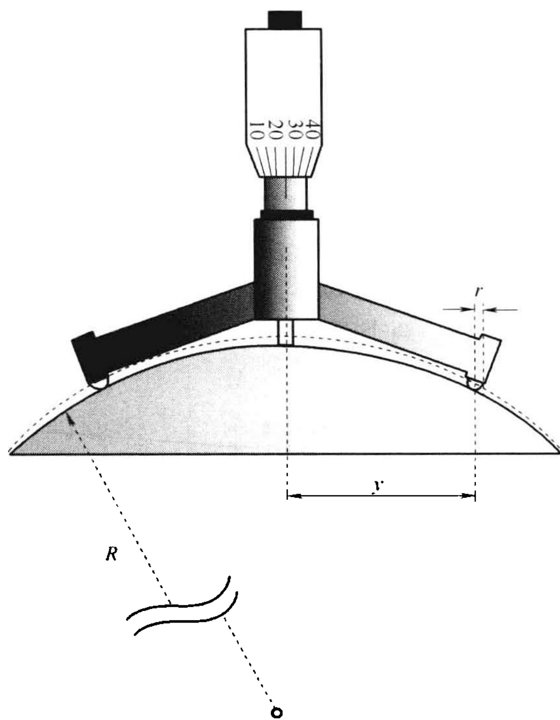


图 17.12 三脚球径仪

在这种情况下，如果测量的矢高为 z，则表面曲率半径 R 可由式（17.2）获得（Cooke，1964）

$$R=\frac{z}{2}+\frac{y^2}{2z}\pm r \tag{17.2}$$

其中，r 为钢球曲率半径，凹面时为加号，凸面时为减号。

通过对式（17.2）微分可得到以下公式可计算出测量精度

$$\frac{dR}{DZ}=\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2z^2} \tag{17.3}$$

或

$$\Delta R=\frac{\Delta z}{2}\left(1-\frac{y^2}{z^2}\right) \tag{17.4}$$

这个结果有效的前提是球径仪状态良好，且参数 y 和 r 是已知的。矢高是影响不确定度的唯一因素。卢伯利（Noble，1978）对 $y=50$mm 的球径仪精度做了评价，矢高不确定度为 0.005mm，得到结果如表 17.1 所示，可以看到精度高于2%。

表 17.1　球径仪精度

球面半径 R/mm	弧长 Z/mm	精度 ΔR/mm	相对精度 $\Delta R/R$
10000	0.125	-400	-0.040
5000	0.25	-100	-0.020
2000	0.625	-16	-0.008
1000	1.251	-4	-0.004
500	2.506	-1	-0.002
200	6.351	-0.15	-0.0008

杰瑞克（Jurek，1977）在其书中对各种球径仪的精度作了深入的分析。

另一类型球径仪就是所谓环形球径仪，它用一个杯形部件代替了三条腿，杯的顶部为平面，其外部及表面为圆柱形状，如图 17.13 所示，凹面与杯外边缘接触，而凸面则与杯内部环形边缘接触，因此式（17.2）采用不同的 y 值，且此时 r 为 0。在这种工具中，杯形部件可以更换不同环形直径，用于测量各种面的直径和曲率半径。这里有个平均效果，因为环对应的最高点是唯一的。其主要好处就是很容易发现测量面的像散变形，但不能量化测量。而对三腿球径仪来说，甚至都不能发现像散变形。

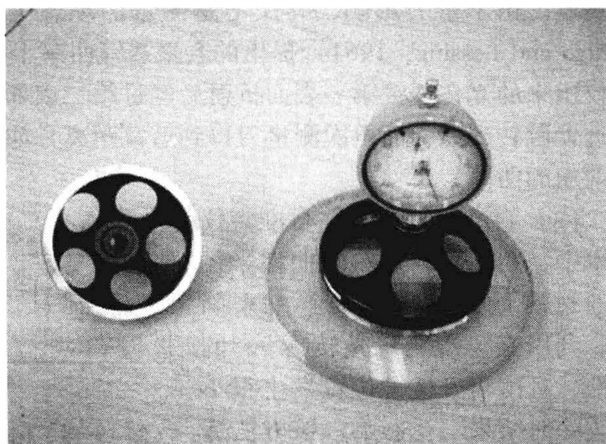
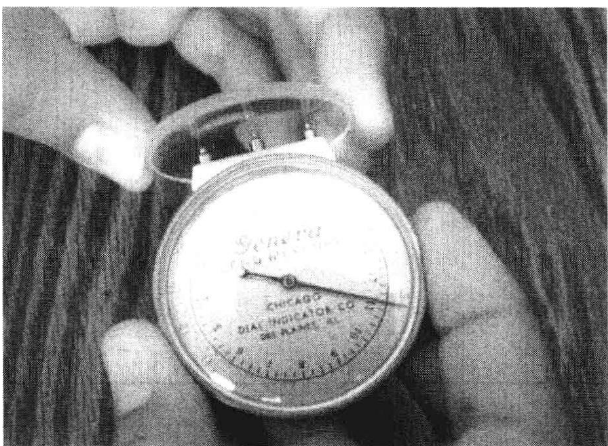


图 17.13　环形球径仪

球径仪测量精度可以通过很多方法来提高，例如通过改进矢高的不同读取方法。如施泰因海尔球径仪（Martin，1924），它引入了一个机械设备来显示中央测杆与表面的压力，从而对面进行测量。阿贝球径仪（Martin，1924）中央测杆移动的距离，是有一定量程和读数的显微镜来显示的。带有刻度盘的球径仪在快速测量的工业生产中非常常见，测杆的移动带动圆形刻度盘把手来进行度量。

一些现代球径仪用差动变压器作为测量测杆移动的传感器，这些变压器与电子电路耦合产生与测杆移动呈线性关系的电压，这些电压由微处理器分析，然后微处理器计算出在想要的单位的半径或曲率，并将它显示出来。另一情况就是用精确激光测距来对弧间距进行测量（Soares and Fernández，1988）。

条形球径仪可以测量环形面或圆柱面，它可以沿任意选定的直径方向测量曲率半径，但由于该仪器的倾斜使得它的精度不如上面所提到的量具高。特定用于验光工作的商用小型条状球径仪叫日内瓦计，如图 17.14 所示，这种仪器的刻度直接以屈光度来表示，因为对折射率为 1.53 的玻璃来说球差与矢高成线性关系。


图 17.14 日内瓦计

而在透镜的装配过程中，这个问题则变成一个逆问题：从已知的曲率半径计算镜面的矢高。萨克等人已经提出了几种不同的几何和代数计算方法（Zanker，1981；Foote，1981；Brixner，1982）。

17.4.2 光学方法测量曲率半径

（1）傅科（Foucault）刀口法 测量凹面曲率半径最简单方法之一是在其曲率中心放置刀口仪，通过测量光学表面到刀口仪之间的距离即可得到曲率半径。测量精度依赖于测距仪的精度。由于重力影响，卷尺不是测量的理想工具。傅科刀口法也可测量由雨果和莱辛（Hugo and Lessing，1964）提出的会聚透镜曲率半径。该方法测量长曲率半径时，从傅科刀口仪出来的光在透镜第一表面折射后经过第二表面反射。这样可得到从刀口到透镜的距离，将透镜翻转到另一面再次测量刀口到透镜距离，如果玻璃的折射率和厚度已知，则可获得透镜两面的曲率。

（2）自准直仪法 在自准直仪技术中，（Horne，1972）曲率半径可通过测量光学表面的斜率来确定。利用五棱镜能将光转折 90°的特性，且由于五棱镜位置发生很小的改变时结果不受影响。该方法适用于测量大口径光学面，如图 17.15 所示。可以看到，五棱镜沿着一个直径的方向在被测光学面来回移动。首先在测量到表面最高点时将光线调整到自准直仪十字丝中心，然后五棱镜远离表面中心移动，测量斜率变化。通过这些测量，曲率半径甚至面形误差都可计算出，该方法适合于检测大曲率半径，对凹面和凸面均适用。

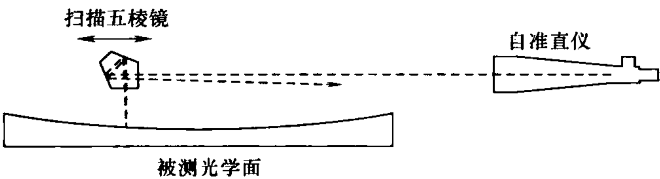


图 17.15 用自准直仪和五棱镜测量斜率确定面曲率半径

（3）共焦腔技术 光学腔技术（Gerchman and Hunter，1979、1980）可用于干涉测量非常长的曲率半径，精度可达到 0.01%，该方法由如图 17.16 所示的非佐干涉仪干涉测量光腔（见第 1 章）组成。这是 n 阶共焦腔，其中 n 为光路转折次数，曲率半径大约为腔长度 Z_n 的 $2n$ 倍。但是对更高精度测量将会用到列在表 17.2 中的数据。

（4）扫描显微镜法 这是测量小型凹光学面短曲率半径最常用的方法之一。如图 17.17 所示，在望远镜物镜前焦点处产生一点光源。光源在被测面曲率中心附近将凹光学面照亮。

凹镜面成像也在曲率中心附近，像仍用照亮该面的显微镜观测。在这种测量过程中，显微镜分别聚焦在被测表面和曲率中心，在两个位置均可观测到光源尖锐的像，曲率半径就是这两个显微镜位置间的距离之差。

显微镜移动距离可以用刻度尺来测量，精度可达到 ±0.1mm，如果用千分尺测量，精度可提高1个数量级。这种情况需要两个小型的定位块，其中一个固定在显微镜滑座上，另一个固定在静止底座上。当显微镜和放置元件的光具座靠近时，两个定位块应互相接触。

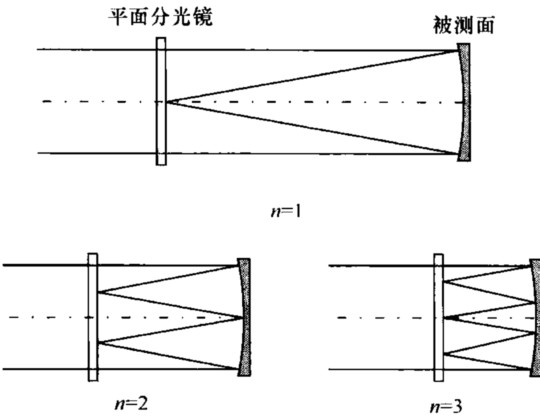


图 17.16　测量曲率半径的共焦腔布置

表 17.2　腔长于曲率半径常数关系 $Z_0 = C_n R$

N	C_n
1	0.5
2	0.25
3	0.1464466
4	0.0954915
5	0.0669873
6	0.0495156
7	0.00380603
8	0.0301537

卡内尔和威尔福德（Carnell and Welford，1971）描述了一种仅需要一次测量的方法，显微镜聚焦在曲率中心。插入千分尺将其一端与光学表面的顶点接触，调整另一端直至其在显微镜的焦点处被观测到，即可测得曲率半径。该方法精度可达到几微米。

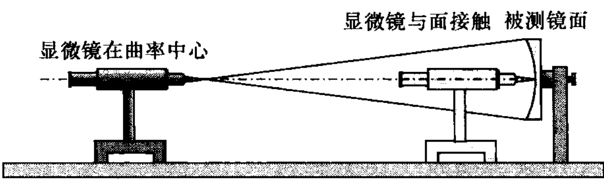


图 17.17　移动显微镜测量曲率半径

为了让显微镜准确聚焦，亮十字丝反射回来的像必须与自身像重合。

若采用一个校正良好的透镜组，其外焦距应该大于所匹配的被测凸球面的曲率半径，则这种方法也可以用来检测凸面（O'Shea，Tilstra，1988）。另一种测量凸面的替代方法是杰瑞克（Jurek，1977）所提出的在显微镜前加入一个由棱镜构成的光学组件的测量方法。

朗克（Rank，1946）验证了移动显微镜在一些实际方面的应用，在由一个小棱镜引入照明的阿贝目镜在焦点处获得暗视场。奥谢和提斯察（O'Shea and，1988 Tilstra）在1988已经用激光作为光源实现了该方法。

移动显微镜测量曲率的仪器可通过引入高精度的接近衍射极限的测量焦距和坐标位置的测量机械来改进（Jiaming et al.，1995）。

还有更多的关于检测球面曲率半径的方法已经发表出来。埃文斯（Evans，1971、1972a

and 1972b）提出通过横向移动光学表面，测量由光学表面反射回来的激光束在接收屏上的横向移动距离来确定曲率半径。罗德里格斯和达瓦拉（Cornejo-Rodríguez and Cordero-Dávila，1980）、克林斯普（Klingsporn，1983）和尤雷比等人（Díaz-Uribe et al.，1986）提出将镜面放置在一个光具座上，绕镜面曲率中心旋转镜面，进而实现曲率半径的测量。

17.5 焦距测量

经常用到从焦距出发的两个距离：其中一个是后焦距，定义为系统最后一个面到焦点的距离；另一个是焦距，定义为从基准面到焦点的距离。后焦距采用显微镜与光具座很容易就可以测量出来，测量步骤与测量曲率半径相同（Chandler，1974）。另外，对照相机和摄影机镜头来说，镜座距定义为从焦点到镜头座的距离。镜座距也可用自准直仪测量（Foote and Townsley，1947）。

17.5.1 光具座

对空气中的光学系统，主点（主平面与光轴交点）与节点重合。为了定位这一重合点，利用一个众所周知的特性，即透镜绕垂直于光轴并穿过透镜节点的轴线作小角度转动时，像不会产生任何横向偏移。用来执行这一过程的装置称为光具座（Kingslake，1932）。光具座的应用在本书的第 11 章：星点检验中有所描述。除了能精确测量焦距还可以测量其他参数如透镜像差。光具座也可用以测量反射面的像差（Cornejo-Rodríguez and Cordero-Dávila，1980），甚至可以测量环形面的像差（Díaz Uribe et al.，1986）。

17.5.2 焦距计

焦距计是一种简单的测量透镜焦距的工具。它是光学检测技师常用的工具。实际应用中焦距计或光屈度计用来测量后焦距和顶点球差，典型焦距计如图 17.18a 所示。在测量位置没有被测透镜时（零屈光度），光源照亮目标（十字丝），焦距为 f 的会聚透镜放置在距十字丝距离为 x 的位置。十字丝成像于无穷远处且望远镜能观测无穷远处目标。被测透镜放置在距会聚透镜 d 的位置处，如图 17.18b 所示。目标位置 x 为变量且可调整直到从被测透镜出来的光被准直，可在透镜前放置一小的望远镜聚焦在无穷远处来验证准直，d 选择和焦距 f 相等，则被测透镜后焦距可由薄透镜公式计算出来

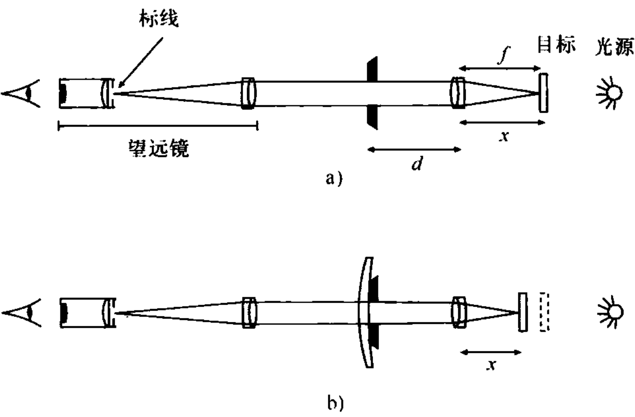


图 17.18 焦距计

a）无被测透镜 b）有被测透镜

$$\frac{1}{f_b}=\frac{1}{d}-\frac{x}{d^2}=P_v \tag{17.5}$$

其中，P_v 为镜顶屈光度，$P_v=1/f_b$。

从此处可以看出透镜的镜顶屈光度与距离 x 成线性关系，同时也可看出焦距计测量范围从正最大值 $P_{max}=1/d$ 一直到负无穷大值。这种仪器有很多变种。当引入了离焦时（Evans，1971、1972a，1972b；Bouchaud and Cogno，1982），一些现代焦距计可测量光线相对光轴的横向偏离量（横向像差）如图 10.21 所示（第 10 章），这一方法主要应用于光学测量中的现代自动焦距计中。

焦距计镜顶屈光度误差很容易可由式（17.5）推导得

$$\delta P_v = -\frac{\delta x}{f_c^2} \tag{17.6}$$

因此，镜顶屈光度误差与目标距离误差呈线性关系（Martínez-Corral et al.，1998），与准直透镜焦距平方成反比。

为了测量横向偏差，通常要用到位置传感器。需要用到类似哈特曼（Hartmann）仪器中的孔阵列。在特定情况下，一列四个孔和位置传感器可用来测量透镜镜顶屈光度（Malacara and Malacara，1992），如图 17.19 所示。用这种方法可测量眼镜片的屈光度和散光度（Salas-Peimbert et al.，2004）。一个渐进眼镜片的屈光度分布图可以通过用激光光束对透镜全口径扫描来获取（Castellini et al.，1994），（Gnavo et al.，2002）。

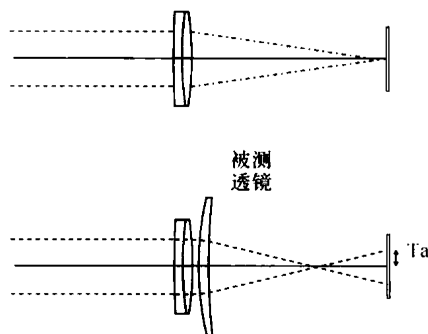


图 17.19　通过横向偏差测量焦距

17.5.3　焦距测量的其他方法

（1）莫尔（Moire）偏折法　莫尔偏折法用准直光束照射两个朗奇（Ronchi）光栅，会聚光或发散光使莫尔图形的条纹方向发生旋转，如图 17.20 所示。旋转角度大小与焦距关系为（Kafri and Glatt，1990）

$$f \approx \frac{d}{\theta \tan\alpha} \tag{17.7}$$

其中，d 为光栅线倾斜量，θ 为光栅线夹角，α 为莫尔条纹旋转的角度，如图 17.21 所示。这种方法对测量长焦距透镜（大于 1m）很有用。该方法的一种变形如图 17.22 所示（Glatt and Kafri，1987），该装置需要的准直光束穿过偏置放置的镜子，在完全准直情况下镜子的位置表示了焦点的位置，后焦距可以通过测量从镜子位置到最后一个透镜表面的距离获得。这种装置提供了一种测量任意焦距长度的焦距的方法，而不仅仅是长焦距。

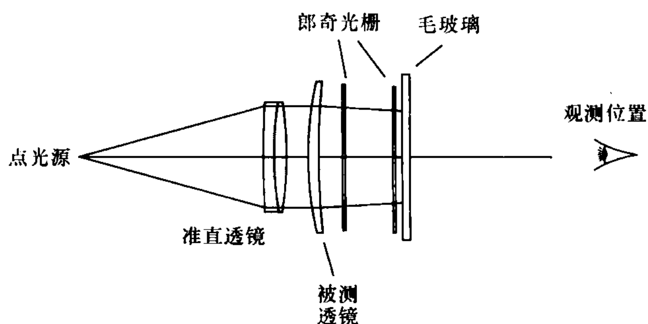


图 17.20　莫尔偏折透镜镜顶屈光度测量装置

（2）泰伯自动成像　泰伯自动成像由相干光束照射周期性朗奇光栅而形成的（参见第 9 章内容）。泰伯方法是用相干准直光束照射振幅或相位型光栅，在周期性空间等距离上将产生光栅的像，如图 17.23 所示。每一个泰伯自动影像作为透镜的物，在透镜像空间产生相同的像。有两种方法可以用来得到透镜的焦距：其中一种方法是将另一个朗奇光栅与图像位置重合（Malacara-Doblado and Malacara-Hernández，1996；Nakano and Murata，1985），形成莫

尔条纹。

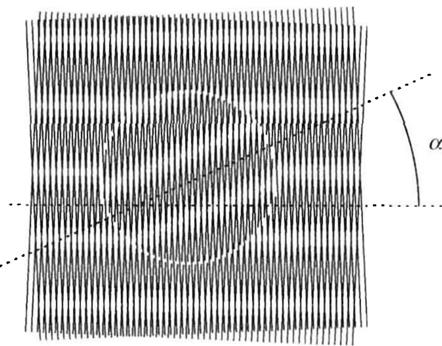


图 17.21 莫尔测量仪中的透镜莫尔图形

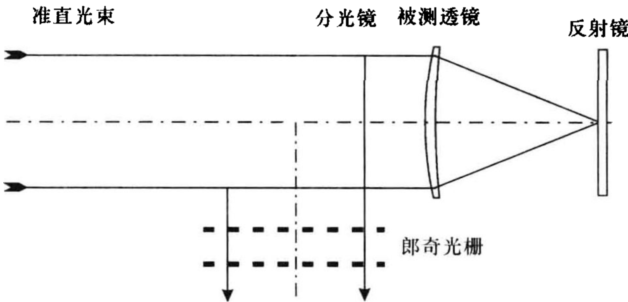


图 17.22 用于测量长短焦距的莫尔偏折装置

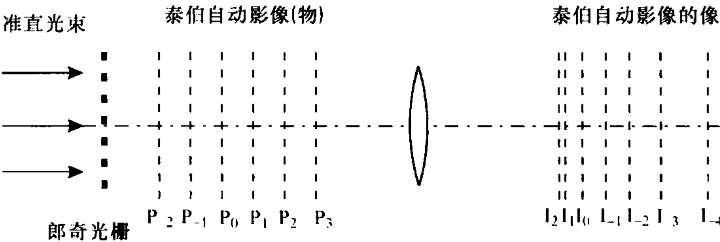


图 17.23 透镜中泰伯自动成像

莫尔干涉仪的干涉过程与所描述莫尔偏折情况类似。另一种方法也包含于测量多个图像位置中，在这种情况下不仅可测量透镜后焦距，还可测量透镜的镜顶屈光度（Bernardo and Soares，1988）。

（3）傅里叶变换　透镜傅里叶变换可用来确定透镜焦距。有一种情况（Horner，1989）是在物面上放置狭缝，在像平面上分析衍射图。通过测量衍射图的最大空间距离，可以确定焦距。这种方法的一个优点是入射光不需要完全准直。

（4）微透镜　微透镜焦距在实际测量中会遇到一些问题，最主要的一个问题是需要测量一个很小的距离。有一种解决方法是分析高斯激光束的传播（Camacho et al.，2000；Camacho et al.，2002）。在光腰位置放置一个透镜，当测量出从这里过来的光束的形状时，就可以得到透镜的焦距。

（5）光纤束　豪兰和庖尔（Howland and Proll，1970）提出了一种很巧妙的用自准直仪找焦点位置的方法，他们采用一个光纤束在透镜的焦平面上进行混合照明，又用另一个光纤束采集从自准直仪反射回来的光。

参考文献

Bernardo L. M., and O.D.D. Soares, "Evaluation of the Focal Distance of a Lens by Talbot Interferometry," *Appl Opt*, **27**, 296–301 (1988).

Bouchaud P. and J. A. Cogno, "Automatic Method for Measuring Simple Lens Power," *Appl. Opt.*, **21**, 3068–3068 (1982).

Brixner B., "Easier Way to Find the Sagittal Depth: Comments," *Appl. Opt*, **21**, 976–976 (1982).

Camacho A. A., C. Solano, M. Cywiak, G. Martínez-Ponce, and R. Baltasar, "Method for the

Determination of the Focal Lenght of a Microlens," *Opt. Eng.*, **39**, 2149–2152 (2000).

Camacho A. A., C. Solano, G. Martínez-Ponce, and R. Baltasar, "Simple Method to Measure the Focal Lenght of a Lenses," *Opt. Eng.*, **41**, 2899–2902 (2002).

Carnell K. H. and W. T. Welford, "A Method for Precision Spherometry of Concave Surfaces," *J. Phys.*, **E4**, 1060–1062 (1971).

Castellini C., F. Francini, and B. Tiribilli, "Hartmann test modification for measuring ophthalmic progressive lenses," *Appl. Opt.*, **33**, 4120–4124 (1994).

Chandler C. H., "A Lens-Measuring Instrument-Engineered for People," Opt. Eng., **13**, 275–278 (1974).

Chapman G. D., "Interferometric Angular Measurement," *Appl. Opt.*, **13**, 1646–1651 (1974).

Chiu M.-H. and D.-C. Su, "Angle Measurement Using Total-Internal-Reflection Heterodyne Interferometry," *Opt. Eng.*, **36**, 1750–1753 (1997a).

Chiu M.-H. and D.-C. Su, "Improved Technique for Measuring Small Angles," *Appl. Opt.*, **36**, 7104–7105 (1997b).

Choi J., G. M. Perera, M. D. Aggarwal, R. P. Shukla, and M. V. Mantravadi, "Wedge-Plate Shearing Interferometers for Collimation Testing: Use of a Moiré Technique," *Appl. Opt*, **34:19**, 3628–3638 (1995).

Cooke F., "The Bar Spherometer," *Appl.Opt*, **3**, 87–88 (1964).

Cornejo-Rodriguez A. and A. Cordero-Davila, "Measurement of Radii of Curvature of Convex and Concave Surfaces Using a Nodal Bench and a He–Ne Laser," *Appl. Opt*, **19**, 1743–1745 (1980).

DeVany A. S., "Making and Testing Right Angle and Dove Prisms," *Appl. Opt.*, **7**, 1085–1087 (1968).

DeVany A. S., "Reduplication of a Penta-Prism Angle Using Master Angle Prisms and Plano Interferometer," *Appl. Opt.*, **10**, 1371–1375 (1971).

DeVany A. S., "Setting the Optimum Focus of the Pinhole or Reticle of a Collimator Lens," *Appl. Opt.*, **15:5**, 1104 (1976).

DeVany A. S., "Testing Glass Reflecting-Angles of Prisms," *Appl Opt.*, **17**, 1661–1662 (1978).

DeVany A. S., "Near Perfect Optical Square," *Appl. Opt.*, **18**, 1284–1286 (1979).

Deve C., *Optical Workshop Principles* (Translated by T. L. Tippell), Hilger and Watts, London 1945.

Diaz-Uribe R., J. Pedraza-Contreras, O. Cardona-Nuñez, A. Cordero-Dávila, and A. Cornejo Rodriguez, "Cylindrical Lenses: Testing and Radius of Curvature Measurement," *Appl.Opt.*, **25**, 1707–1709 (1986).

Evans J. D., "Method for Approximating the Radius of Curvature of Small Concave Spherical Mirrors Using a He-Ne Laser," *Appl. Opt.*, **10**, 995–996 (1971).

Evans J. D., "Equations for Determining the Focal Length of On-Axis Parabolic Mirrors by He–Ne Laser Reflection," *Appl. Opt.*, **11**, 712–714 (1972a).

Evans J. D., "Error Analysis to: Method for Approximating the Radius of Curvature of Small Concave Spherical Mirrors Using a He–Ne Laser," *Appl. Opt.*, **11**, 945–946 (1972b).

Fantone, S. D., *Optics Cooke Book*, 2nd ed. Optical Society of America, Washington, D. C., 1991.

Foote V. S., "Easier Way to Find the Sagitta Depth," *Appl. Opt.*, **20**, 2605 (1981).

Foote P. C. and Townsley, M. G., "Autocollimator for Precise Measurement of the Flange Focal Distance of Photographic Lenses," *J. Opt. Soc. Am.*, **37**, 42–42 (1947).

Geiser R. D., "Precision and Accuracy," in: R. Kingslake (Ed), *Applied Optics and Optical Engineering*, vol. I, Academic Press, New York, 1965, Chapter 11.

Gerchman M. C. and G. C. Hunter, "Differential Technique for Accurately Measuring the Radius of Curvature of Long Radius Concave Optical Surfaces," *Proc. SPIE*, **192**, 75–84 (1979).

Gerchman M. C. and G. C. Hunter, "Differential Technique for Accurately Measuring the Radius of Curvature of Long Radius Concave Optical Surfaces," *Opt. Eng*. **19**, 843–848

(1980).

Glatt I. and O. Kafri, "Determination of the Focal Length of Nonparaxial Lenses by MoiréDeflectometry," *Appl. Opt.*, **26**, 2507–2508 (1987).

Gnavo G., Z. Y. Wu, J. L. de Bougrenet de la Tocnaye and L. Liu, "Large-Aperture Automatic Focimeter for the Measurement of Optical Power and Other Optical Characteristics of Ophthalmic Lenses," *Appl. Opt.*, **41**, 5997–6005 (2002).

Horne D. F., *Optical Production Technology*, Adam Hilger, London and Crane Russak, New York, 1972, Chapter XII.

Horne D. F., *Dividing, Ruling and Mask Making*, Adam Hilger, London, 1974, Chapter VII.

Horner J. L. "Collimation Invariant Technique for Measuring the Focal Length of a Lens," *Appl. Opt.*, **28**, 1047–1047 (1989).

Howland, B., and A. F. Proll, "Apparatus for the Accurate Determination of Flange Focal Distance," *Appl. Opt.*, **11**, 1247–1251 (1970).

Huang P. S., S. Kiyono, and O. Kamada, "Angle Measurement Based on the Internal-Reflection Effect: A New Method," *Appl. Opt.*, **31**, 6047–6055 (1992).

Huang P. S. and J. Ni, "Angle Measurement Based on the Internal-Reflection Using Elongated Critical-Angle Prisms," *Appl. Opt.*, **35**, 2239–2241 (1996).

Huang P. S. and Y. Li, "Small-Angle Measurement by Use of a Single Prism," *Appl. Opt.*, **37**, 6636–6642 (1998).

Hugo T. J. and N. V. D. W. Lessing, "Determination of Long Radii of Curvature of Positive Lenses," Appl. Opt., **3**, 483–486 (1964).

Hume K. J., *Metrology with Autocollimators*, Hilger and Watts, London, 1965.

Johnson B. K., *Optics and Optical Instruments*, Dover, New York, 1947, Chapters II and VIII.

Jiaming L, S. Datu, Y. Fen and S. Dingguo, "Research on High Precision Measuring Technique for the Curvature Radius of Concave Spherical Surface," *Proc. SPIE*, **2536**, 489–497 (1995).

Jurek B., *Optical Surfaces*, Elsevier Scient. Publ. Co., New York, 1977.

Kafri, O. and I. Glatt, *The Physics os Moire Metrology*, Wiley Interscience, New York, 1990.

Kingslake R., "A New Bench for Testing Photographic Lenses," *J. Opt. Soc. Am.*, **22**, 207–222 (1932).

Klingsporn P. E., "Use of a Laser Interferometric Displacement-Measuring System for Noncontact Positioning of a Sphere on a Rotation Axis Through its Center and for Measuring the Spherical Contour," *Appl. Opt.*, **18**, 2881–2890 (1983).

Kothiyal M. P. and R. S. Sirohi, "Improved Collimation Testing using Talbot Interferometry," *Appl. Opt*, **26**, 4056–4057 (1987).

Leppelmier G. W. and D. J. Mullenhoff, "A Technique to Measure the Wedge Angle of Optical Flats," *Appl. Opt.*, **9**, 509–510 (1970).

Malacara D. and O. Harris, "Interferometric Measurement of Angles," *Appl. Opt.*, **9**, 1630–1633 (1970).

Malacara D. and R. Flores, "A Simple Test for the 90 Degrees Angle in Prisms," *Proc. SPIE*, **1332**, 36–40 (1990).

Malacara D. and Z. Malacara, "Testing and centering of lenses by means of a Hartmann test with four holes," *Opt. Eng.*, **31**, 1551–1555 (1992).

Malacara-Doblado D. and D. Malacara-Hernández, "Measuring Convergence or Divergence Power with Moiré Fringes," *Proc SPIE*, **2860**, 390–393 (1996).

Martin L. C., *Optical Measuring Instruments*, Blackie and Sons Ltd., London, 1924.

Martínez Corral, M, W. D. Furlan, A. Pons and G Saavedra, *Instrumentos Ópticos y Optométricos. Teoría y Prácticas*, Universitat de Valencia, Valencia, 1998.

Met V., "Determination of Small Wedge Angles Using a Gas Laser," *Appl. Opt.*, 5, 1242–1244 (1966).

Murty M. V. R. K., "The Use of a Single Plane Parallel Plate as a Lateral Shearing Interferometer with a VisibleGas Laser Source," *Appl. Opt.* **3:4**, 531–534 (1964).

Nakano Y. and K. Murata, "Talbot Interferometry for Measuring the Focal length of a Lens," *Appl. Opt.*, **24:19** (1985).

Noble R. E. "Some Parameter Measurements," in: D. Malacara (Ed) *Optical Shop Testing*, 1st. Edition, John Wiley and Sons, New York, 1978.

O'Shea D. C. and S. A. Tilstra, "NonContact Measurements of Refractive Index and Surface Curvature," *Proc. SPIE*, **966**, 172–176 (1988).

Rank D. H., "Measurement of the Radius of Curvature of Concave Spheres," *J. Opt. Soc. Am.*, **36**, 108–110 (1946).

Ratajczyk F. and Z. Bodnar, "An Autocollimation Measuremesnt of the Right Angle Error with the Help of Polarized Light," *Appl. Opt.*, **5**, 755–758 (1966).

Salas-Peimbert D. P., G. Trujillo-Schiaffino, D. Malacara-Hernández, D. Malacara-Doblado and S. Almazán-Cuellar, "Ophthalmic Lenses Measurement Using Hartmann Test," *Proc. SPIE*, **5622**, 102–106 (2004).

Shi P. and E. Stijns, "New Optical Method for Measuring Small Angle Rotations," *Appl. Opt.*, **27**, 4342–4344 (1988).

Soares O. D. D. and J. F. Fernández, "Laser-Aided Spherometer," *Proc. SPIE*, **954**, 234–240 (1988).

Sriram, K. V., P. Senthikumaran, M. P. Kothiyal, and R. S. Sirohi, "Double wedge plate shearing interferometer for collimation testing: new configurations," Appl. Opt. **32**, 4199–4203 (1993).

Stijns E., "Measuring Small Rotation Rates with a Modified Michelson Interferometer," *Proc. SPIE*, **661**, 264–266 (1986).

Tareev A. M., "Testing the Angles of High-Precision Prisms by Means of an Autocollimator and a Mirror Unit," *Sov. J. Opt. Technol.*, **52**, 50–52 (1985).

Tentori D. and M. Celaya, "Continuous Angle Measurement with a Jamin Interferometer," *Appl. Opt.*, **25**, 215–220 (1986).

Thurston T. H., "Specifying Electronic Autocollimators," *Proc. SPIE*, **661**, 399–401 (1986).

Twyman F., *Prisms and Lens Making*, 2nd ed., Hilger and Watts, London, 1957.

Wasilik, J. H., T. V. Bloomquist, and C. S. Willett, "Measurement of Parallelism of the Surfaces of a Transparent Sample Using Two-Beam Nonlocalized Fringes Produced by a Laser," *Appl. Opt*, **10**, 2107–2112 (1971).

Young A. W., "Optical Workshop Instruments," in: R. Kingslake, (Ed.), Applied Optics and Optical Engineering, vol 4, Academic Press, New York, 1967, Chapter 7.

Zanker A. "Easy Way to Find the Saggita Depth," *Appl. Opt.*, **20**, 725–726 (1981).

第 18 章　光学面及其特性的数学描述

D. 马拉卡拉（D. Malacara）

18.1　光学面的定义

非球面的光学面在光学系统中是非常重要的，已经有很多人对其进行了研究和描述，如舒尔兹（Schulz，1988）和香农（Shannon，1980）。需要特别注意的是旋转对称光学面，它可以通过下面的关系式详细说明，当以 Z 轴为旋转轴时

$$z = \frac{cS^2}{1+[1-(K+1)c^2S^2]^{1/2}} + A_1S^4 + A_2S^6 + A_2S^8 + A_4S^{10} \tag{18.1}$$

式中，$S^2 = x^2 + y^2$；$c = 1/r = 1/$曲率半径；A_1，A_2，A_3 和 A_4 为非球面形变系数；K 为二次曲线常数，是二次曲面偏心率的函数（$K = -e^2$）。

如果式（18.1）中的 A_i 均为零，这个光学面就是二次回旋曲面。二次曲面的二次曲线常数值如表 18.1 所示。

表 18.1　二次曲面的二次曲线常数值

二次曲面类型	二次曲线常数值
双曲面	$K < -1$
抛物面	$K = -1$
扁长的回旋椭圆体或椭圆体（绕长轴旋转的椭圆体）	$-1 < K < 0$
球面	$K = 0$
扁平的回旋椭圆体（绕短轴旋转的椭圆体）	$K > 0$

在一个以 Z 轴为对称的回旋椭球面中，偏心率的定义如下

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \tag{18.2}$$

式中，沿着 Z 轴的是长轴 a，沿着 Y 轴的是短轴 b。以扁平的回旋椭圆体为例，与式（18.2）定义相同，但是沿着 Z 轴的是短轴 a，沿着 Y 轴的是长轴 b。因此，偏心率是一个虚构的数，并且当 $a < b$ 时，$K > 0$。

二次曲线常数不能针对一个平面（$C = 0$）被定义。二次曲线常数的另一种表达式可根据顶点曲率半径 r 和由曲率中心到位于曲率中心与光学表面之间的二次光学表面焦点的距离 L 表述为

$$K = -\frac{L^2}{(L-r)^2} \tag{18.3}$$

L 与相应的 K 值对于不同的 L 和 r 的值如图 18.1 所示。

二次回旋曲面还有一个比式（18.1）稍微简单点的表达式

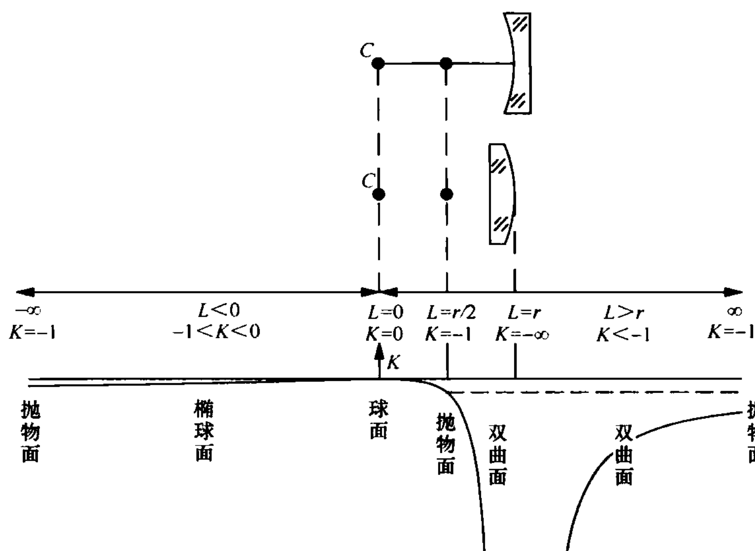


图 18.1　二次曲率常数 K 是一个由顶点曲率半径 r 和从二次表面的曲率中心到其中一个焦点距离 L 构成的函数

$$z=\frac{1}{K+1}\left[r-\sqrt{r^2-(K+1)S^2}\right] \tag{18.4}$$

式（18.4）适合除了抛物面以外的所有的二次曲面。在抛物面的情况下则有

$$z=\frac{S^2}{2r} \tag{18.5}$$

图 18.2 为相同曲率不同二次曲线常数的非球面轮廓。一个锥形光学面可以用一个曲率非常大的双曲面表示。如图 18.3 所示，因此可以得到

$$K=-(1+\tan^2\theta)<-1 \tag{18.6}$$

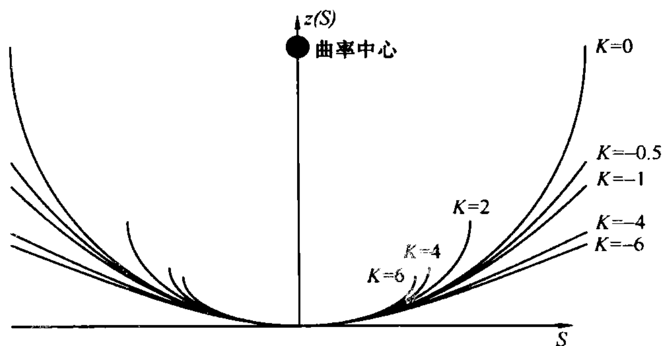


图 18.2　相同曲率不同二次曲线常数的非球面轮廓

和

$$c=\frac{1}{(K+1)b} \tag{18.7}$$

18.1.1　二次曲面的参数

二次曲面的焦点位置是关于 r 和 K 的函数，它们由如下关系式给出，如图 18.4 所示。

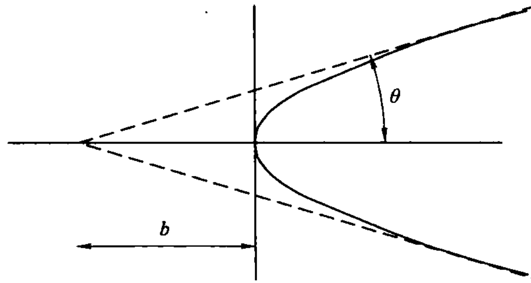


图 18.3 锥形光学面

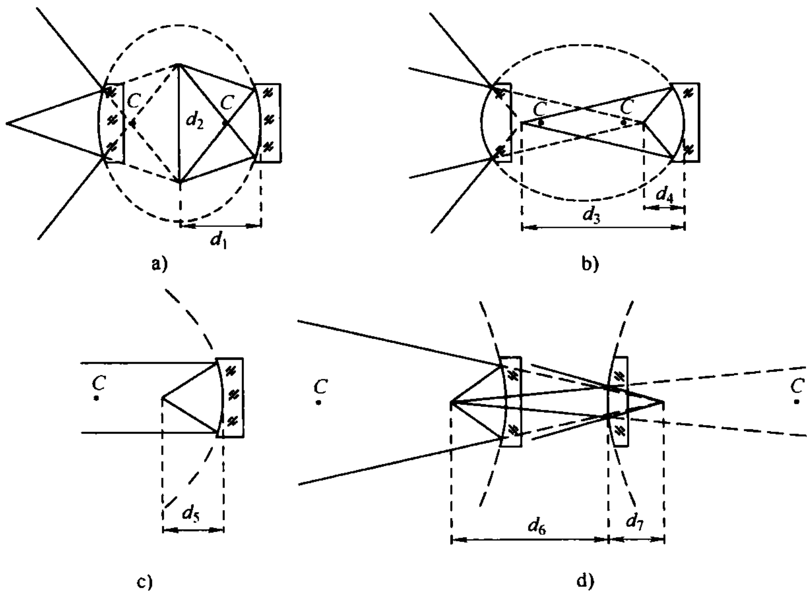


图 18.4 二次曲面参数（C 为曲率中心最高点）

a）扁平椭球面（$K>0$） b）椭球面（$-1<K<0$） c）抛物面（$K>-1$） d）双曲面（$K<-1$）

$$d_1=\frac{r}{K+1} \tag{18.8}$$

$$d_2=\frac{r}{K+1}(2\sqrt{k}) \tag{18.9}$$

$$d_3,d_4=\frac{r}{K+1}(1\pm\sqrt{-K}) \tag{18.10}$$

$$d_5=\frac{r}{2} \tag{18.11}$$

$$d_6,d_7=\frac{r}{K+1}(\sqrt{-k}\pm 1) \tag{18.12}$$

18.1.2 几个有用的 z 的展开式

一个非球面或二次曲面可以看成是由一个最接近球面再加上若干修正项构成。这在某些情况下是比较方便的，如

$$z=\frac{cS^2}{1+(1-c^2S^2)^{1/2}}+B_1S^4+B_2S^6+B_3S^8+B_4S^{10} \tag{18.13}$$

式中

$$B_1=A_1+\frac{[(K+1)-1]c^3}{8}$$
$$B_2=A_2+\frac{[(K+1)^2-1]c^5}{18} \qquad (18.14)$$
$$B_3=A_3+\frac{5[(K+1)^3-1]c^7}{128}$$
$$B_4=A_4+\frac{7[(K+1)^4-1]c^9}{256}$$

有时也可以表示成为

$$z=D_2S^2+D_4S^4+D_6S^6+D_8S^8+D_{10}S^{10} \qquad (18.15)$$

式中

$$D_2=\frac{c}{2} \qquad (18.16)$$

$$D_4=\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2+B_1=\frac{c^3}{8}+B_1 \qquad (18.17)$$

$$D_6=c\left(\frac{c}{2}\right)^4+B_2=\frac{c^5}{16}+B_2 \qquad (18.18)$$

$$D_8=\frac{5c}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^6+B_3=\frac{5c^7}{128}+B_3 \qquad (18.19)$$

$$D_{10}=\frac{14c}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^8+B_4=\frac{7c^9}{256}+B_4 \qquad (18.20)$$

18.1.3　表面法线的像差

设光学面的法线与光轴的交点到顶点的距离为 Z_n，要计算 Z_n 必须知道 z 对 S 的导数，即

$$\frac{dz}{dS}=\frac{cS}{[1-(K+1)c^2S^2]^{1/2}}+4A_1S^3+6A_2S^5+8A_3S^7+10A_4S^9 \qquad (18.21)$$

这时距离 Z_n 为

$$Z_n=\frac{S}{dz/dS}+z \qquad (18.22)$$

在二次曲面的情况下，正如布奇罗登（Buchroeder）等人所证明的，式（18.22）变成为

$$Z_n=\frac{1}{c}-Kz \qquad (18.23)$$

要注意的是，以图 18.5 中的抛物面（$K=-1$）为例，法线误差为

$$Z_n=\frac{1}{c}+Z=\frac{1}{c}+\tan^2\varphi \qquad (18.24)$$

式中，角 φ 为平面与光轴间的夹角，如图 18.5 所示；f 为抛物面的焦距。

我们可以看到这个抛物面中，曲率中心到光轴与法线的交点的距离 Z_n 与矢高 Z 相等，如图 18.5 在一般的非球面中，法线的交点可以大致表达为

$$Z_n=\frac{1}{c}-\frac{(Kc^3+8A_1)S^2}{2c^2} \qquad (18.25)$$

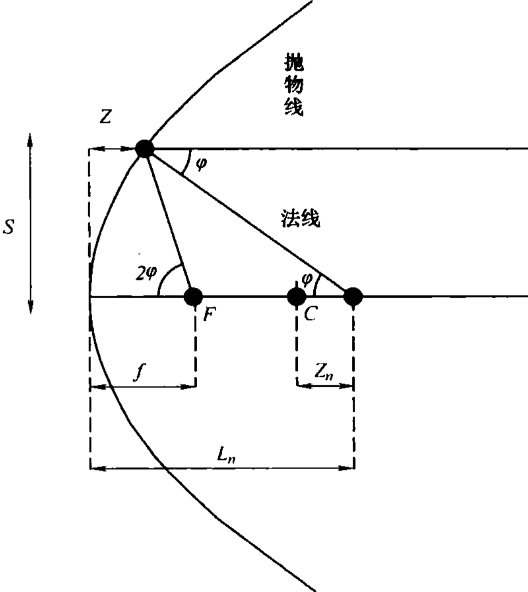


图 18.5 凹反射抛物面

18.2 由非球面产生的焦散面

当在非球面的曲率中心检验非球面时，知道焦散面的相关尺寸常常是很有用的，这些尺寸可按下述方法推算得到。焦散面是由渐近线包络而成。由位于曲率中心的点光源发出的光照射到非球面表面上反射回来的光，在解析几何上叫做渐近线。如图 18.6 所示，从非球面镜反射的波面 W（S）可写为

$$W(S)=\frac{Kc^3}{4}S^4+\frac{(\Delta L)c^2}{2}S^2 \quad (18.26)$$

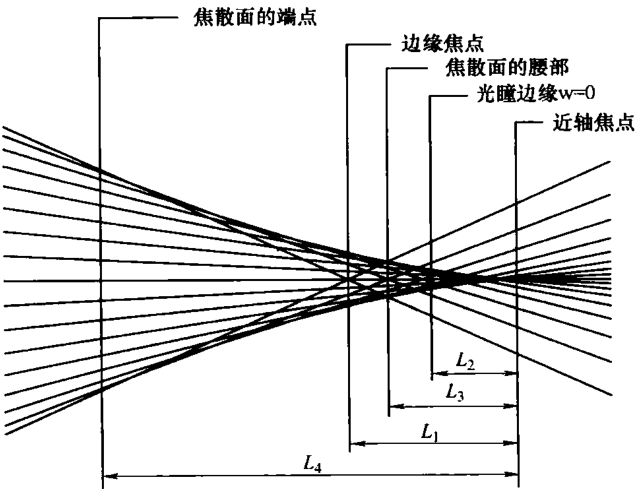


图 18.6 由非球面产生的焦散面

式中，ΔL 为从考查面到近轴焦点的距离。从近轴焦点到边缘焦点的距离 ΔL 可根据下述条件求出

$$\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}S}\right)_S = S_{\max} = 0 \tag{18.27}$$

式中，$S_{\max}$ 为被检非球面的半径。于是可得

$$(\Delta L)_{边缘焦点} = L = -KcS_{\max}^2 \tag{18.28}$$

从近轴焦点到焦散面的距离可根据下述条件求出

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}S^2}\right)_S = S_{\max} = 0 \tag{18.29}$$

因此有

$$(\Delta L)_{焦散面端点} = 3L \tag{18.30}$$

从焦散面的腰部到近轴焦点的距离 ΔL 可根据下述条件求出

$$\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}S}\right)_S = S_{\max} = -\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}S}\right)_S = \sigma \tag{18.31}$$

式中，σ 为 $\mathrm{d}W/\mathrm{d}S$ 为最大或最小时 S 所对应的值，也就是 $(\mathrm{d}^2W/\mathrm{d}S^2)_S = \sigma = 0$。于是可求出

$$(\Delta L)_{焦散面的腰部} = \frac{3}{4}L \tag{18.32}$$

用 ΔL 值表示焦散面腰部，焦散面的腰部直径或最小弥散面直径 ω 为

$$\omega = \frac{2}{c}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}S}\right)_S = S_{\max} \tag{18.33}$$

其最后结果为

$$\omega = -\frac{1}{2}Kc^2S_{\max}^3 \tag{18.34}$$

焦散面起点（近轴焦点）处的直径为 4ω，末端处的直径则为 8ω。

18.3　球面的初始像差

球面光学面反射与折射的初始像差的普通表达式将在本节中介绍。

18.3.1　非球面的球差

由 K 个圆心的反射或折射非球面系统都有一个横向的三级球差，如下

$$Sph^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{K} Sph_j \tag{18.35}$$

其中

$$Sph_j = -\frac{y(N_{-1} - N)}{2N_K u_K}\left\{\left[(8A_1 + Kc^3)y^3 + \frac{n-1}{n^2}(n + n_{-1})u_{-1} + n_{-1}yc\right](yc + u_1)^2\right\} \tag{18.36}$$

式中，u_{-1} 与 u 为入射、折射或者反射光线的斜率；n_{-1} 和 n 为折射率；y 为光线在反射面上的入射高度。

符号规则如图 18.7 所示，对于一个反射面，可以写出 $u_{-1} = -n = 1$，因此横向球差公式变为

$$Sph_j = \frac{y}{N_k U_k}[(8A_1 + kc^3)y^3 + (yc + u_{-1})y_c] \tag{18.37}$$

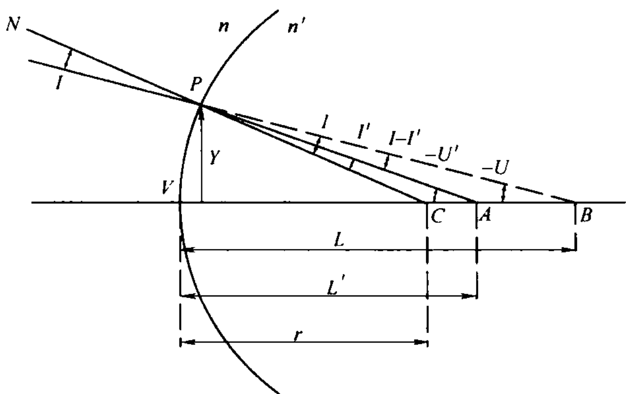


图 18.7　符号规则（图中所有量均为正值）

现在考虑特殊情况，一块镜子，检测它的曲率中心（$n_k = 1$，$u_{-1} = 0$，$u = -yc$），横向球差如下

$$Sph = \frac{-(8A_1 + Kc^3)y^3}{c} \tag{18.38}$$

而当点光源位于无限远以及像点位于焦点处（$u = -2yc$）时，则有

$$Sph_f = \frac{-(8A_1 + Kc^3 + c^3)y^3}{2c} \tag{18.39}$$

18.3.2　凹面镜的彗差

当光瞳位于凹面镜的镜面处时，三级弧矢彗差的计算公式与镜面的非球面度无关，可表示为

$$Coma_s = (yc + u)cyh \tag{18.40}$$

式中，h 为像高（或离轴量）。

需要注意的是如果被检面离曲率中心很近（$u = -yc$），则当光源的离轴量很小时将不产生三级彗差。

18.3.3　凹面镜的像散

一个凹面反射镜的匹兹瓦尔（Petzval）面仅仅与镜面的曲率有关。匹兹瓦尔面的曲率 $1/\rho_p$ 为

$$\frac{1}{\rho_p} = -2c \tag{18.41}$$

这里仅限于讨论光瞳与反射面重合的情况，因为这是光学检测中最常见的。

于是可以证明，弧矢面始终是一个平面。而子午面有一曲率 $1/\rho_T$，其值为

$$\frac{1}{\rho_T} = -4c \tag{18.42}$$

光瞳面与镜面重合时在匹兹瓦尔面上测得的三级横向弧矢像散为

$$Ast_T = cuh^2 \tag{18.43}$$

匹兹瓦尔面上的子午像散是弧矢像散的三倍。这两种像差之差就是残余横向像差，可表示为

$$TA_{ast} = Ast_t - Ast_s = 2Ast_s \tag{18.44}$$

因此在光源的离轴量很小的情况下检测时，实际看到的子午波面与弧矢波面剖面的像散差为

$$W = -\frac{2}{l}\int_0^y Ast_s \mathrm{d}y \tag{18.45}$$

式中，l 为镜面到像点的距离（$y = ul$）。

像散差也可以写为

$$W = -cu^2h^2 = \frac{-ch^2y^2}{l^2} \tag{18.46}$$

因此被检镜面实际存在的像散就等于 $W/2$。子午曲率大于弧矢曲率。值得注意的是，如果被检面位于曲率中心，则 l 就是曲率半径，h 就等于点光源及其像之间的距离的一半。

18.4 像散面

像散面是一个在两个垂直方向有两个不同曲率的镜面，称这个曲率为法向曲率。这些表面没有旋转对称，但是在光轴相交的两个直角面是对称的。一个像散面可以由几种方式来产生，比如像马拉卡拉（Malacara and Malacara，1971）描述的那样。撒新安（Sasian，1997）证明过，一个像散面有时候可以用一个离轴抛物面来代替，这样在加工过程中就会相对简单。在欧拉公式中，任何一个方向 θ 的顶点曲率都与法线曲率有关，如下

$$c_\theta = c_x\cos^2\theta + c_y\sin^2\theta \tag{18.47}$$

像散面有非常多的特性（Malacara-Doblado et al.，1996），但我们只简单地描述光学中的主要部分。

18.4.1 超环面

超环面通常是环状的外形，但可能没有中心孔。如图 18.8 所示，超环面以平行于 y 轴的轴为对称轴，表达式为

$$\begin{aligned} z &= r_x - \left[\left(\sqrt{r_y^2 - y^2} + r_x - r_y\right)^2 - x^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{c_x x^2 + c_y y^2 + 2\left(\dfrac{(c_y - c_x)y^2}{1 + \sqrt{1 - c_y^2 y^2}}\right)}{1 + \left\{1 - c_x\left[c_x x^2 + c_x y^2 + 2\left(\dfrac{(c_y - c_x)y^2}{1 + \sqrt{1 - c_y^2 y^2}}\right)\right]\right\}^{1/2}} \end{aligned} \tag{18.48}$$

其中，r_x 是平面 x-z 上的曲率半径（圆环的半径），r_y 是平面 y-z 上的曲率半径。y-z 平面上的横截面也包含于其他轴对称平面，这个横截面是一个以 c_y 为曲率的圆周。x-z 平面上的横截面是一个以 c_x 为曲率的圆周。光轴上的其他横截面有着非常复杂的形状，它们既不是圆周也不是椭圆。如果这个超环面有一个像环状的孔（$r_y < r_x/2$），称为环状超环面。如果这个超环面没有孔（$r_y > r_x/2$），称为纺锤状超环面。如果把超环面的光轴旋转 90°，这个表达

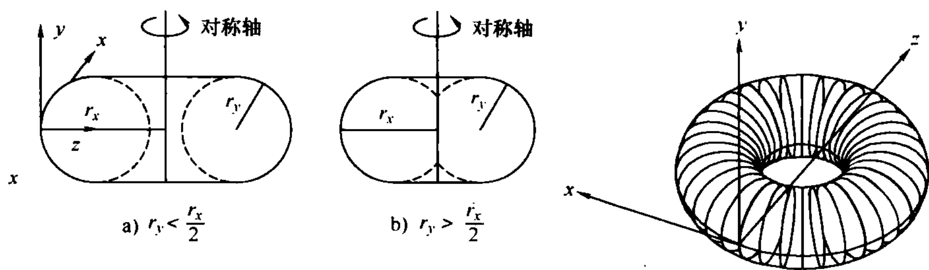


图 18.8 超环面

a）环状超环面 b）纺锤状超环面

式并不是不变的。

通过将 x 与 y 互换，c_x 与 c_y 互换，我们可以在式（18.49）中发现，这个超环面的表达式是沿着 x 轴为对称轴的。依靠超环面的方向和 c_x 与 c_y 之间的关系，超环面变得既不是环状超环面，也不是纺锤状超环面，如表 18.2 所示。

表 18.2 超环面的两个垂直方向对称轴的横截面和两个法线曲率之间的关系

对称轴（平行于）	曲率	面形类型	横截面	
			x-z 平面	y-z 平面
Y 轴	$c_y<2c_x$	纺锤状超环面	x z	y 对称轴 z
	$c_y>2c_x$	环状超环面	x z	y 对称轴 z
X 轴	$c_x<2c_y$	纺锤状超环面	x 对称轴 z	y z
	$c_x>2c_y$	环状超环面	x 对称轴 z	y z

18.4.2 椭球面和扁圆球面的像散

一个椭球面是一个椭圆绕着一个旋转对称轴而产生的。这个轴垂直并穿过光轴。

当对称轴平行于 y 轴时，如图 18.9 所示，矢量 z 的表达式为

$$z=\frac{1-[1-(c_xc_yx^2+c_y^2y^2)]^{1/2}}{c_y}=\frac{(c_xx^2+c_yy^2)}{1+[1-c_y(c_xx^2+c_yy^2)]^{1/2}} \tag{18.49}$$

如果以 y 轴为长轴生成的椭圆体，生成的面形为椭球体。相反，如果以 z 轴为长轴生成的椭圆体，生成的面形为扁球体。当在超环面的情况下，在光轴旋转后这个表达式并不是不

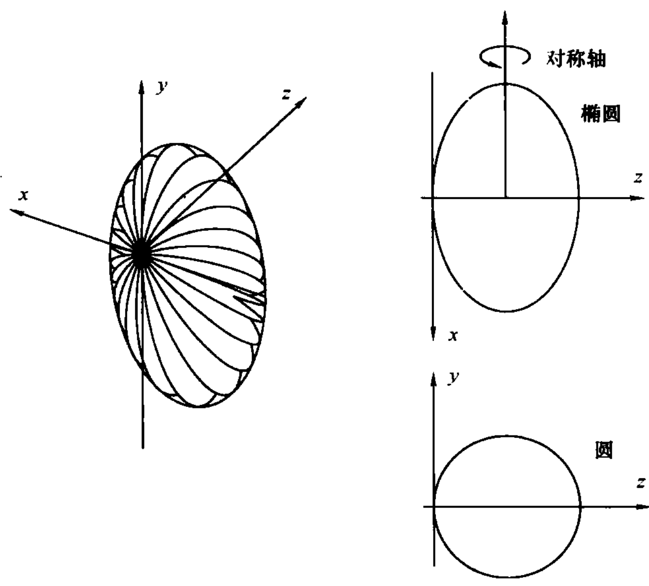


图 18.9 椭球面的像散

变的。通过将 x 与 y 互换，c_x 与 c_y 互换，可以在式（18.49）中发现 z 表达式是沿着 x 轴对称的。

x-z 与 y-z 两个平面的横截面取决于对称轴的方向与曲率 c_x，c_y 的相对值，如表 18.3 所示。

表 18.3 椭球形或扁圆球形的对称轴的两个不同方向的横截面和两个法线曲率之间的关系

对称轴（平行于）	曲 率	沿着光轴 z 的半轴	面形类型	横截面	
				x-z 平面	y-z 平面
y 轴	$c_y < c_x$	短半轴	椭球形	x, z	y, z, 对称轴
	$c_y > c_x$	长半轴	扁圆球形	x, z	y, z, 对称轴
x 轴	$c_x < c_y$	短半轴	椭球形	x, z, 对称轴	y, z
	$c_x > c_y$	长半轴	扁圆球形	x, z, 对称轴	y, z

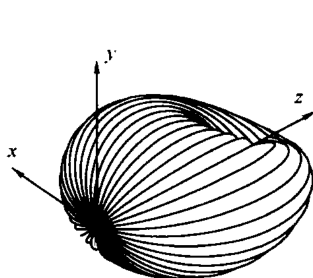
18.4.3 球柱面

一个球柱面，如图 18.10 所示，可以由下面的表达式来描述（Malacara，1986）

$$z=\frac{c_x x^2+c_y y^2}{1+\left[1-\frac{(c_x x^2+c_y y^2)^2}{x^2+y^2}\right]^{1/2}} \tag{18.50}$$

如果曲率 c_x 与 c_y 均等于 c，这个表达式就变得与式（18.1）相同。这个表达式既关于 x 对称，也关于 y 对称。因此，如果把 x 与 y 互换，c_x 与 c_y 互换，这个表达式的形式是不变的。另外值得注意的是，球柱面的表面特性是光轴上一个平面上的横截面总是一个圆，这个圆的曲率为欧拉公式中给出的 c_θ。

球柱面与超环面有个共同点，即它们在 x-z 与 y-z 这两个平面上的横截面是个圆周。



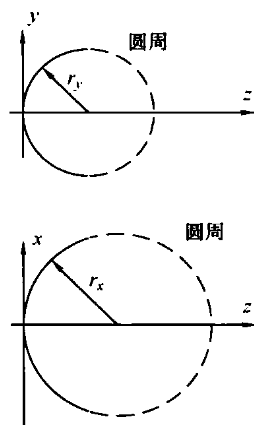


图 18.10 球柱面的像散

球柱面与超环面之间最重要的不同点是球柱面的 z 只可能有两个解，因为只有一个平方根。对于超环面，有两个平方根，一个包含在另外一个里面。对于纺锤形超环面，四个解中的两个是虚数。

18.4.4 被测像散面和参考像散面

如果用位于任意两个法线曲率中心的点光源来检测之前所讲的像散面，可以认为理想的图像是通过反射光在同一个平面上形成细条纹的形态，如第 12 章中描述的那样。这是用于检测像散面的基础。从几何观察点看到的这些条纹图像并不总是理想的，因为反射波在垂直于条纹图像的方向上可能出现横向像差。可是，也有可能会出现一个理想的条纹图像。这就要求镜面在检测中有一个旋转对称轴垂直于光轴，与超环面、椭球体、扁球体的例子一样，并且照明的点光源要位于对称轴与光轴的交点上面。这个条件保证了反射波在 x 方向没有横向像差 TA_x。于是，沿着光学面的对称轴，这个图像就是一个理想的整齐的细条纹。

关于之前表述的那些光学面的对称轴有一个唯一的问题，即包含了对称轴的平面的反射光线可能有一些横向球差 TA_y，当然这种情况不会扩大细条纹图像，只是沿着这条线分布的光源会分布不均。如果必须要排除这种残余的像差，假设镜面的表面生成一个椭圆，这个椭圆不是关于短轴旋转，而是关于通过椭圆焦距，并平行于 y 轴的一条线旋转，那么将得到一个理想的像散反射面。这个像散面如图 18.11 所示。y-z 平面上的横截面是一个椭圆形的截面。与在超环面、椭球体、扁球体中一样，任何一个面的横截面都平行于 x-z 平面，这些横截面都是圆周，这些圆周的曲率中心都排列在对称轴上并穿过其中一个椭圆的焦距。这个光学面可以当做椭圆纺锤体的超环面来考虑。简单地说，称为参考像散面。

通过旋转一个以平行于 y 轴并通过光轴的轴为对称轴的椭圆而产生的镜面，这个镜面的普通表达式可以写成

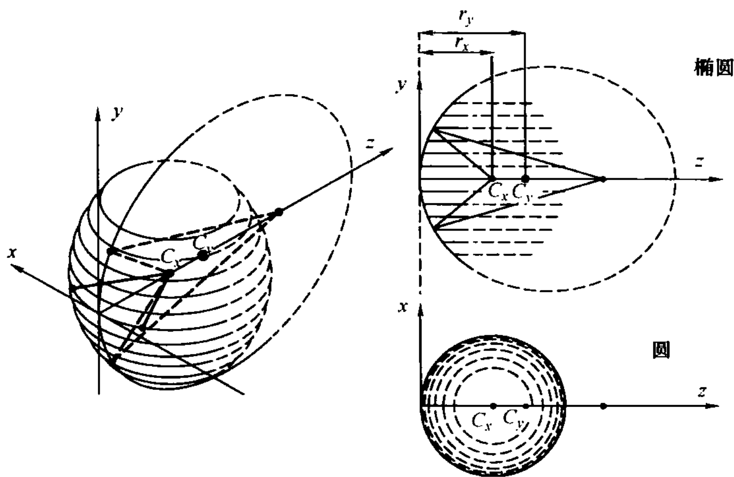


图 18.11　理想的基准像散面

$$z = r_x - \left\{\left[\left(a^2 - \frac{ay^2}{r_y}\right)^{1/2} + r_x - a\right]^2 - x^2\right\}^{1/2}$$

$$= \frac{c_z x^2 + c_y y^2 + \left(\frac{1}{a} - c_x\right)\left(\frac{c_y y^2}{1 + \left(1 - \frac{c_x y^2}{a}\right)^{1/2}}\right)^2}{1 + \left\{1 - c_x\left[c_x x^2 + c_y y^2 + \left(\frac{1}{a} - c_x\right)\left(\frac{c_y y^2}{1 + \left(1 - \frac{c_y y^2}{a}\right)^{1/2}}\right)^2\right]\right\}^{1/2}} \tag{18.51}$$

式中，a 为生成的椭圆的长轴，很容易发现对称轴到顶点的距离为 c_x。

值得注意的是，通过参考像散面的表达式，建立 a 的函数也可以获得其他几个光学面，如表 18.4 所示。

表 18.4　方程（18.51）中 a 的值产生的以平行于 y 轴的轴为对称轴的像散面

像　散　面	a 值
超环面	$1/c_y$
椭球体或扁球体	$1/c_x$
参考像散面	$\dfrac{c_y}{c_x(2c_x - c_y)}$

还有，与超环面和椭圆体的例子一样，通过把 x 与 y 互换，c_x 与 c_y 互换，这个光学面能关于平行于 x 轴的轴为对称轴旋转。

18.4.5　像散面之间的对比关系

这里讲的所有的像散面都有一个共同的性质，即 x-z 平面上的横截面是个圆周（如果对称轴平行于 y 轴）。像散面的四阶泰勒展开式有三个共用的首要条件，如下

$$z = \frac{1}{2}c_x x^2 + \frac{1}{2}c_y y^2 + \frac{1}{8}c_x^3 x^4 + z_4 \tag{18.52}$$

z_4 代表后面的两个四阶项，x^2y^2 是混合项的平方

（1）对于球柱面镜

$$z_4=\frac{1}{16}[3(c_x+c_y)c_xc_y-(c_x^3+c_y^3)]x^2y^2+\frac{1}{8}c_y^3y^4 \tag{18.53}$$

（2）对于对称轴平行于 y 轴的超环面

$$z_4=\frac{1}{4}c_x^2c_yx^2y^2+\frac{1}{8}c_x^3y^4 \tag{18.54}$$

（3）对于对称轴穿过光轴并且平行于 y 轴的椭球体

$$z_4=\frac{1}{4}c_x^2c_yx^2y^2+\frac{1}{8}c_xc_y^2y^4 \tag{18.55}$$

（4）对于对称轴穿过其中一个焦距并平行于 y 轴的基准面　通过近似的式（18.51）用四阶泰勒展开式并用相应的 a 值

$$z_4=\frac{1}{4}c_x^2c_yx^2y^2+\frac{1}{8}c_yc_x(2c_x-c_y)y^4 \tag{18.56}$$

这里必须指出，尽管这些像散面的外形不同，如果两个法线曲率近似，实际上它们几乎是相同的。

18.5 离轴二次曲面

我们考虑一个椭圆形的二次曲面，球面、抛物面和双曲面只是特殊情况，它们只是偏心率不同。离轴二次曲面的表面如图 18.12 所示，其表达式如下

$$z(x,y)=\frac{1}{2}c_xx^2+\frac{1}{2}c_yy^2+a_3x^2y+a_4y^3+a_5x^4+a_6x^2y^2+a_7y^4 \tag{18.57}$$

其中，c_x 和 c_y 离轴二次曲面坐标原点的曲率，系数 a_3，a_4，a_5 与 a_7 取决于定义二次曲面的参数。

一般说来，对于所有的离轴二次曲面，可以发现

$$c_yc^2=c_x^2 \tag{18.58}$$

通常把 y 方向曲率称为切线曲率，x 方向上的曲率称为弧矢曲率。

$$w^2=(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta \tag{18.59}$$

$$z_0=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta} \tag{18.60}$$

如图 18.12 所示，得到系数如下：

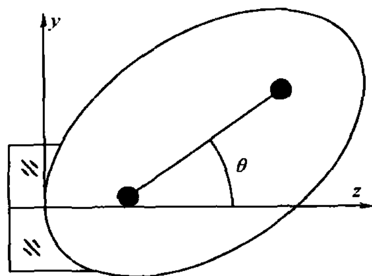


图 18.12　离轴椭球体

$$c_x=\frac{z_0}{b^2} \tag{18.61}$$

$$c_y=\frac{z_0^3}{a^2b^2} \tag{18.62}$$

$$a_3=-\frac{z_0^2w^2}{2a^2b^4} \tag{18.63}$$

$$a_4=\frac{z_0^4w^2}{2a^4b^4} \tag{18.64}$$

$$a_5=\frac{z_0(a^2b^2+w^4)}{8a^2b^6} \tag{18.65}$$

$$a_6=\frac{z_0^3}{4a^4b^6}(a^2b^2+3w^4) \tag{18.66}$$

$$a_7=\frac{z_0^5}{8a^2b^2(a^2b^2+w^4)}\left(\frac{5w^8}{a^4b^4}+\frac{6w^4}{a^2b^2}+1\right) \tag{18.67}$$

这些系数说明了存在的彗差、三次像散和二次像散。这些公式还可以写成由椭圆的轴向曲率 c，即半轴 a 端点的曲率，二次曲线常数 K 和离轴角度 θ 表达的形式。

$$a=\frac{1}{c(k+1)} \tag{18.68}$$

$$b=\frac{1}{c\sqrt{k+1}} \tag{18.69}$$

这时，弧矢曲率和切线曲率变为

$$c_x=c(1+k\sin^2\theta)^{3/2}\ominus \tag{18.70}$$

$$c_y=c(1+k\sin^2\theta)^{1/2} \tag{18.71}$$

1979 年撒新安提出一个像散面，像一个圆，某些情况下能替代一个离轴抛物面，如图 18.13 所示，它的轴的倾斜角是 θ，如果它的直径比曲率半径小，它可以认为是一个最接近超环面的面。

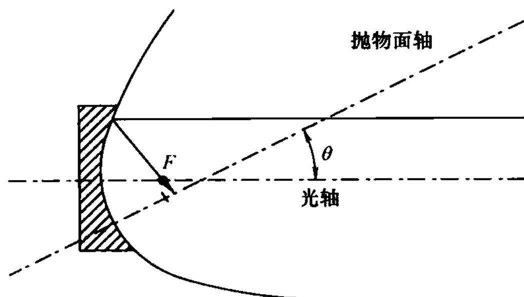


图 18.13　离轴抛物面

在式（18.71）中，设 $k=-1$，则可以得到切线曲率 c_y 为

$$c_y=c\cos^3\theta \tag{18.72}$$

同样，弧矢曲率 c_y 为

$$c_x=c\cos\theta \tag{18.73}$$

抛物面主轴顶点曲率 c 与焦距之间的关系如下，F 为抛物面焦距

⊖　译者注：式(18.70)应为 $c_x=c(1+k\sin^2\theta)^{1/2}$；式(18.71)应为 $c_y=c(1+k\sin^2\theta)^{3/2}$。

$$c=\frac{1}{2F} \tag{18.74}$$

如果离轴抛物面的直径比它的焦点距离小的不是太多，除了像散部分以外，还必须考虑一个额外彗差。对于大口径，甚至还会出现三次像散或者二次像散（Malacara. ，1990）。

参考文献

Malacara D., "Some Parameters and Characteristics of an Off-Axis Paraboloid," *Opt. Eng.*, **30**, 1277 (1990).

Malacara D., and Z. Malacara, "Diamond Tool Generation of Toroidal Surfaces," *Appl. Opt.*, **10**, 975–977 (1971).

Malacara-Doblado D., D. Malacara-Hernández, and J. García-Márquez, "Axially Astigmatic Surfaces: Different Types and Their Properties," *Opt. Eng.*, **35**, 3422–3426 (1996).

McLeod J. H., "The Axicon: A New Type of Optical Element," *J. Opt. Soc. Am.*, **44**, 592–597 (1954).

McLeod J. H., "Axicons and Their Uses," *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 166–169 (1960).

Menchaca C. and D. Malacara, "Directional Curvature in a Conic Mirror," *Appl. Opt.*, **23**, 3258 (1984).

Menchaca C. and D. Malacara, "Toroidal and Sphero-Cylindrical Surfaces," *Appl. Opt.*, **25**, 3008–3009 (1986).

Mertz L., "Aspheric Potpourri," *Appl. Opt.*, **20**, 1127–1131 (1979b).

Sasian J. M., "Double Curvature Surfaces in Mirror System Design," *Opt. Eng.* **36**, 183–188 (1997).

Schulz G., "Aspheric Surfaces," in: E. Wolf (Ed.) *Progress in Optics*, vol. XXV, Chap. IV, North Holland, Amsterdam, 1988.

Shannon R. R., "Aspheric Surfaces," in: R. Shannon and J. C. Wyant (Eds.), *Applied Optics and Optical Engineering*, vol. VIII, Academic Press, San Diego, 1980.

国际视野　科技前沿

《光学车间检测（原书第3版）》原书名为《Optical Shop Testing（Third Edition）》，由墨西哥籍光学专家Daniel Malacara主编，John Willey&Sons公司出版。

《Optical Shop Testing》是国际光学检测领域的经典著作，对国际光学检测技术的发展产生了深远的影响。1977年原书第1版出版，原书第3版于2007年出版。作者对全书作了重要的修订、更新、调整和扩容，系统介绍了30年来光学检测领域的最新、最重要的技术进展。

译者团队：中国科学院光电技术研究所的先进光学研制中心、科技信息中心和质检中心的研究员、博士生导师、高级工程师和专业科技翻译人员。



上架指导：工业技术/光学/检测技术

ISBN 978-7-111-37376-6



地址：北京市百万庄大街22号
电话服务
社服务中心：(010)88361066
销售一部：(010)68326294
销售二部：(010)88379649
读者购书热线：(010)88379203

邮政编码：100037
网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版

ISBN 978-7-111-37376-6
策划编辑：舒雯／封面设计：鞠杨
定价：158.00元

[General Information]
书名=光学车间检测 原书第3版
页数=630
SS号=13015821